Lagrangeův interpolační polynom, Bézierovy křivky

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

Katedra
aplikované
matematiky

Matematická analýza s Maplem

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Polynomem* p *rozumíme funkci*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Polynomem* p *rozumíme funkci*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Je-li navíc $a_n \neq 0$, *říkáme, že* n *je stupeň polynomu* p.

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Polynomem p rozumíme funkci*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Je-li navíc $a_n \neq 0$, *říkáme, že n je stupeň polynomu p.*

Příklad

Polynom $p(x) = 0x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ *má stupeň* 2

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Polynomem* p *rozumíme funkci*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Je-li navíc $a_n \neq 0$, *říkáme, že* n *je stupeň polynomu* p.

Příklad

Polynom $p(x) = 0x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ *má stupeň* 2 *(tzn. je to kvadratická funkce).*

Úvodní příklady

Příklad

Najděte lineární polynom $p(x) = ax + b$, *jehož graf prochází body* $[1, 2]$ *a* $[7, 5]$.

Úvodní příklady

Příklad

Najděte lineární polynom $p(x) = ax + b$*, jehož graf prochází body* $[1, 2]$ *a* $[7, 5]$*.*

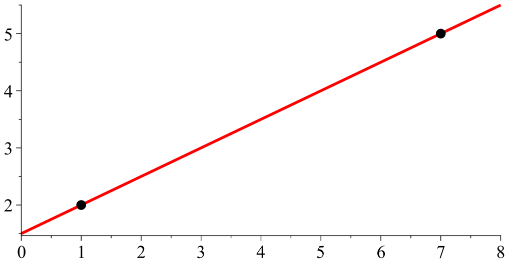
$$\left[p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right]$$

Úvodní příklady

Příklad

Najděte lineární polynom $p(x) = ax + b$, *jehož graf prochází body* $[1, 2]$ *a* $[7, 5]$.

$$\left[p(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\right]$$



Úvodní příklady

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

Úvodní příklady

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

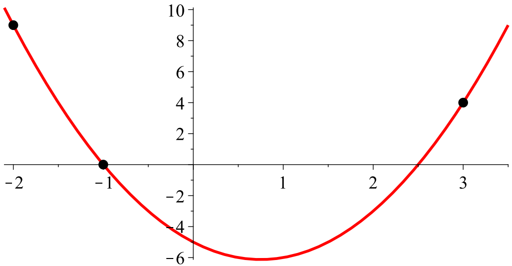
$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$

Úvodní příklady

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$



Zobecnění pro více bodů

Problém

Hledáme polynom stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$), jehož graf prochází body

$$\underbrace{[x_0, y_0],\ [x_1, y_1],\ [x_2, y_2],\ \ldots,\ [x_n, y_n]}_{n+1 \text{ bodů}},$$

přičemž předpokládejme, že čísla $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ jsou po dvou různá.

Zobecnění pro více bodů

Problém

Hledáme polynom stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$), jehož graf prochází body

$$\underbrace{[x_0, y_0],\ [x_1, y_1],\ [x_2, y_2],\ \ldots,\ [x_n, y_n]}_{n+1 \text{ bodů}},$$

přičemž předpokládejme, že čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou po dvou různá.

Výše uvedená úloha je vždy jednoznačně řešitelná (tj. existuje právě jeden polynom uvedených vlastností).

Zobecnění pro více bodů

Problém

Hledáme polynom stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$), jehož graf prochází body

$$\underbrace{[x_0, y_0],\ [x_1, y_1],\ [x_2, y_2],\ \ldots,\ [x_n, y_n]}_{n+1 \text{ bodů}},$$

přičemž předpokládejme, že čísla x_0, x_1, $\ldots$, x_n jsou po dvou různá.

Výše uvedená úloha je vždy jednoznačně řešitelná (tj. existuje právě jeden polynom uvedených vlastností).

Ukážeme si, jak lze uvedený polynom zkonstruovat (jedná se o tzv. Lagrangeův interpolační polynom).

Příklad

Najděte polynom p stupně nejvýše 3, aby v bodech -1, 2 a 4 byl roven nule a v bodě 3 byl roven jedné.

Příklad

Najděte polynom p stupně nejvýše 3, aby v bodech -1, 2 a 4 byl roven nule a v bodě 3 byl roven jedné.

Řešení.

