Projekty - Variační metody

Projekt č. 1.

Dokažte větu o vlastnostech míry.
(ze skript Variační metody, prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D., 2012)

> **2.7 Věta (vlastnosti míry).** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Pak platí*
>
> i) $\mu(\emptyset) = 0$,
>
> ii) $\forall A, B \in \mathcal{A}: \ \big[A \subset B \ \Rightarrow \ \mu(A) \le \mu(B)\big]$,
>
> iii) $\Big[(\forall n \in \mathbb{N}: \ A_n \in \mathcal{A}) \ \wedge \ (A_n \nearrow A)\Big] \ \Rightarrow \ \mu(A_n) \to \mu(A)$
>
> $\left(\textit{symbolem } A_n \nearrow A \textit{ rozumíme, že } A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \textit{ a že } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,
>
> iv) $\Big[(\forall n \in \mathbb{N}: \ A_n \in \mathcal{A}) \ \wedge \ (A_n \searrow A) \ \wedge \ \left(\underline{\mu(A_1) < +\infty}\right)\Big] \ \Rightarrow \ \mu(A_n) \to \mu(A)$
>
> $\left(\textit{symbolem } A_n \searrow A \textit{ rozumíme, že } A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \textit{ a že } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Všechny výše uvedené vlastnosti odvoďte z axiomů míry.

Projekt č. 2.

Dokažte větu o zúplnění míry.
(ze skript Variační metody, prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D., 2012)

> **2.10 Věta (o zúplnění míry).** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $\mathcal{A}_0$ je systém všech $E \subset X$ takových, že existují množiny $A, B \in \mathcal{A}$ tak, že*
>
> $$A \subset E \subset B, \ \mu(B \setminus A) = 0.$$
>
> *Definujme pro $E \in \mathcal{A}_0$:*
>
> $$\mu_0(E) := \mu(A).$$
>
> *Potom $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.*[a]
>
> [a] $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ nazýváme <u>zúplněním</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Uvědomte si, že zde je potřeba dokázat více věcí. Např. to, že $\mathcal{A}_0$ je σ–algebra, že definice μ_0 je korektní a že μ_0 je úplná míra. A možná i další drobnosti …

Projekt č. 3.

Dokažte následující ε–δ vlastnost (Lebesgueova) integrálu.
(text prof. RNDr. Jana Malého, DrSc.)

12.2. **Věta** (ε-δ spojitost integrálu)**.** *Nechť f je integrovatelná funkce na X. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $E \in \mathcal{S}$ platí*

$$\mu(E) < \delta \implies \int_E |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Důkaz. Nechť

$$E_j = \{|f| \geq j\}.$$

Podle Lebesgueovy věty 9.2 (majoranta $|f|$) je

$$\lim_{j\to\infty} \int_{E_j} |f| \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X |f| \chi_{E_j} \, d\mu = 0,$$

takže existuje $k \in \mathbf{N}$ tak, že

$$\int_{E_k} |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) < \delta := \frac{\varepsilon}{2k}$. Potom

$$\begin{aligned}\int_E |f| \, d\mu &= \int_{E\cap E_k} |f| \, d\mu + \int_{E\setminus E_k} |f| \, d\mu \\ &\leq \int_{E_k} |f| \, d\mu + k\,\mu(E) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Je potřeba důkazu porozumět a umět jednotlivé kroky řádně zdůvodnit.

Proč je předpoklad integrovatelnosti funkce f důležitý? Na konkrétním příkladě ukažte, že tento předpoklad nelze vynechat.

Projekt č. 4.

Dokažte tvrzení i) následující věty.
(ze skript Variační metody, prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D., 2012)

2.41 Věta (o souvislosti Riemannova a Lebesgueova integrálu).

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ***omezená*** *funkce na intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Pak*

i) *existuje-li $(R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, existuje i $(L) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a oba integrály se rovnají,*

ii) $(R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existuje* $\Leftrightarrow$ *funkce f je spojitá skoro všude v $\langle a, b\rangle$.*[a]

[a] Tzn.

$$\exists N \subset \mathbb{R} : \; \big[(\lambda(N) = 0) \;\wedge\; (\forall x \in \langle a, b\rangle \setminus N : \; f \text{ je spojitá v } x) \big].$$

Projekt č. 5.

