8. přednáška (integrály a jejich aplikace)

Úvod

Základním příkazem pro výpočet integrálů je příkaz int.

```
> restart;
> int(x^2,x);
```

$$\frac{x^3}{3}$$

```
> Int(x^2,x);
```

$$\int x^2\,dx$$

```
> Int(x^2,x=0..1)=int(x^2,x=0..1);
```

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

```
>
```

Užitečný je i balík IntegrationTools, pomocí kterého můžeme integrál substituovat, provádět per-partes, apod.

```
> restart;
> with(IntegrationTools);
```

[*Change*, *CollapseNested*, *Combine*, *Expand*, *ExpandMultiple*, *Flip*, *GetIntegrand*, *GetOptions*, *GetParts*, *GetRange*, *GetVariable*, *Parts*, *Split*, *StripOptions*]

Substituce:

```
> i:=Int(cos(x)^3*sin(x)^2,x=0..Pi/2);
```

$$i:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^3\sin(x)^2\,dx$$

```
> i_subst:=Change(i,sin(x)=t);
```

$$i\_subst:=-\int_0^1(-1+t^2)\,t^2\,dt$$

```
> value(i_subst);
```

$$\frac{2}{15}$$

```
> value(i);
```

$$\frac{2}{15}$$

>

Per-partes:

```
> i:=Int(x^3*ln(x),x);
```

$$i := \int x^3 \ln(x)\,dx$$

```
> i_per_partes:=Parts(i,ln(x));
```

$$i\_per\_partes := \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \int \frac{x^3}{4}\,dx$$

```
> value(i_per_partes);
```

$$\frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{x^4}{16}$$

```
> diff(%,x);
```

$$x^3 \ln(x)$$

>

Další možnosti:

```
> i:=Int(x^2,x=3..8);
```

$$i := \int_3^8 x^2\,dx$$

Integrovaná funkce:

```
> GetIntegrand(i);
```

$$x^2$$

Proměnná v integrálu:

```
> GetVariable(i);
```

$$x$$

Meze integrálu:

```
> GetRange(i);
```

$$3 .. 8$$

```
> op(1,GetRange(i));
```

$$3$$

```
> op(2,GetRange(i));
```

$$8$$

```
>
```

Jednorozměrný integrál

Obsah plochy pod křivkou (mezi křivkami)

Příklad:

Je dána parabola $p(x) = x^2 - 3\,x + 5$. Sestrojíme tečny k parabole v bodech [-1,?] a [3,?]. Vypočtěte obsah plochy ohraničené parabolou p a těmito tečnami.

```
> restart;
> p:=x->x^2-3*x+5;
```

$$p := x \to x^2 - 3\,x + 5$$

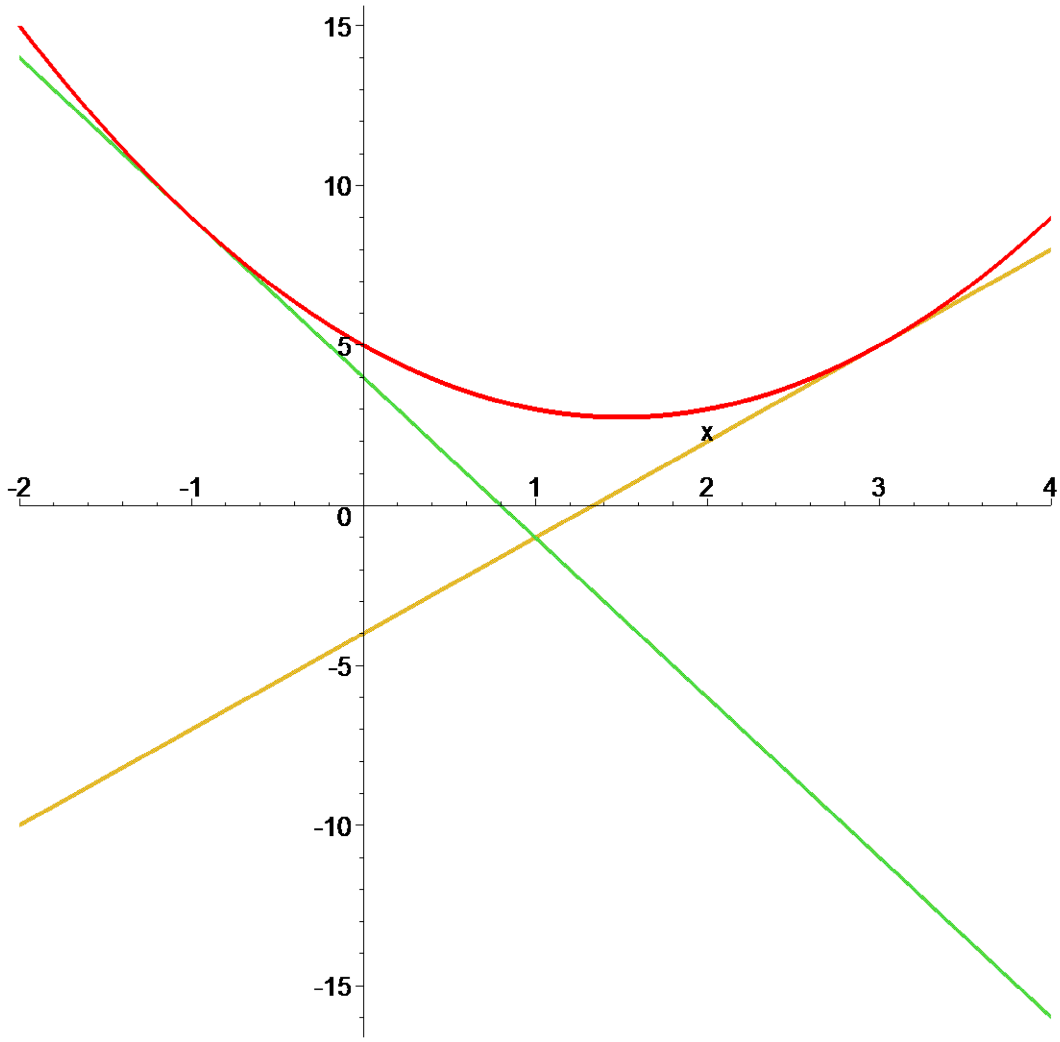
```
> t1:=p(-1)+D(p)(-1)*(x+1);
```

$$t1 := 4 - 5\,x$$

```
> t2:=p(3)+D(p)(3)*(x-3);
```

$$t2 := -4 + 3\,x$$

```
> plot([p(x),t1,t2],x=-2..4,thickness=5);
```




```
> prusecik:=solve(t1=t2,x);
```

$$prusecik := 1$$

```
> obsah1:=int(p(x)-t1,x=-1..prusecik);
```

$$obsah1 := \frac{8}{3}$$

```
> obsah2:=int(p(x)-t2,x=prusecik..3);
```

$$obsah2 := \frac{8}{3}$$

```
> obsah:=obsah1+obsah2;
```

$$obsah := \frac{16}{3}$$

Hledaný obsah je $\frac{16}{3}$.

```
>
```

Délka křivky

Příklad:

Vypočtěte délku křivku $f(x) = \ln(x)$, kde x probíhá interval $<a, b>$ $(0 < a < b)$. Poté vypočtěte délku pro $a = 1$ a $b = \mathbf{e}$.

