

Příklady k zápočtu (VPzMA)

(Integrální počet funkcí více proměnných)

Vypočtete integrály (Fubiniova věta pro dvojný integrál):

- $\iint_M (x^2 + y) \, dx \, dy$, kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle$;
- $\iint_M (x + y^2) \, dx \, dy$, kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle$;
- $\iint_M (x - y) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq x, x + y \leq 2\}$;
- $\iint_M \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, y \leq x, xy \geq 1\}$;
- $\iint_M \cos(x + y) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, y \leq \pi\}$;
- $\iint_M (3xy^2 - 2x) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$;
- $\iint_M \frac{x}{y} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x \leq 2, y \leq x, y \geq 1\}$;
- $\iint_M e^{2x+y} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2, y \geq 0, y \leq 1, x \geq 0\}$;
- $\iint_M x^2 y \, dx \, dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$;
- $\iint_M xy^2 \, dx \, dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$.

Vypočtete integrály (transformace dvojného integrálu):

- $\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$;
- $\iint_M x\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$;
- $\iint_M y \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3x, y \geq 0\}$;
- $\iint_M \arctg \frac{y}{x} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$;
- $\iint_M e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- $\iint_M xy \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$;
- $\iint_M (2x + y) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 36, x \geq 0\}$.

Vypočtěte integrály (Fubiniova věta pro trojný integrál):

- $\iiint_M xy^2z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$;
- $\iiint_M e^{3x+2y+z} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$;
- $\iiint_M \frac{1}{1-x-y} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 2, 5 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle$;
- $\iiint_M xy \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$;
- $\iiint_M \frac{1}{x+y+1} \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$;

- $\iiint_M x^2 y z^3 \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq xy, y \geq x \geq 0, y \leq 1, z \geq 0\}$.

Vypočtete integrály (transformace trojného integrálu):

- $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 1\}$;
- $\iiint_M z^2 \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$;
- $\iiint_M z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}$;
- $\iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq 2\}$;
- $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$;
- $\iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$;
- $\iiint_M xy \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;
- $\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
- $\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$;
- $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.