Nechť $p \geq 1$ a $E \in \mathcal{B}_0$. Dokažte, že prostor $L^p(E)$ s normou

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

je úplný, tj. každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Návod (text prof. RNDr. Jana Malého, DrSc.):

11.6. **Úplnost prostorů L^p.** *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost prvků $L^p(X)$, cauchyovská v normě $\|\dots\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(X)$ tak, že $\|f_j - f\|_p \to 0$. Dále existuje posloupnost $\{g_j\}$ vybraná z $\{f_j\}$ tak, že $g_j \to f$ μ-skoro všude.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro $p < \infty$; případ $p = \infty$ je odlišný a snadnější. Jelikož $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, lze z ní vybrat posloupnost g_j tak, že pro všechna $j = 1, 2, \dots$ platí

$$\|g_{j+1} - g_j\| < 2^{-j}. \tag{11.2}$$

Položme

$$h_k = |g_1| + |g_2 - g_1| + \dots + |g_k - g_{k-1}|,$$
$$h = \lim_{k \to \infty} h_k$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro L^p-normu a (11.2) dostaneme

$$\|h_k\|_p \leq \|g_1\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|g_{j+1} - g_j\|_p \leq \|g_1\|_p + 1.$$

Podle Leviho věty 8.10 a předchozího odhadu je

$$\int_X h^p \, d\mu = \lim_k \int_X h_k^p \, d\mu = \lim_k \|h_k\|_p^p \leq (\|g_1\|_p + 1)^p$$

Funkce h^p je tedy integrovatelná a tím spíš skoro všude konečná (viz. 8.6 (c)). Uvažujme bod x, v němž $h(x) < \infty$. Potom řada

$$g_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \big(g_{j+1}(x) - g_j(x)\big)$$

konverguje, neboť konverguje řada absolutních hodnot. Tím jsme dokázali existenci limity

$$f(x) := \lim_{j \to \infty} g_j(x)$$

v každém takovém bodě x. Lebesgueova věta 9.2 s majorantou h^p dává

$$\lim_{j \to \infty} \int_X |f - g_j|^p \, d\mu = \int_X \lim_{j \to \infty} |f - g_j|^p \, d\mu = 0.$$

Znovu použijeme, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, a dostáváme

$$\|f - f_j\|_p \leq \|f - g_j\|_p + \|g_j - f_j\|_p \to 0.$$

Tvrzení o konvergenci skoro všude jsme dokázali v průběhu. $\square$

Je potřeba důkazu porozumět a umět jednotlivé kroky řádně zdůvodnit.

Projekt č. 6.

Dokažte následující větu.
(text prof. RNDr. Jana Malého, DrSc.)

> **12.9. Exercise** (Vitali's theorem). Let $1 \le p < +\infty$. If $f_n \in \mathscr{L}^p$, $f_n \to f$ almost everywhere and $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, then $\|f_n - f\|_p \to 0$.
>
> *Hint*. Let $\varphi_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Then $\varphi_n \to 2^p |f|^p$ almost everywhere. Since $|f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p)$, we have $\varphi_n \in \mathscr{L}^1$, $\varphi_n \ge 0$. By Fatou's lemma
>
> $$2^p \int_X |f|^p \le \liminf \int_X \varphi_n = 2^p \int_X |f|^p - \limsup \int_X |f_n - f|^p\,.$$
>
> Hence $\limsup \int_X |f_n - f|^p = 0$, finishing the proof.

Je potřeba důkazu porozumět a umět jednotlivé kroky řádně zdůvodnit.

Na konkrétním příkladě ukažte, že podmínku $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ nelze vynechat.

Zamyslete se také nad tím, zda podobné tvrzení platí i v případě $p = +\infty$.

Projekt č. 7.

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ je libovolná (lebesgueovsky) měřitelná nezáporná funkce definovaná na celém $\mathbb{R}^n$. Uvažujme σ–algebru $\mathcal{A}$ všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ a definujme funkci $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ předpisem

$$\mu(M) = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro každou množinu } M \in \mathcal{A}.$$

Dokažte, že μ je míra na $\mathcal{A}$, která obecně není úplná.