Vzorec pro délku křivky (explicitně zadané) má tvar $delka = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2}\, dx$.

```
> restart;
> f:=x->ln(x);
```

$$f := x \rightarrow \ln(x)$$

```
> int(sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x=a..b);
Warning, unable to determine if 0 is between a and b; try to use
assumptions or use the AllSolutions option
```

$$\int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

Maple potřebuje dodatečné informace o parametrech a a b. Použijeme příkaz assume.

```
> assume(0<a,a<b);
> int(sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x=a..b);
```

$$-\sqrt{a\sim^2 + 1} + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{a\sim^2 + 1}}\right) + \sqrt{b\sim^2 + 1} - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{b\sim^2 + 1}}\right)$$

```
>
```

Co je arctanh?

```
> convert(%,ln);
```

$$-\sqrt{a\sim^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{a\sim^2 + 1}} + 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 + 1}}\right) + \sqrt{b\sim^2 + 1}$$
$$- \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{b\sim^2 + 1}} + 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{b\sim^2 + 1}}\right)$$

```
> vysledek:=unapply(%,a,b);
```

$$vysledek := (a\sim, b\sim) \rightarrow -\sqrt{a\sim^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{a\sim^2 + 1}} + 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 + 1}}\right)$$
$$+ \sqrt{b\sim^2 + 1} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{b\sim^2 + 1}} + 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{b\sim^2 + 1}}\right)$$

```
> vysledek(1,exp(1));
```

$$-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{(\mathbf{e})^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{e})^2+1}}+1\right)$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{e})^2+1}}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$2.003497111$$

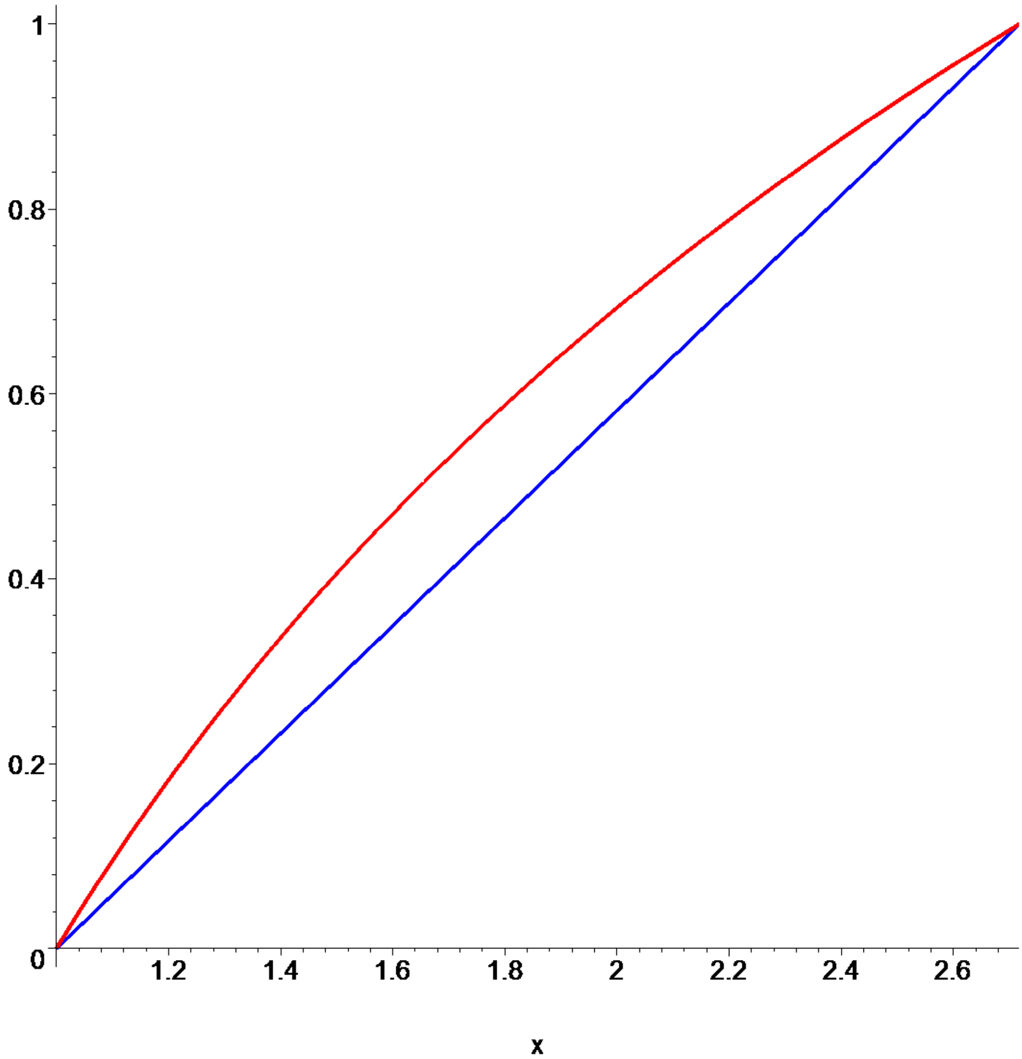
```
> sqrt(1+(exp(1)-1)^2);
```

$$\sqrt{1+(\mathbf{e}-1)^2}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.988087634$$

```
> plot([ln(x),1/(exp(1)-1)*(x-1)],x=1..exp(1),thickness=5,co
lor=[red,blue]);
```



Délka (červené) křivky je 2.003497111 a délka (modré) úsečky je 1.988087634.

```
>
```

Objem rotačního tělesa

Příklad:

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblouku sinusoidy $f(x) = \sin(x)$ (x probíhá interval $<0, \pi>$) kolem osy x.

Připomeňme, že vzorec pro objem rotačního tělesa má tvar $objem = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

```
> objem:=Pi*int(sin(x)^2,x=0..Pi);
```

$$objem := \frac{\pi^2}{2}$$

```
>
```

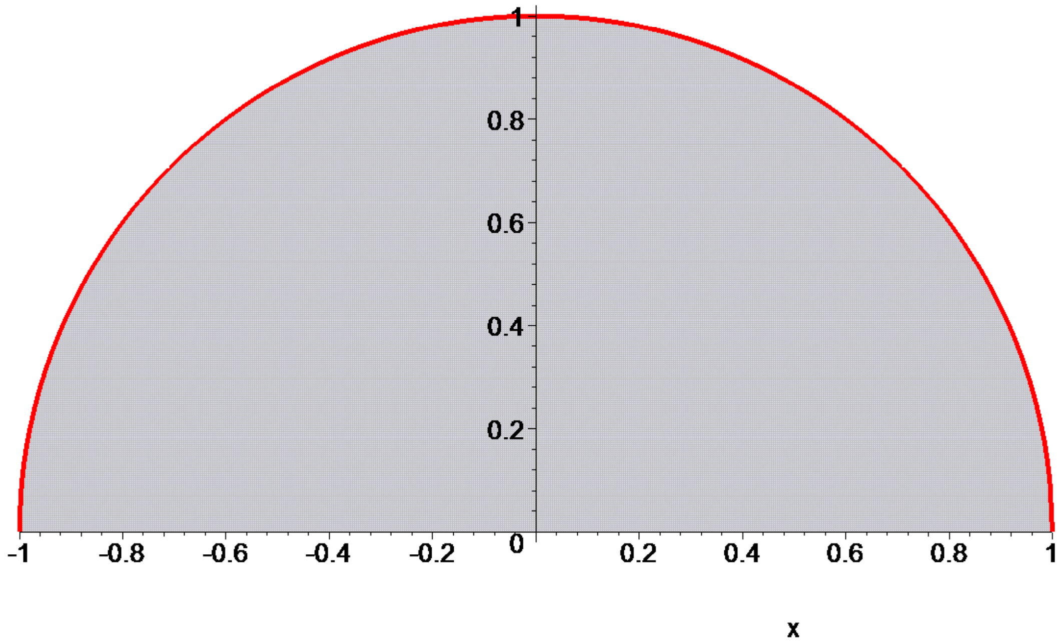
Příklad:

Odvoďte vzorce pro objem následujících těles:
- koule s poloměrem r
- kulová úseč s poloměrem r a výškou v
- rotační komolý kužel s výškou v a s poloměry podstav r_1 a r_2.

Je jasné, že koule i kulová úseč vzniknou rotací jistých částí kružnice kolem osy x. Komolý kužel vznikne rotací úsečky kolem osy x.