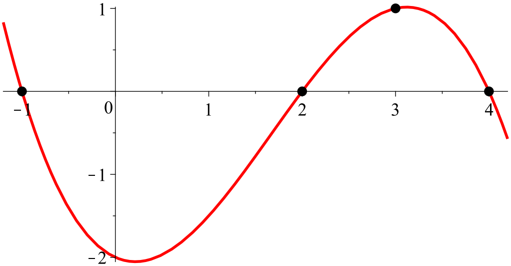
Jedná se o polynom $p(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(3+1)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-4) =$
$= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2.$ □

Příklad

Najděte polynom p stupně nejvýše 3, aby v bodech -1, 2 a 4 byl roven nule a v bodě 3 byl roven jedné.

Řešení.

Jedná se o polynom $p(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(3+1)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-4) =$
$= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2.$ $\square$



Lagrangeův interpolační polynom

Předpokládejme, že jsou dány body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ takové, že x_0, x_1, ..., x_n jsou navzájem různá čísla (viz výše).

Lagrangeův interpolační polynom

Předpokládejme, že jsou dány body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ takové, že x_0, x_1, ..., x_n jsou navzájem různá čísla (viz výše).

Pro $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ označme ω_k takový polynom (stupně n), který v bodě x_k nabývá hodnoty 1 a v ostatních bodech x_i $(i \neq k)$ nabývá hodnoty 0 (takový polynom umíme sestrojit – myšlenka je stejná jako v předchozím příkladu).

Lagrangeův interpolační polynom

Předpokládejme, že jsou dány body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ takové, že x_0, x_1, ..., x_n jsou navzájem různá čísla (viz výše).

Pro $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ označme ω_k takový polynom (stupně n), který v bodě x_k nabývá hodnoty 1 a v ostatních bodech x_i ($i \neq k$) nabývá hodnoty 0 (takový polynom umíme sestrojit – myšlenka je stejná jako v předchozím příkladu).

Lagrangeův interpolační polynom (stupně nejvýše n) má pak tvar

$$p(x) = y_0 \cdot \omega_0(x) + y_1 \cdot \omega_1(x) + \dots + y_n \cdot \omega_n(x).$$

Vraťme se zpět k tomuto příkladu:

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ a $[3, 4]$.

$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$

Vraťme se zpět k tomuto příkladu:

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$

Řešení.

$$p(x) = 9 \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(-2+1)(-2-3)} + 0 \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{(-1+2)(-1-3)} + 4 \cdot \frac{(x+2)(x+1)}{(3+2)(3+1)} =$$

$$= \frac{9}{5}(x+1)(x-3) + \frac{1}{5}(x+2)(x+1) = 2x^2 - 3x - 5.$$

$\square$

Aproximace funkce polynomem

Problém

Mějme danou funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Hledejme polynom p stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$) takový, aby na intervalu $\langle a, b\rangle$ „co nejlépe" aproximoval naši funkci f.

Aproximace funkce polynomem

Problém

Mějme danou funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Hledejme polynom p stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$) takový, aby na intervalu $\langle a, b\rangle$ „co nejlépe“ aproximoval naši funkci f.

Myšlenka

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n stejných dílů. Dělící body označme

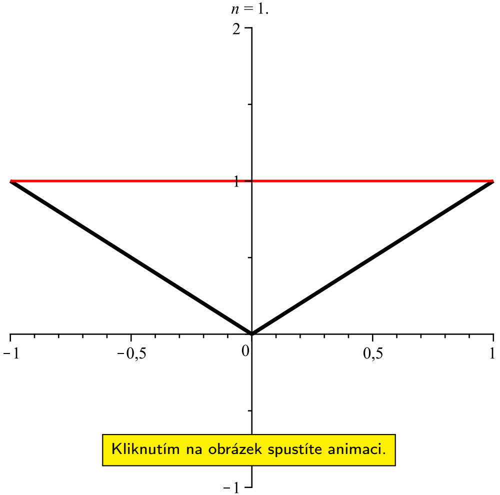
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

V těchto $n+1$ bodech se podíváme na funkční hodnoty funkce f a poté body

$$[x_0, f(x_0)],\ [x_1, f(x_1)],\ \ldots,\ [x_n, f(x_n)]$$

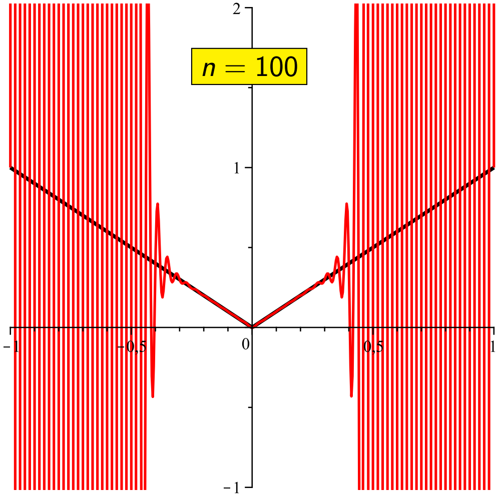
proložíme Lagrangeův interpolační polynom.