Projekt č. 8.

Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelná a funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rovněž měřitelná. Dále předpokládejme, že množina $A \subseteq \mathbb{R}$ je (lebesgueovsky) měřitelná.

Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) konverguje podle míry k funkci f na množině A (píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na A), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim \lambda\left(\{x \in A\colon\ |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\right) = 0.$$

Jestliže posloupnost funkcí (f_n) konverguje podle míry k funkci f a zároveň k funkci g (na množině A), pak $f = g$ skoro všude na A. Dokažte.

Projekt č. 9.

Dokažte následující tvrzení o záměně derivace a integrálu.

Nechť $f(x,t)$ je funkce $(n+1)$ proměnných definovaná na $A \times I$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Dále nechť jsou splněny následující čtyři podmínky:

(1) Pro každé $t \in I$ je funkce $f(\cdot, t)$ (definovaná na množině A) měřitelná.

(2) Existuje $t_0 \in I$ takové, že funkce $f(\cdot, t_0)$ je integrovatelná na A.

(3) Pro všechna $t \in I$ a skoro všechna $x \in A$ existuje (konečná) derivace $f'_t(x,t)$.

(4) Existuje funkce h integrovatelná na A taková, že pro všechna $t \in I$ a skoro všechna $x \in A$ platí
$$|f'_t(x,t)| \leq h(x).$$

Pak je funkce $f(\cdot, t)$ integrovatelná na A dokonce pro všechna $t \in I$. Navíc má funkce g definovaná předpisem
$$g(t) = \int_A f(x,t)\,\mathrm{d}x$$
derivaci na intervalu I a platí
$$g'(t) = \int_A f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x,$$
tzn.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_A f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Pomocí dokázaného tvrzení se pokuste vypočítat integrál
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Nápověda:
Uvažujte funkci $I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(t \sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ *a její derivaci.*

Projekt č. 10.

(a) Vypočtěte f' a f'' ve smyslu distribucí, je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$f(x) = |x| - \left|x^2 - 1\right| + \operatorname{sgn} x + 4.$$

Obě derivace vyjádřete jako součet regulární a neregulární části. Nezapomeňte také zdůvodnit, proč tyto derivace existují.

(b) Najděte druhou derivaci ve smyslu distribucí funkce $g(x) = \cos|x-2|$. Výsledek opět rozepište na součet regulární a neregulární části.

Projekt č. 11.

Je dána funkce $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$v(x_1, x_2) = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \text{(vektorově zapsáno} \quad v(x) = \ln\|x\|)\,.$$

(a) Dokažte, že na libovolné oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ neobsahující bod $(0,0)$ platí

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0,$$

kde derivace chápeme v klasickém smyslu.

(b) Dokažte, že platí $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. (Tzn., že v lze chápat jako distribuci.)

(c) Vypočtěte Δv ve smyslu distribucí.
Návod: Použijte Greenovu formuli

$$\big(\forall u, v \in C^2(\overline{\Omega})\big) : \int_\Omega (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \cdot v - u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\right) \mathrm{d}s$$

a tvrzení (a).

Projekt č. 12.

Najděte nějaké funkce $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ takové, aby platilo

(a) $f' + f = \operatorname{sgn} x + \delta_0 + \delta_1$,

(b) $g'' + g = x + 2\delta_0 - 3\delta'_\pi$

ve smyslu distribucí. Nakreslete i grafy funkcí f a g.

Projekt č. 13.

Nechť $a \in \mathbb{R}$ je libovolné. Dokažte, že Diracova distribuce δ_a $(\in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}))$ není regulární. To znamená, že neexistuje funkce $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ taková, že

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\colon\ \langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Projekt č. 14.

Vypočtěte $f^{(4)}$ ve smyslu distribucí, je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$f(x) = |x|^3 - |x-1| + \sin x.$$

Tuto derivaci vyjádřete jako součet regulární a neregulární části. Nezapomeňte také zdůvodnit, proč tato derivace existuje.