Koule:

```
> restart;
> with(plots):
> p1:=plot(sqrt(1-x^2),x=-1..1,filled=true,scaling=constrained,color=grey):
> p2:=plot(sqrt(1-x^2),x=-1..1,scaling=constrained,color=red,thickness=5):
> display([p1,p2]);
```




```
> rovnice:=sqrt(r^2-x^2);
```

$$rovnice := \sqrt{r^2 - x^2}$$

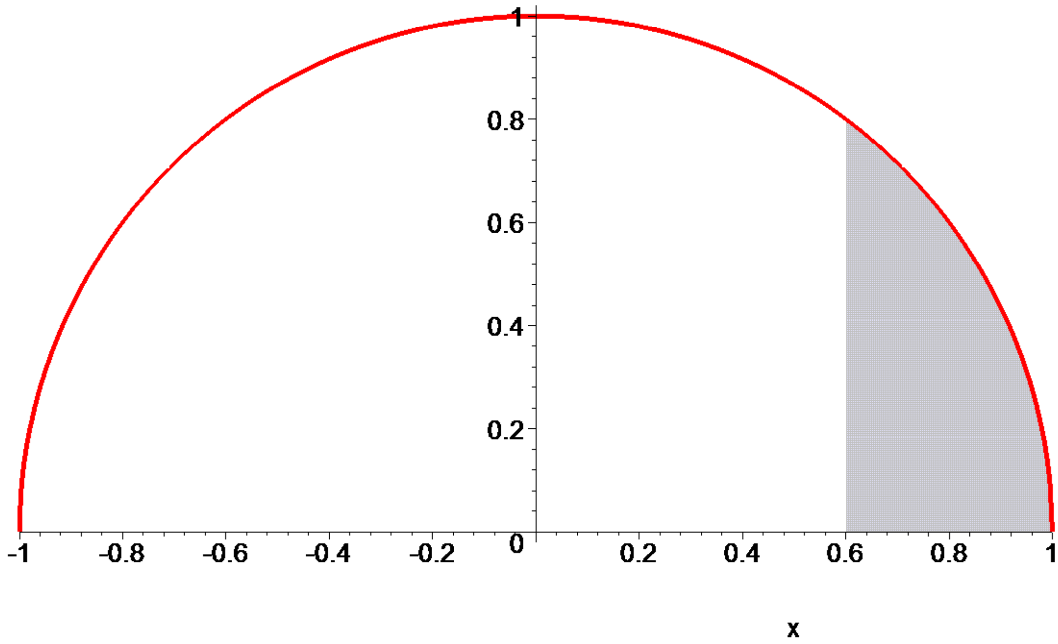
```
> objem:=Pi*int(rovnice^2,x=-r..r);
```

$$objem := \frac{4\,\pi\,r^3}{3}$$

```
>
```

Kulová úseč:

```
> p1:=plot(sqrt(1-x^2),x=0.6..1,filled=true,scaling=constrai
  ned,color=grey):
> p2:=plot(sqrt(1-x^2),x=-1..1,scaling=constrained,color=red
  ,thickness=5):
> display([p1,p2]);
```




```
> rovnice;
```

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

```
> objem:=Pi*int(rovnice^2,x=r-v..r);
```

$$objem := \pi \left(r^2 v - \frac{r^3}{3} + \frac{(r-v)^3}{3} \right)$$

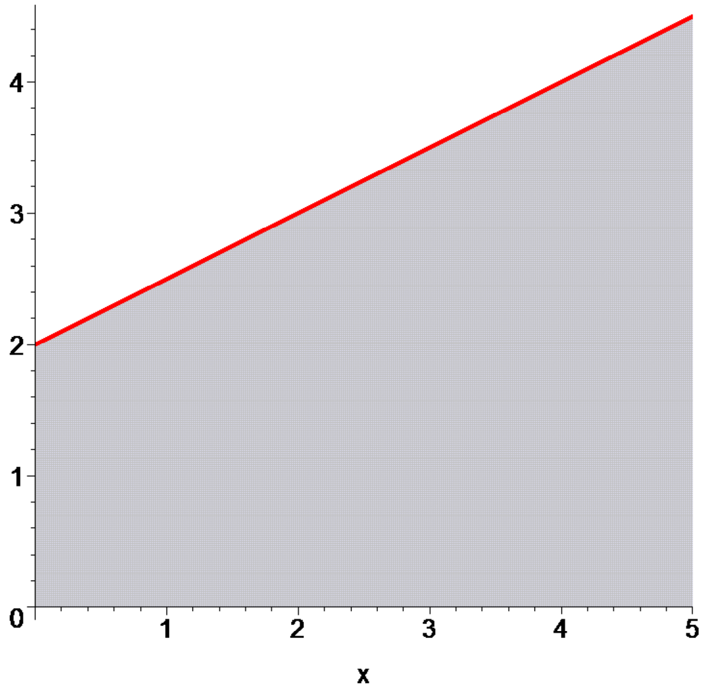
```
> objem:=simplify(objem);
```

$$objem := \frac{\pi v^2 (3 r - v)}{3}$$

```
>
```

Komolý kužel:

```
> p1:=plot(2+x/2,x=0..5,filled=true,scaling=constrained,colo
  r=grey):
> p2:=plot(2+x/2,x=0..5,scaling=constrained,color=red,thickn
  ess=5):
> display([p2,p1]);
```




```
> rovnice:=r[2]+(r[1]-r[2])/v*x;
```

$$rovnice := r_2 + \frac{(r_1 - r_2)\,x}{v}$$

```
> objem:=Pi*int(rovnice^2,x=0..v);
```

$$objem := \pi \left(\frac{1}{3} \frac{r_1^{\,3}\, v}{r_1 - r_2} - \frac{1}{3} \frac{r_2^{\,3}\, v}{r_1 - r_2} \right)$$

```
> objem:=simplify(objem);
```

$$objem := \frac{1}{3} \pi \,(r_1^{\,2} + r_2\, r_1 + r_2^{\,2})\, v$$

```
>
```

Klasický kužel:

```
> r[2]:=0;
```

$$r_2 := 0$$

```
> r[1]:=r;
```

$$r_1 := r$$

```
> objem;
```

$$\frac{\pi\, r^2\, v}{3}$$

```
>
```

Obsah pláště rotačního tělesa

Příklad:

Vypočtěte obsah pláště tělesa, které vznikne rotací křivky $f(x) = x^2$ na intervalu <0, 1> kolem osy x.

Obecný vzorec pro obsah pláště rotačního tělesa má tvar

$$obsah\_plaste = 2\,\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx.$$

```
> restart;
> f:=x->x^2;
```

$$f := x \to x^2$$

```
> obsah_plaste:=2*Pi*int(f(x)*sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x=0..1)
;
```

$$obsah\_plaste := 2\,\pi\left(-\frac{1}{32}\ln(2)+\frac{9\sqrt{5}}{32}-\frac{1}{64}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\right)$$

```
> obsah_plaste:=simplify(%);
```

$$obsah\_plaste := \frac{1}{32}\pi\,(18\sqrt{5}-\ln(\sqrt{5}+2))$$

```
> evalf(%);
```

$$3.809729706$$

```
>
```

Příklad:

Odvoďte vzorec pro povrch koule s poloměrem r.

Je jasné, že koule vznikne rotací půlkružnice kolem osy x.

```
> f:=x->sqrt(r^2-x^2);
```

$$f := x \to \sqrt{r^2-x^2}$$

```
> obsah_plaste:=2*Pi*int(f(x)*sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x=-r..r
);
```

$$obsah\_plaste := 2\,\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

Maple potřebuje vědět více informací o parametru r.

```
> assume(r>0);
> obsah_plaste;
```

$$4\,\pi\,r\sim^2$$

>

Bonus

Příklad:

Jednoho dne před polednem začal padat (s konstantní intenzitou) sníh. V poledne vyjel na silnici pluh s konstantním výkonem (za jednotku času je schopen odklidit dané množství sněhu - čím je vrstva sněhu větší, tím pluh jede pomaleji). Za první hodinu (od 12:00 do 13:00) pluh dokázal ujet (a odklidit) 40 km cesty a za druhou hodinu (od 13:00 do 14:00) už jenom 20 km.