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



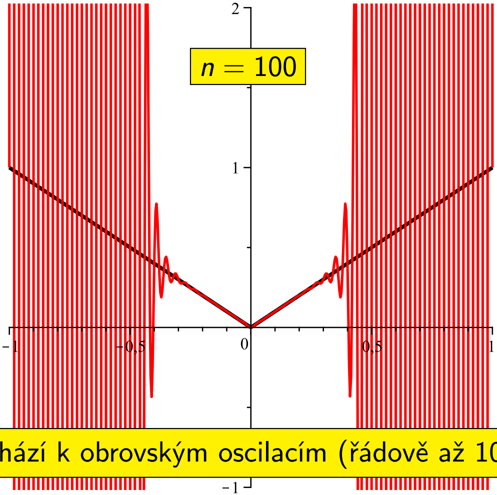
Aproximace Lagrangeovými polynomy

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



Aproximace Lagrangeovými polynomy

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

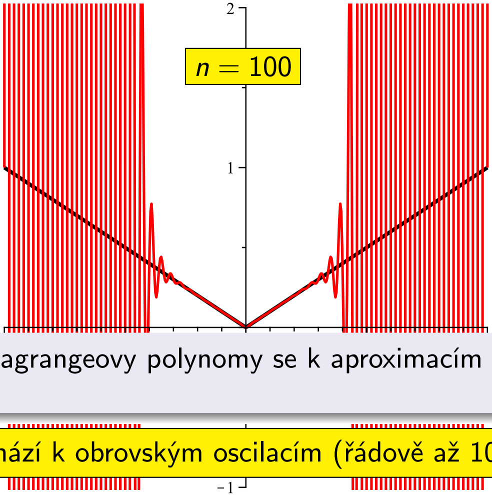


$n = 100$

Dochází k obrovským oscilacím (řádově až 10^{24}).

Aproximace Lagrangeovými polynomy

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



Vidíme tedy, že Lagrangeovy polynomy se k aproximacím funkce příliš nehodí.

Dochází k obrovským oscilacím (řádově až 10^{24}).

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Použití

- Výroba karosérií (Renault, 60. léta minulého století)

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Použití

- Výroba karosérií (Renault, 60. léta minulého století)
- Počítačová grafika (Corel Draw, Adobe Illustrator, apod.)

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Použití

- Výroba karosérií (Renault, 60. léta minulého století)
- Počítačová grafika (Corel Draw, Adobe Illustrator, apod.)
- Postscript

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Použití

- Výroba karosérií (Renault, 60. léta minulého století)
- Počítačová grafika (Corel Draw, Adobe Illustrator, apod.)
- Postscript
- Tvorba písma

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Použití

- Výroba karosérií (Renault, 60. léta minulého století)
- Počítačová grafika (Corel Draw, Adobe Illustrator, apod.)
- Postscript
- Tvorba písma

. . . .

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Použití

- Výroba karosérií (Renault, 60. léta minulého století)
- Počítačová grafika (Corel Draw, Adobe Illustrator, apod.)
- Postscript
- Tvorba písma

. . . .

Definice

Jsou dány body $B_0, B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{R}^2$. Bézierovou křivkou určenou těmito (řídícími) body rozumíme křivku (danou parametricky)

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i B_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Bézierovy křivky (Pierre Étienne Bézier (1.9. 1910 - 25.11. 1999))

Použití

- Výroba karosérií (Renault, 60. léta minulého století)
- Počítačová grafika (Corel Draw, Adobe Illustrator, apod.)
- Postscript
- Tvorba písma

. . . .

Definice

Jsou dány body $B_0, B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{R}^2$. Bézierovou křivkou určenou těmito (řídícími) body rozumíme křivku (danou parametricky)

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i B_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Polynomy $P_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ se nazývají Bernsteinovy polynomy.

Lineární Bézierova křivka $(n = 1)$

Nechť jsou dány body B_0 a B_1. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

$$B(t) = (1-t)B_0 + tB_1 = B_0 + t(B_1 - B_0), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

což je parametrická rovnice úsečky s počátečním bodem B_0 a koncovým bodem B_1.

