Příklady na extrémy funkcionálů

1. Najděte globální extrémy funkcionálu $J:\ C^1(\langle 0,1\rangle) \to \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$J(y) = \int_0^1 \Big((y(x))^2 + y(x)y'(x) + (y'(x))^2 \Big)\, \mathrm{d}x$$

na množině $\big\{ y \in C^1(\langle 0,1\rangle) :\ y(0) = 1,\ y(1) = 1 \big\}$.

Výsledky:
Eulerova-Lagrangeova rovnice má tvar $\big(y + 2y'\big)' = 2y + y'$, což po úpravě dá $y'' = y$. Obecné řešení této rovnice je $y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$. Přihlédneme-li k okrajovým podmínkám, obdržíme (po úpravě) podezřelou funkci $y_0 = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x}}{\mathrm{e}+1}$. Následná analýza pak ukáže, že v bodě y_0 nastává globální minimum.

2. Najděte globální extrémy funkcionálu $J:\ C^1(\langle -1,1\rangle) \to \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$J(y) = \int_{-1}^1 \Big((y(x) - (y'(x))^2 \Big)\, \mathrm{d}x$$

na množině $\big\{ y \in C^1(\langle -1,1\rangle) :\ y(-1) = -1,\ y(1) = 1 \big\}$.

Výsledky:
Eulerova-Lagrangeova rovnice má tvar $\big(-2y'\big)' = 1$, což po úpravě dá $y'' = -\frac{1}{2}$. Obecné řešení této rovnice je $y = -\frac{1}{4}x^2 + c_1 x + c_2$. Přihlédneme-li k okrajovým podmínkám, obdržíme podezřelou funkci $y_0 = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$. Následná analýza pak ukáže, že v bodě y_0 nastává globální maximum.