Určete, v kolik hodin (hodiny : minuty : sekundy) začal padat sníh.

Řešení:

Časem 0 označme okamžik, kdy začal padat sníh a časem t_0 okamžik vyjetí pluhu (12:00). Ze zadání je patrné, že rychlost pluhu v čase t $(t_0 \le t)$ je dána funkcí $v(t) = \frac{k}{t}$, kde k je konstanta související s výkonem pluhu. Vzdálenost, kterou pluh urazí mezi 12:00 a 13:00, lze vyjádřit integrálem $\int_{t_0}^{t_0+1} \frac{k}{t}\,dt$ a vzdálenost, kterou pluh urazí mezi 13:00 a 14:00, lze spočítat jako $\int_{t_0+1}^{t_0+2} \frac{k}{t}\,dt$.

```
> restart;
> int(k/t,t=t[0]..t[0]+1);
```

$$\begin{cases} undefined & And(-1 < t_0, t_0 < 0) \\ -\ln(t_0)\,k + \ln(t_0+1)\,k & otherwise \end{cases}$$

```
> assume(t[0]>0);
> s1:=int(k/t,t=t[0]..t[0]+1);
```

$$s1 := -\ln(t\sim_0)\,k + \ln(t\sim_0+1)\,k$$

```
> s2:=int(k/t,t=t[0]+1..t[0]+2);
```

$$s2 := -\ln(t\sim_0+1)\,k + k\,\ln(t\sim_0+2)$$

```
> solve({s1=40,s2=20},{k,t[0]});
Warning, solve may be ignoring assumptions on the input variables.
```

$$\left\{k = \frac{40}{\ln\left(\frac{-1+e^{\mathrm{RootOf}\left(2\_Z-\ln\left(\frac{(-1+e^{\_Z})^3}{-2+e^{\_Z}}\right)\right)}}{-2+e^{\mathrm{RootOf}\left(2\_Z-\ln\left(\frac{(-1+e^{\_Z})^3}{-2+e^{\_Z}}\right)\right)}}\right)},\ t\sim_0 = -2+e^{\mathrm{RootOf}\left(2\_Z-\ln\left(\frac{(-1+e^{\_Z})^3}{-2+e^{\_Z}}\right)\right)}\right\}$$

```
> vysledek:=rhs(%[2]);
```

$$vysledek := -2+e^{\mathrm{RootOf}\left(2\_Z-\ln\left(\frac{(-1+e^{\_Z})^3}{-2+e^{\_Z}}\right)\right)}$$

```
> allvalues(vysledek);
```

$$-2+e^{\left(\ln\left(3/2-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+2\,I\,\pi\,\_Z1\sim\right)},\ -2+e^{\left(\ln\left(3/2+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+2\,I\,\pi\,\_Z1\sim\right)}$$

```
> map(evalc,{%});
```

$$\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Vzhledem k tomu, že $t_0 > 0$, platí $t_0 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Zamyslete se, jak by šlo t_0 vypočítat pouze s tužkou a papírem.

```
> t[0]:=-1/2+sqrt(5)/2;
```

$$t_0 := -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Jak dlouho před polednem tedy začal padat sníh?

```
> hodiny:=floor(t[0]);
```

$$hodiny := 0$$

```
> minuty:=floor((t[0]-hodiny)*60);
```

$$minuty := 37$$

```
> sekundy:=evalf(((t[0]-hodiny)*60-minuty)*60);
```

$$sekundy := 4.922359$$

Sníh tedy začal padat 37 minut 5 sekund před polednem, tzn. v 11:22:55.

```
>
```

Dvojný integrál

```
> restart;
> Int(x+y,x=0..1,y=0..2);
```

$$\int_0^2 \int_0^1 x + y \, dx \, dy$$

```
> int(x+y,x=0..1,y=0..2);
```

$$3$$

```
> Int(x^2+x*y,y=0..x,x=0..1)=int(x^2+x*y,y=0..x,x=0..1);
```

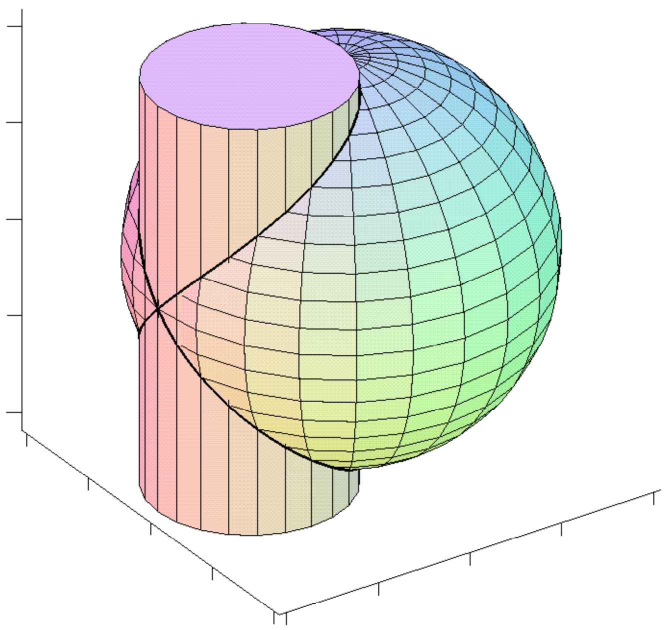
$$\int_0^1 \int_0^x x^2 + x\,y \, dy \, dx = \frac{3}{8}$$

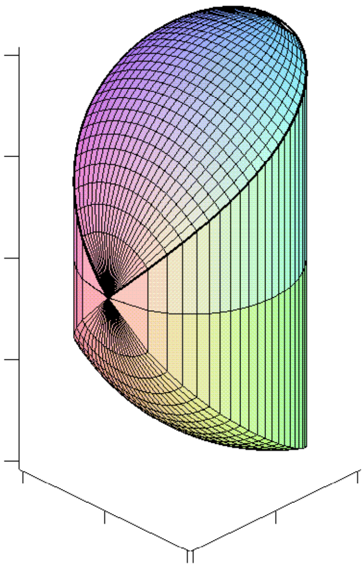
```
>
```

Objem tělesa pod grafem (nezáporné) funkce dvou proměnných

Příklad:

Pro libovolné $0 < a$ vypočtěte objem tzv. Vivianiova tělesa T_a. Těleso T_a je průnikem koule o poloměru a a rotačního válce majícího průměr a, přičemž plášť válce prochází středem koule.





```
> restart;
> assume(a>0);
> objem:=2*Int(sqrt(a^2-x^2-y^2),y=-sqrt(a^2/4-(x-a/2)^2)..sqrt(a^2/4-(x-a/2)^2),x=0..a);
```

$$objem := 2\int_{0}^{a\sim}\int_{-\sqrt{-x^2+x\,a\sim}}^{\sqrt{-x^2+x\,a\sim}} \sqrt{a\sim^2-x^2-y^2}\;dy\,dx$$

```
> value(objem);
Warning, computation interrupted
```

Maple si s integrálem neporadil, proto ho převedeme do polárních souřadnicích $x = r\cos(t),\ \ y = r\sin(t)$.

```
> with(IntegrationTools):
> objem_pol:=Change(objem,{x=r*cos(t),y=r*sin(t)});
Warning, computation of new ranges [_l[r](t) .. _u[r](t), _alpha, _beta] not implemented
```

$$objem\_pol := 2\int_{\_\alpha}^{\_\beta}\int_{\_l_r(t)}^{\_u_r(t)} \sqrt{a\sim^2-r^2\cos(t)^2-r^2\sin(t)^2}\;\left|\cos(t)^2\,r+r\sin(t)^2\right|\,dr\,dt$$