Lineární Bézierova křivka $(n = 1)$

Nechť jsou dány body B_0 a B_1. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

$$B(t) = (1-t)B_0 + tB_1 = B_0 + t(B_1 - B_0), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

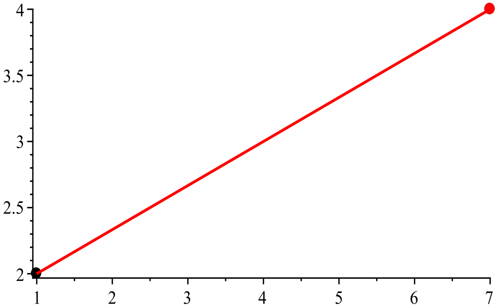
což je parametrická rovnice úsečky s počátečním bodem B_0 a koncovým bodem B_1.

Lineární Bézierova křivka $(n = 1)$

Nechť jsou dány body B_0 a B_1. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

$$B(t) = (1-t)B_0 + tB_1 = B_0 + t(B_1 - B_0), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

což je parametrická rovnice úsečky s počátečním bodem B_0 a koncovým bodem B_1.



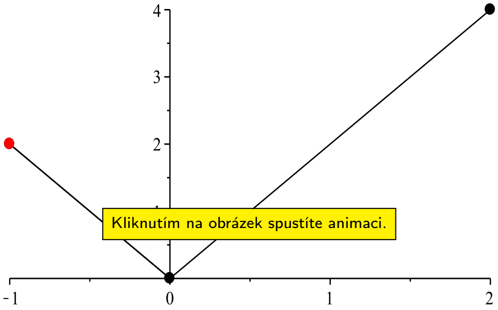
Kvadratická Bézierova křivka $(n = 2)$

Jsou dány body B_0, B_1 a B_2. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

$$B(t) = (1-t)^2 B_0 + 2(1-t)tB_1 + t^2 B_2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Jsou dány body B_0, B_1 a B_2. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

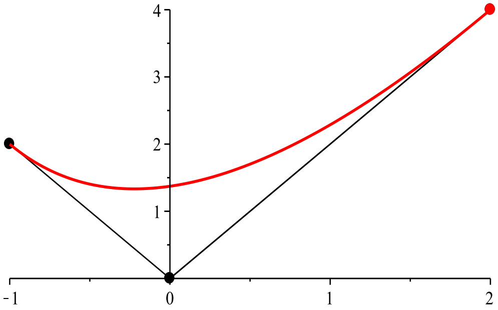
$$B(t) = (1-t)^2 B_0 + 2(1-t)tB_1 + t^2 B_2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$



Kvadratická Bézierova křivka $(n = 2)$

Jsou dány body B_0, B_1 a B_2. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

$$B(t) = (1-t)^2 B_0 + 2(1-t)tB_1 + t^2 B_2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$



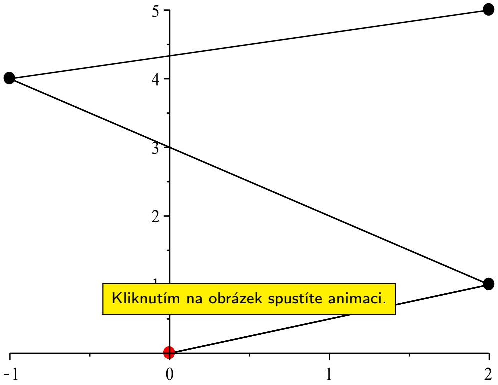
Kubická Bézierova křivka $(n = 3)$

Jsou dány body B_0, B_1, B_2 a B_3. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

$$B(t) = (1-t)^3 B_0 + 3(1-t)^2 t B_1 + 3(1-t) t^2 B_2 + t^3 B_3, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Jsou dány body B_0, B_1, B_2 a B_3. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

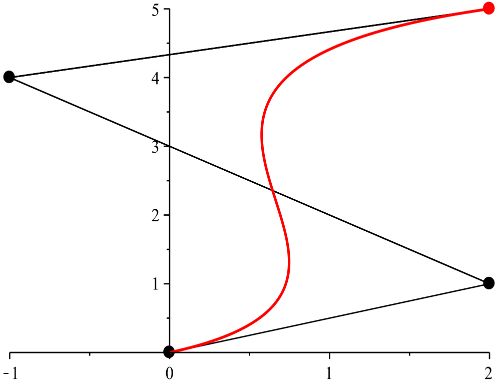
$$B(t) = (1-t)^3 B_0 + 3(1-t)^2 t B_1 + 3(1-t) t^2 B_2 + t^3 B_3, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$



Kubická Bézierova křivka $(n = 3)$

Jsou dány body B_0, B_1, B_2 a B_3. Odpovídající Bézierova křivka má rovnici

$$B(t) = (1-t)^3 B_0 + 3(1-t)^2 t B_1 + 3(1-t) t^2 B_2 + t^3 B_3, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

