

Příklady k zápočtu (VPzMA)

(Diferenciální počet funkcí více proměnných)

Určete a v \mathbb{R}^2 znázorněte definiční obor funkce f definované předpisem:

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2}$;
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \ln(xy)$;
- $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$;
- $f(x, y) = \ln(x + y)$;
- $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$.

Určete a v \mathbb{R}^2 znázorněte vrstevnice funkce f definované předpisem:

- $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$;
- $f(x, y) = xy$;
- $f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$.

Spočtěte první parciální derivace funkce f podle všech proměnných, je-li:

- $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;
- $f(x, y) = x^y$;
- $f(x, y, z) = 2x^3 - \cos(x^2yz) - 2x$;
- $f(x, y) = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$;

- $f(x, y) = \ln \frac{x+4}{y^2}$;
- $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$;
- $f(x, y) = xy^3 \ln(x+y)$;
- $f(x, y, z) = e^{x^2(1-y-z)}$.

Určete diferenciál funkce f v bodě c , je-li:

- $f(x, y) = \ln \sqrt{2x^2 - y^2}$, $c = (3, -\sqrt{2})$;
- $f(x, y, z, u) = \sin(x+y) \cos(z-u)$, $c = (0, 0, 0, 0)$;
- $f(x, y) = xy + \frac{x^2}{y}$, $c = (1, 1)$;
- $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$, $c = (1, 0, 1)$.

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce f sestrojené v bodě c , je-li:

- $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, $c = (1, 1, 4)$;
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $c = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
- $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $c = (1, -1, ?)$.

Vypočtěte $\frac{df(c)}{du}$, je-li:

- $f(x, y, z) = xyz$, $c = (5, 1, 2)$, $u = \frac{1}{\|(4, 0, -3)\|} \cdot (4, 0, -3)$;
- $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$, $c = (1, 1)$, $u = \frac{1}{\|(1, 2)\|} \cdot (1, 2)$;
- $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $c = (1, 2, 2)$, $u = \frac{1}{\|(1, 0, 1)\|} \cdot (1, 0, 1)$.

Určete, pro jaké $u \in \mathbb{R}^3$ je $\frac{df(c)}{du}$ největší (resp. nejmenší), je-li:

- $f(x, y, z) = z + \sin(2x) + \cos y, \quad c = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 1\right)$;
- $f(x, y, z) = \frac{xy^2}{3+z}, \quad c = (2, 1, -2)$.

Určete $d^k f_c$, je-li:

- $f(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + x + 3y, \quad c = (2, 1), \quad k = 2$;
- $f(x, y) = \sin(2x + y), \quad c = (0, \pi), \quad k = 2$;
- $f(x, y) = \sin(2x + y), \quad c = (0, \pi), \quad k = 3$.

Najděte Taylorův polynom m -tého řádu funkce f v bodě c , je-li:

- $f(x, y) = \ln(1+x) \cdot \ln(1+y), \quad c = (0, 0), \quad m = 2$;
- $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad m = 2$;
- $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2} + xy, \quad c = (1, 2), \quad m = 2$;
- $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad c = (1, 1), \quad m = 2$;
- $f(x, y) = x^3y^2 + 5xy^2 + 3xy - y^2 + 4x^2 - x + y + 1, \quad c = (0, 0), \quad m = 2$;
- $f(x, y) = x^3y^2 + 5xy^2 + 3xy - y^2 + 4x^2 - x + y + 1, \quad c = (0, 0), \quad m = 3$.

Najděte všechny lokální extrémů funkce f definované předpisem:

- $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 5$;
- $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 - 7$;
- $f(x, y) = 3x^2 + y^3 - 6xy - 9y + 2$;
- $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$;

- $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $f(x, y, z) = xyz(12 - x - 2y - 3z)$;
- $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z - 1$.

Najděte globální extrémy funkce f na množině M , je-li:

- $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle -1, 2 \rangle$;
- $f(x, y) = x^2y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $M = \langle -5, 1 \rangle \times \langle 3, 7 \rangle$;
- $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;
- $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$;
- $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$, M je trojúhelník určený body $A = (0, 2)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, -1)$.