Vidíme, že Maple integrál transformoval, ale neumí převést meze dvojného integrálu do polárních souřadnic. Udělejme to proto za něj sami.

```
> integrand:=simplify(GetIntegrand(objem_pol));
```

$$integrand := \sqrt{a\sim^2 - r^2}\,|r|$$

```
> objem_pol:=2*Int(integrand,r=0..a*cos(t),t=-Pi/2..Pi/2);
```

$$objem\_pol := 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a\sim\cos(t)} \sqrt{a\sim^2 - r^2}\,|r|\,dr\,dt$$

```
> value(objem_pol);
```

$$\frac{2}{3}a\sim^3\pi - \frac{8}{9}a\sim^3$$

Pokud nám vadí vlnky, odstraníme je např. takto:

```
> subs(a='a',%);
```

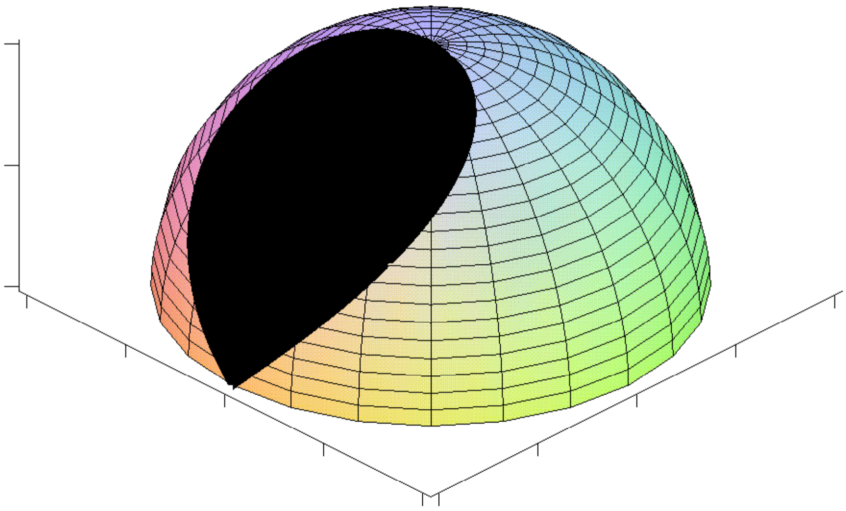
$$\frac{2}{3}a^3\pi - \frac{8}{9}a^3$$

```
>
```

Obsah plochy v prostoru

Příklad:

Pro libovolné $0 < a$ vypočtěte obsah plochy popsané podmínkami $0 \le z$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \le a\,x$.



```
> restart;
> assume(a>0);
> f:=sqrt(a^2-x^2-y^2);
```

$$f := \sqrt{a\sim^2 - x^2 - y^2}$$

```
> obsah:=Int(sqrt(1+diff(f,x)^2+diff(f,y)^2),y=-sqrt(a^2/4-(
x-a/2)^2)..sqrt(a^2/4-(x-a/2)^2),x=0..a);
```

$$obsah := \int_0^{a\sim} \int_{-\sqrt{-x^2 + a\sim x}}^{\sqrt{-x^2 + a\sim x}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a\sim^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a\sim^2 - x^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

```
> value(obsah);
Warning, computation interrupted
```

Převedeme raději do polárních souřadnic:

```
> with(IntegrationTools):
> Change(obsah,{x=r*cos(t),y=r*sin(t)});
Warning, computation of new ranges [_l[r](t) .. _u[r](t), _alpha, _beta]
not implemented
```

$$\int_{\_\alpha}^{\_\beta}\int_{\_l_r(t)}^{\_u_r(t)} a{\sim}\sqrt{-\frac{1}{-a{\sim}^2+r^2\cos(t)^2+r^2\sin(t)^2}}\left|\cos(t)^2 r+r\sin(t)^2\right| dr\, dt$$

```
> integrand:=simplify(GetIntegrand(%));
```

$$integrand := a{\sim}\sqrt{\frac{1}{a{\sim}^2-r^2}}\,|r|$$

```
> obsah_pol:=Int(integrand,r=0..a*cos(t),t=-Pi/2..Pi/2);
```

$$obsah\_pol := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a{\sim}\cos(t)} a{\sim}\sqrt{\frac{1}{a{\sim}^2-r^2}}\,|r|\, dr\, dt$$

```
> value(obsah_pol);
```

$$a{\sim}\,(a{\sim}\,\pi-2\,a{\sim})$$

```
> obsah_pol:=factor(%);
```

$$obsah\_pol := a{\sim}^2\,(\pi-2)$$

```
> subs(a='a',obsah_pol);
```

$$a^2\,(\pi-2)$$

```
>
```

Souřadnice těžiště tenké desky

Příkad:

Najděte souřadnice těžiště homogenní tenké desky půlkruhového tvaru $\{x^2+y^2\le r^2,\ 0\le y\}$ (s poloměrem $0<r$).

x-ová souřadnice těžiště:

```
> restart;
> xt:=Int(x,y=0..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r)/Int(1,y=0..sqrt(r^2-
  x^2),x=-r..r);
```

$$xt := \frac{\int_{-r}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} x \, dy \, dx}{\int_{-r}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dy \, dx}$$

```
> value(xt);
```

$$0$$

To, že je x-ová souřadnice těžiště nulová, nás jistě příliš nepřekvapí.

y-ová souřadnice těžiště:

```
> yt:=Int(y,y=0..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r)/Int(1,y=0..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r);
```

$$yt := \frac{\int_{-r}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} y \, dy \, dx}{\int_{-r}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dy \, dx}$$

```
> value(yt);
```

$$\frac{4}{3} \frac{r}{\mathrm{csgn}(r)\,\pi}$$

```
> assume(r>0);
> value(yt);
```

$$\frac{4\,r\sim}{3\,\pi}$$

```
> subs(r='r',%);
```

$$\frac{4\,r}{3\,\pi}$$

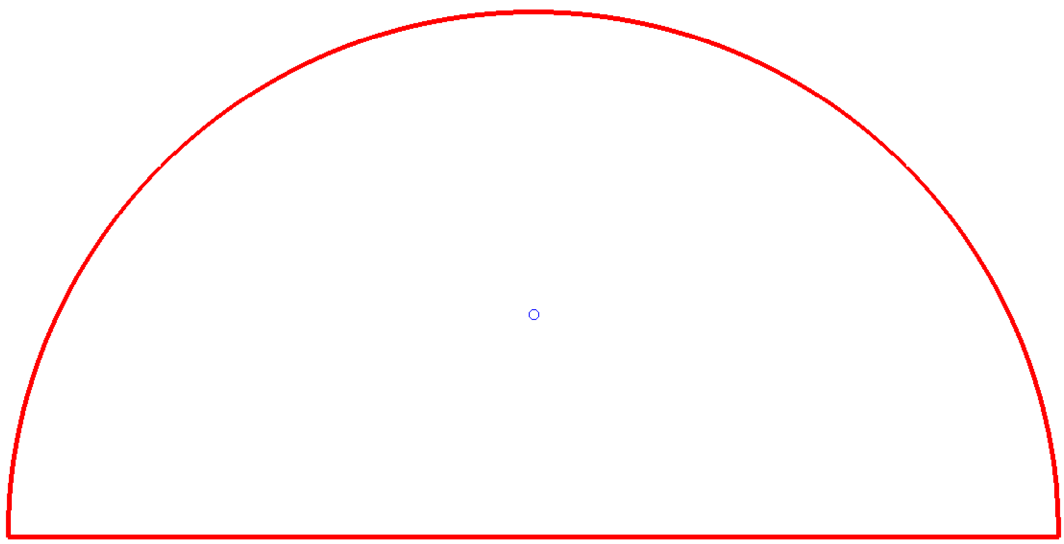
Těžiště homogenního půlkruhu s poloměrem r se tedy nachází v bodě $\left[0, \frac{4\,r}{3\,\pi}\right]$.

```
>
```

Obrázek pro $r = 1$:

```
> with(plots):
> p1:=plot([0,sqrt(1-x^2)],x=-1..1,thickness=5,color=[red,red]):
> p2:=pointplot([0,4/(3*Pi)],symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=blue):
```

```
> display([p1,p2],scaling=constrained,axes=none);
```



```
>
```

Trojný integrál

```
> restart;
> i:=Int(x*y^2*z,z=1..2,y=1..3,x=0..2);
```

$$i := \int_0^2 \int_1^3 \int_1^2 x\, y^2\, z \, dz\, dy\, dx$$

```
> value(i);
```

$$26$$

```
>
```

Objem tělesa

Objem tělesa T v prostoru je trojný integrál z jedničky přes množinu T.