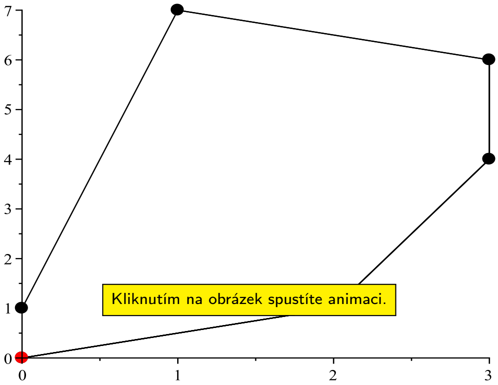


Bézierova křivka obecného řádu

Jsou dány body $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Parametrické vyjádření odpovídající Bézierovy křivky má tvar $B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i B_i$, přičemž $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

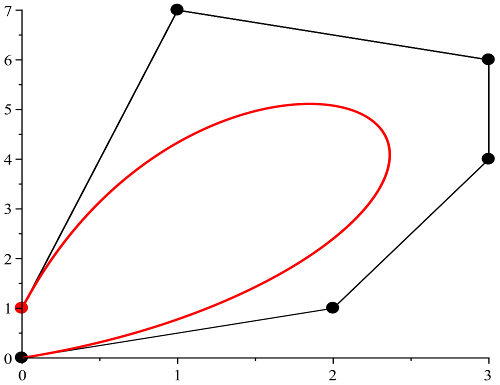
Bézierova křivka obecného řádu

Jsou dány body $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$. Parametrické vyjádření odpovídající Bézierovy křivky má tvar $B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(1-t)^{n-i} t^i B_i$, přičemž $t \in \langle 0, 1 \rangle$.



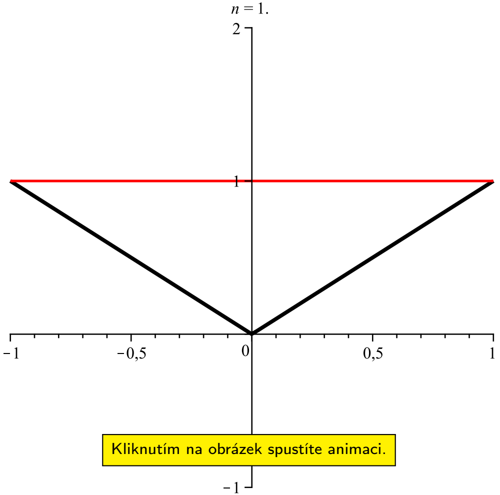
Bézierova křivka obecného řádu

Jsou dány body $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Parametrické vyjádření odpovídající Bézierovy křivky má tvar $B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(1-t)^{n-i} t^i B_i$, přičemž $t \in \langle 0, 1 \rangle$.



Aproximace funkce pomocí Bézierových křivek

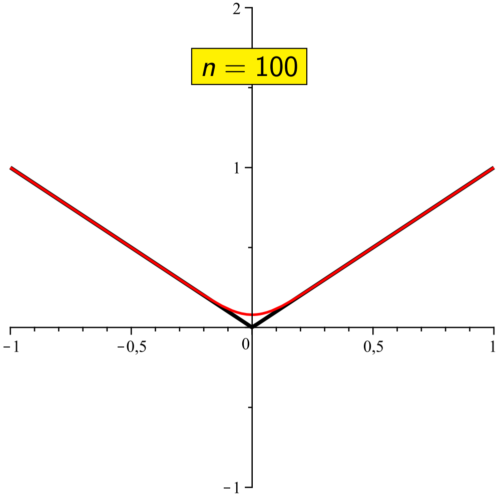
$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$



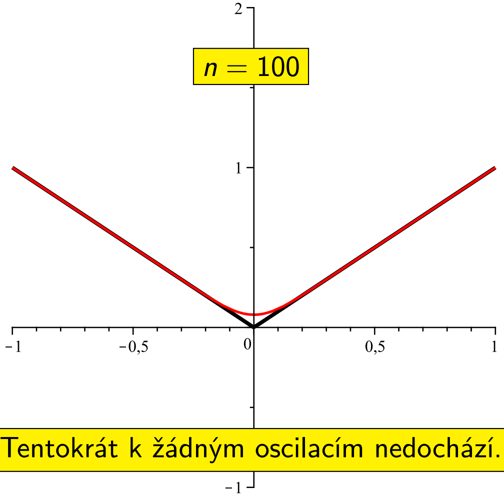
Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

Aproximace funkce pomocí Bézierových křivek

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



Tentokrát k žádným oscilacím nedochází.