BANKA

Banka

Představme si banku, do které vložíme e Kč (Eulerovo číslo). Po každém roce se z účtu odečte 1 Kč (vedení účtu) a zůstatek se vynásobí počtem let od založení účtu. Zjistěte, jak výhodná je nabídka, kterou nám banka dává. Kolik Kč budeme mít na účtu za 22 let ?

Je jasné, že se jedná o rekurzi $a_n = n(a_{n-1} - 1)$, kde $a_0 = \mathbf{e}$. a_n pak udává stav účtu po n letech od založení účtu.

Implementace:

```
> restart;
```

```
> banka:=proc(n) local i,a;
> a:=exp(1);
> for i from 1 to n do
> a:=i*(a-1);
> od;
> end;
```

$$banka := \mathbf{proc}(n)\ \mathbf{local}\ i, a;\ a := \exp(1);\ \mathbf{for}\ i\ \mathbf{to}\ n\ \mathbf{do}\ a := i*(a-1)\ \mathbf{end\ do\ end\ proc}$$

```
> evalf(banka(22));
```

$$0.1\ 10^{13}$$

Za 22 let dostaneme 1 bilión Kč. :-)))

Připomeňme, že

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Na základě toho lze ukázat, že

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots}$$

$$\left(= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\right)$$

Pak platí:

$$a_0 = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\dots$$

$$a_1 = 1\cdot(a_0 - 1) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\dots$$

$$a_2 = 2\cdot(a_1 - 1) = 2\cdot\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots\right)$$

$$a_3 = 3\cdot(a_2 - 1) = \underbrace{3\cdot 2\cdot}_{3!}\left(\frac{1}{3!} + \dots\dots\right)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{22} &= 22!\cdot\left(\frac{1}{22!} + \frac{1}{23!} + \frac{1}{24!} + \dots\dots\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{23} + \frac{1}{23\cdot 24} + \frac{1}{23\cdot 24\cdot 25} + \dots\dots \end{aligned}}$$

Odtud máme:

$$a_{22} > 1 + \frac{1}{23} > 1{,}0434 \quad (\text{dolní odhad})$$

Dále platí:

$$a_{22} = 1 + \frac{1}{23} + \frac{1}{23 \cdot 24} + \frac{1}{23 \cdot 24 \cdot 25} + \ldots\ldots <$$

$$< 1 + \frac{1}{23} + \frac{1}{23 \cdot 23} + \frac{1}{23 \cdot 23 \cdot 23} + \ldots\ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{23} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{23^3} + \ldots\ldots = \text{(geom. řada)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{23}} = \frac{23}{22} < 1{,}0455 \quad \text{(horní odhad)}$$

ZÁVĚR.

Platí

$$\boxed{1{,}0434 < a_{22} < 1{,}0455,}$$

tzn., že nás banka okrade!