Souřadnice těžiště tělesa

Příklad:

Pro $0 < r$ vypočtěte souřadnice těžiště homogenní polokoule $\{x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ 0 \le z\}$ (s poloměrem r).

x-ová souřadnice:

```
> restart;
> xt:=Int(x,z=0..sqrt(r^2-x^2-y^2),y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r)/Int(1,z=0..sqrt(r^2-x^2-y^2),y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r);
```

$$xt := \frac{\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx}{\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx}$$

```
> value(xt);
```

$$0$$

y-ová souřadnice:

```
> yt:=Int(y,z=0..sqrt(r^2-x^2-y^2),y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r)/Int(1,z=0..sqrt(r^2-x^2-y^2),y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r);
```

$$yt := \frac{\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} y\,dz\,dy\,dx}{\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx}$$

```
> value(yt);
```

$$0$$

z-ová souřadnice:

```
> zt:=Int(z,z=0..sqrt(r^2-x^2-y^2),y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r)/Int(1,z=0..sqrt(r^2-x^2-y^2),y=-sqrt(r^2-x^2)..sqrt(r^2-x^2),x=-r..r);
```

$$zt := \frac{\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} z\,dz\,dy\,dx}{\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx}$$

```
> value(zt);
```

$$\frac{3}{8}\,\mathrm{csgn}(r)\,r$$

```
> assume(r>0);
> value(zt);
```

$$\frac{3\,r\sim}{8}$$

```
> subs(r='r',%);
```

$$\frac{3\,r}{8}$$

Souřadnice těžiště homogenní polokoule s poloměrem r je tedy $\left[0, 0, \frac{3\,r}{8}\right]$.

```
>
```

Křivkový integrál

Křivkový integrál 1. druhu

Pro výpočet křivkového integrálu 1. druhu slouží příkaz PathInt z balíku VectorCalculus.

```
> restart;
> with(VectorCalculus);
```

[&x, *, +, -, ., <,>, <|>, *About*, *AddCoordinates*, *ArcLength*, *BasisFormat*, *Binormal*, *Compatibility*, *ConvertVector*, *CrossProd*, *CrossProduct*, *Curl*, *Curvature*, D, *Del*, *DirectionalDiff*, *Divergence*, *DotProd*, *DotProduct*, *Flux*, *GetCoordinateParameters*, *GetCoordinates*, *GetNames*, *GetPVDescription*, *GetRootPoint*, *GetSpace*, *Gradient*, *Hessian*, *IsPositionVector*, *IsRootedVector*, *IsVectorField*, *Jacobian*, *Laplacian*, *LineInt*, *MapToBasis*, *Nabla*, *Norm*, *Normalize*, *PathInt*, *PlotPositionVector*, *PlotVector*, *PositionVector*, *PrincipalNormal*, *RadiusOfCurvature*, *RootedVector*, *ScalarPotential*, *SetCoordinateParameters*, *SetCoordinates*, *SpaceCurve*, *SurfaceInt*, *TNBFrame*, *Tangent*, *TangentLine*, *TangentPlane*, *TangentVector*, *Torsion*, *Vector*, *VectorField*, *VectorPotential*, *VectorSpace*, *Wronskian*, *diff*, *eval*, *evalVF*, *int*, *limit*, *series*]

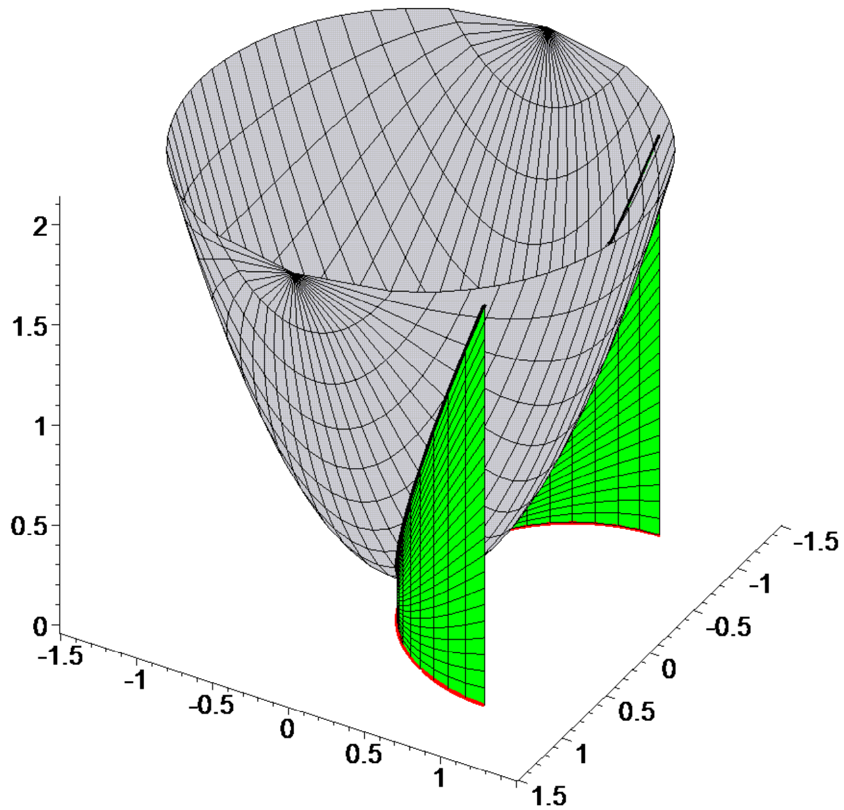
```
> PathInt(f(x,y),[x,y]=Path(<u(t),v(t)>,t=a..b));
```

$$\int_a^b f(u(t), v(t)) \sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}\, dt$$

```
>
```

Geometrická interpretace:

Křivkový integrál 1. druhu nezáporné funkce dvou proměnných (šedá plocha) podél červené křivky je roven obsahu zelené plochy (viz obrázek).



Poznámka:

Křivkový integrál 1. druhu z jedničky odpovídá délce křivky, podél které integrujeme.

```
>
```

Příklad:

Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu z funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ po křivce $x = \cos(2t)$, $y = \sin(2t)$, kde t probíhá interval $<0, 2\pi>$.

```
> PathInt(x^2+y^2,[x,y]=Path(<cos(2*t),sin(2*t)>,t=0..2*Pi))
;
```

$$4\pi$$

```
> PathInt(x^2+y^2,[x,y]=Path(<cos(2*t),sin(2*t)>,t=0..2*Pi),
inert);
```

$$\int_0^{2\pi} 2\left(\sin(2t)^2 + \cos(2t)^2\right)^{(3/2)}\, dt$$

```
>
```

Příklad:

Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu z funkce $f(x, y) = x^3 y$ po křivce $x = t$, $y = 1 + t$, kde t probíhá interval $<-1, 3>$.

```
> PathInt(x^3*y,[x,y]=Path(<t,1+t>,t=-1..3));
```

$$\frac{344\sqrt{2}}{5}$$

```
>
```

Poznámka:

Integrovali jsme vlastně po úsečce s počátečním bodem $[-1, 0]$ a s koncovým bodem $[3, 4]$.
V Maplu tento integrál můžeme zapsat i takto:

```
> PathInt(x^3*y,[x,y]=Line(<-1,0>,<3,4>));
```

$$\frac{344\sqrt{2}}{5}$$

```
>
```

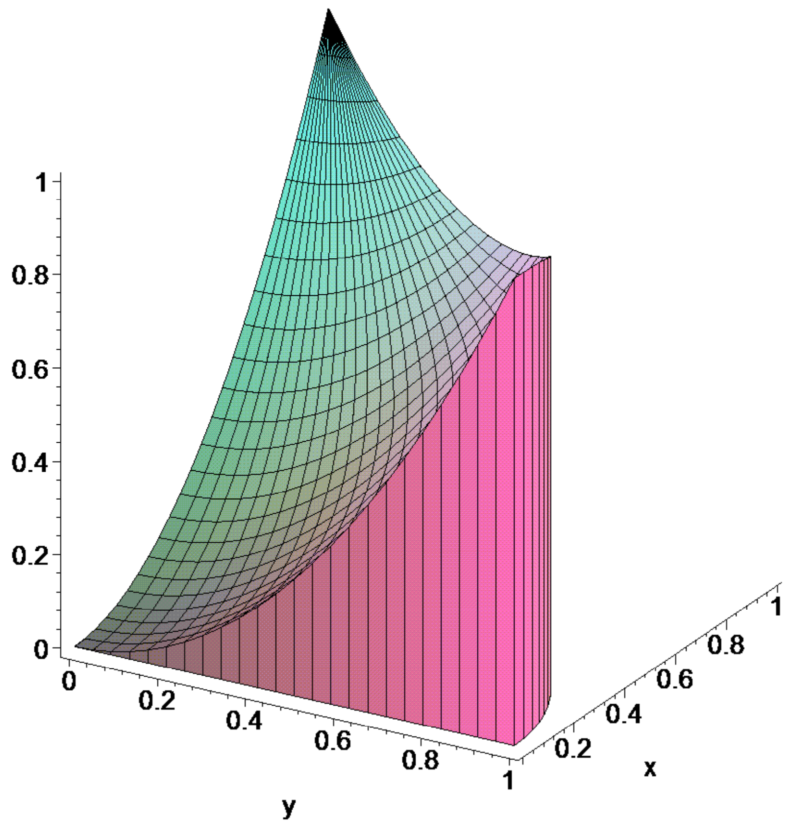
Příklad:

Vypočtěte povrch tělesa T, které je zadáno následujícími nerovnostmi:
$0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$, $y \le 1 - x^2$, $z \le x^2 + y^2$.

Znázornění tělesa:

```
> restart;
```

```
> plot3d(x^2+y^2,y=0..1-x^2,x=0..1,filled=true,axes=framed);
```




```
>
```

Obsah podstavy:

```
> s1:=Int(1-x^2,x=0..1);
```

$$s1 := \int_0^1 1 - x^2 \, dx$$

```
> s1:=value(s1);
```

$$s1 := \frac{2}{3}$$

```
>
```

Obsah "horní podstavy":

```
> f:=x^2+y^2;
```

$$f := x^2 + y^2$$

```
> s2:=Int(sqrt(1+diff(f,x)^2+diff(f,y)^2),y=0..1-x^2,x=0..1)
;
```

$$s2 := \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dy\, dx$$

```
> s2:=value(s2);
```

$$s2 := \int_0^1 \frac{\sqrt{5-4x^2+4x^4}}{2} - \frac{\sqrt{5-4x^2+4x^4}\, x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln(2-2x^2+\sqrt{5-4x^2+4x^4}) - \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + x^2\ln(2-2x^2+\sqrt{5-4x^2+4x^4}) - \frac{1}{2}\ln(1+4x^2)\, x^2\, dx$$

```
>
```

Maple to neumí spočítat, tak budeme muset počítat numericky.

```
> s2:=evalf(s2,20);
```

$$s2 := 1.0779397556109145603$$

Obsahy "bočních stěn" vyjádříme křivkovými integrály:

```
> with(VectorCalculus):
> b1:=PathInt(f,[x,y]=Path(<t,0>,t=0..1));
```

$$b1 := \frac{1}{3}$$

```
> b2:=PathInt(f,[x,y]=Path(<0,t>,t=0..1));
```

$$b2 := \frac{1}{3}$$

```
> b3:=PathInt(f,[x,y]=Path(<t,1-t^2>,t=0..1));
```

$$b3 := \frac{137}{256}\ln(2) + \frac{301\sqrt{5}}{768} + \frac{137}{512}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

```
> s1+s2+b1+b2+b3;
```

$$2.411273089 + \frac{137}{256}\ln(2) + \frac{301\sqrt{5}}{768} + \frac{137}{512}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$3.673933963$$

```
>
```

Křivkový integrál 2. druhu

Pro výpočet křivkového integrálu 2. druhu slouží příkaz LineInt z balíku VectorCalculus.

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x,y]);
```

$$cartesian_{x,\,y}$$

```
> LineInt(VectorField(<f(x,y),g(x,y)>),Path(<u(t),v(t)>,t=a..b));
```

$$\int_a^b \mathrm{f}(\mathrm{u}(t),\mathrm{v}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right)+\mathrm{g}(\mathrm{u}(t),\mathrm{v}(t))\left(\frac{d}{dt}\mathrm{v}(t)\right)dt$$

```
>
```

Příkad:

Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu vektorového pole $f(x,y)=(x^2+y^2, x^2-y^2)$ podél křivky $x=t,\ y=1-|1-t|$, kde t probíhá interval <0, 2>.

```
> LineInt(VectorField(<x^2+y^2,x^2-y^2>),Path(<t,1-abs(1-t)>,t=0..2));
```

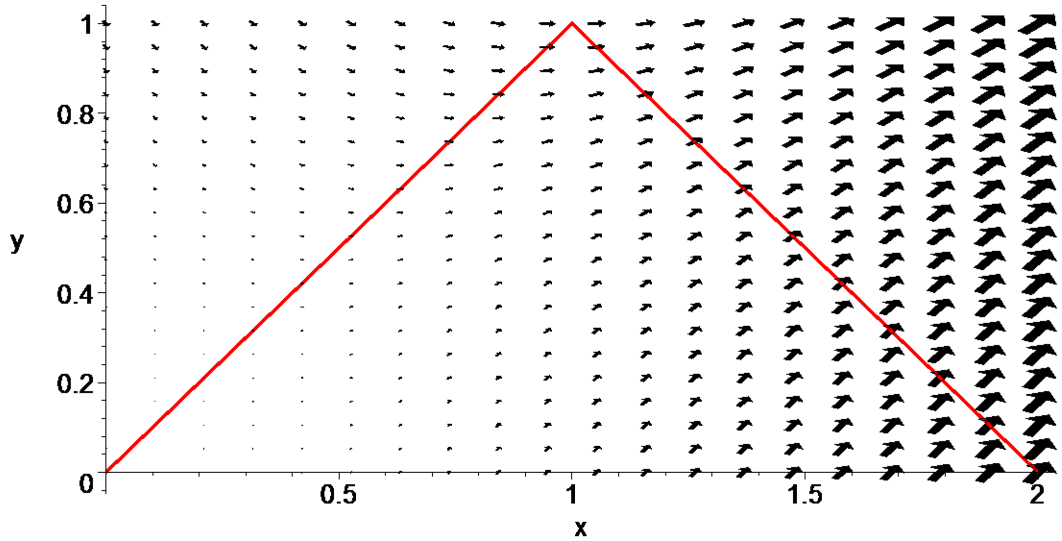
$$\frac{4}{3}$$

```
> LineInt(VectorField(<x^2+y^2,x^2-y^2>),Path(<t,1-abs(1-t)>,t=0..2),inert);
```

$$\int_0^2 t^2+(1-|t-1|)^2-(t^2-(1-|t-1|)^2)\,\mathrm{abs}(1,t-1)\,dt$$

Interpretace (práce vykonaná silovým polem):

```
> with(plots):
> p1:=fieldplot([x^2+y^2,x^2-y^2],x=0..2,y=0..1,arrows=LARGE,color=black):
> p2:=plot(1-abs(1-t),t=0..2,color=red,thickness=5):
> display([p1,p2]);
```




```
>
```

Příkad:

Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu vektorového pole $f(x, y) = (\mathbf{e}^x + y, x\, y^2)$ podél křivky $x = t^2$, $y = t$, kde t probíhá interval $<-\sqrt{3}, \sqrt{3}>$.

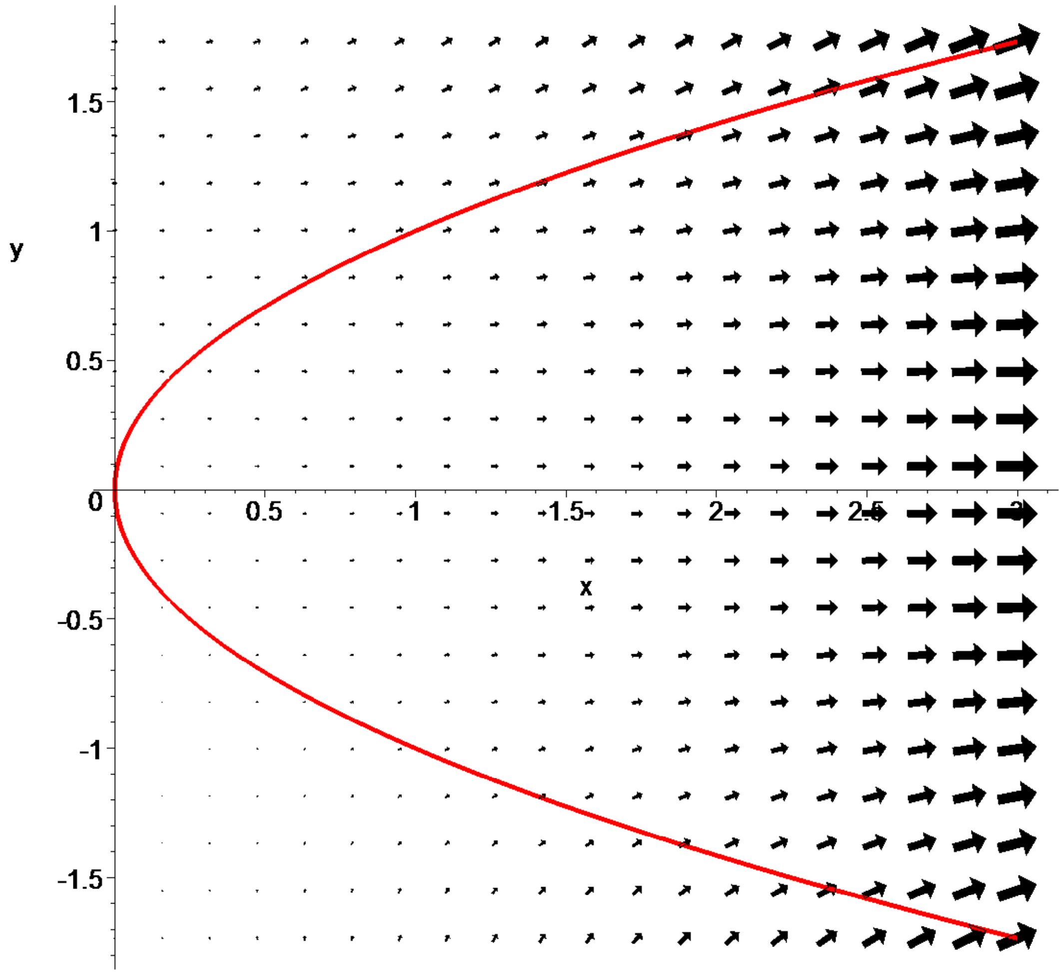
```
> LineInt(VectorField(<exp(x)+y,x*y^2>),Path(<t^2,t>,t=-sqrt(3)..sqrt(3)));
```

$$\frac{38\sqrt{3}}{5}$$

```
>
```

Grafické znázornění:

```
> p1:=fieldplot([exp(x)+y,x*y^2],x=0..3,y=-sqrt(3)..sqrt(3),arrows=LARGE,color=black):
> p2:=plot([t^2,t,t=-sqrt(3)..sqrt(3)],color=red,thickness=5):
> display([p1,p2]);
```



>

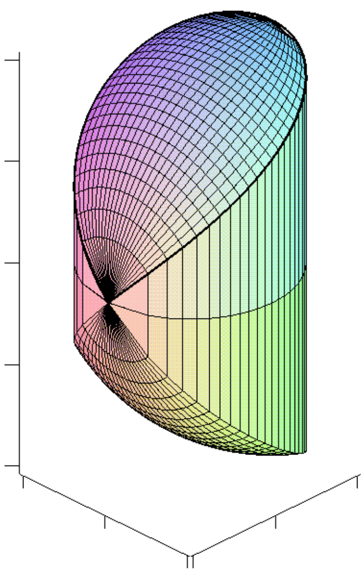
Cvičení

1) Odvoďte vzorec pro obsah elipsy s poloosami a a b.

2) Najděte souřadnice těžiště rovinného obrazce, který je určen nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 4$, $x^2 - 4\,y \le 4$, $0 \le x + 1$. Poté vytvořte obrázek tohoto obrazce, ve kterém bude znázorněno i vypočtené těžiště.

3) Odvoďte vzorec pro objem anuloidu (obecně).

4) Na přednášce jsme počítali objem Vivianiova tělesa.

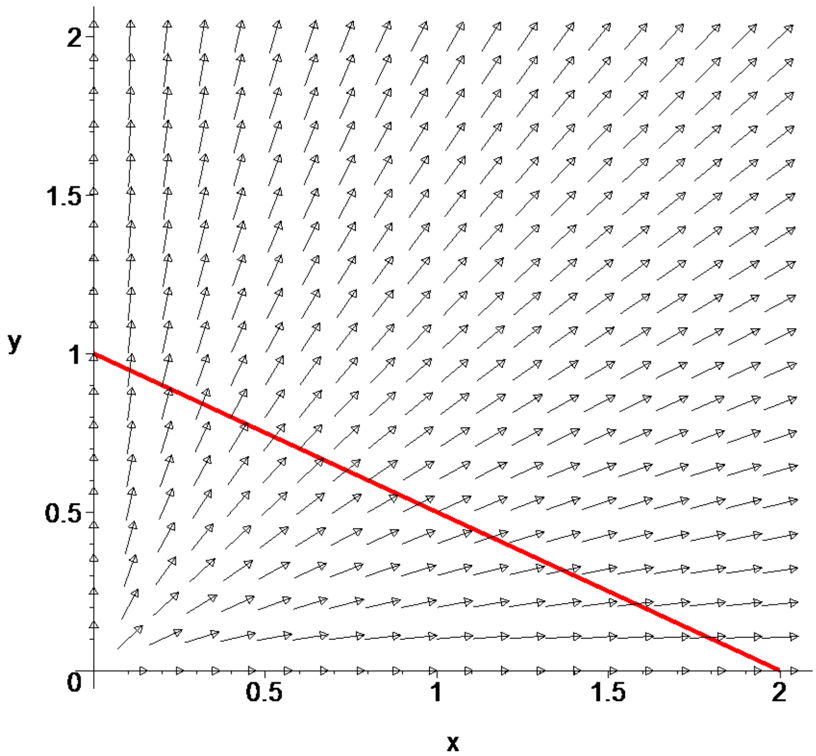


Vypočtěte nyní jeho povrch!

Nápověda: Použijte kombinaci toho, co bylo vypočteno na přednášce, a křivkového integrálu.

5) Je dáno vektorové pole $v(x, y) = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right]$.

Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu podél křivky $x = 2\,t$, $y = 1 - t$, kde t probíhá interval $<0, 1>$ (úsečka s počátečním bodem $[0, 1]$ a s koncovým bodem $[2, 0]$).



>