Drobná překvapení spojená s numerickou integrací

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

Katedra aplikované matematiky

Matematická analýza s Maplem

Obsah přednášky

1. Připomenutí lichoběžníkového a obdélníkového pravidla
2. Odhady chyb jednotlivých pravidel
3. Porovnání obou pravidel
   - numerické experimenty
   - analytické výpočty
   - další numerické experimenty
4. Závěr

1. Připomenutí lichoběžníkového a obdélníkového pravidla

2. Odhady chyb jednotlivých pravidel

3. Porovnání obou pravidel
   - numerické experimenty
   - analytické výpočty
   - další numerické experimenty

4. Závěr

Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ uvažujme ekvidistantní dělení

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tohoto intervalu.

Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ uvažujme ekvidistantní dělení

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tohoto intervalu.

Pro dělící body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ platí

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \quad (i \in \{0, 1, \ldots, n\}).$$

Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ uvažujme ekvidistantní dělení

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tohoto intervalu.

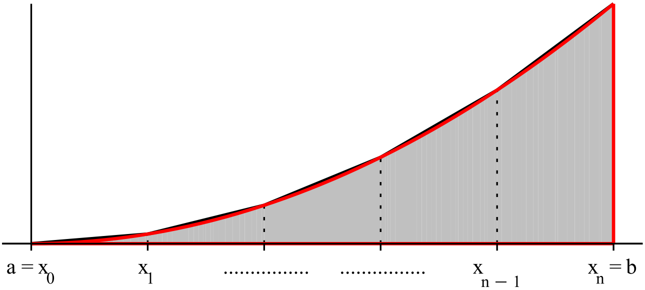
Pro dělicí body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ platí

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \quad (i \in \{0, 1, \ldots, n\}).$$

Délka každého dělícího intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je

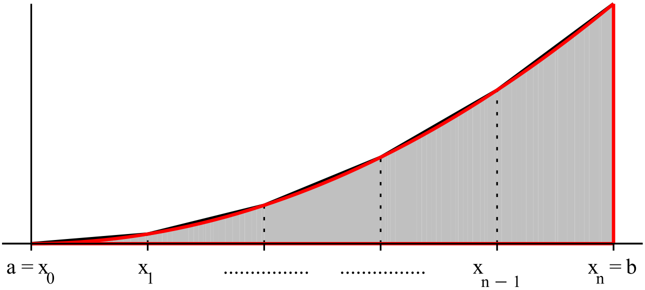
$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Lichoběžníkové pravidlo



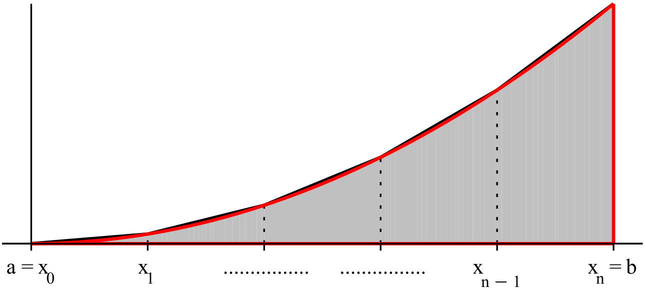
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right].$$

Lichoběžníkové pravidlo



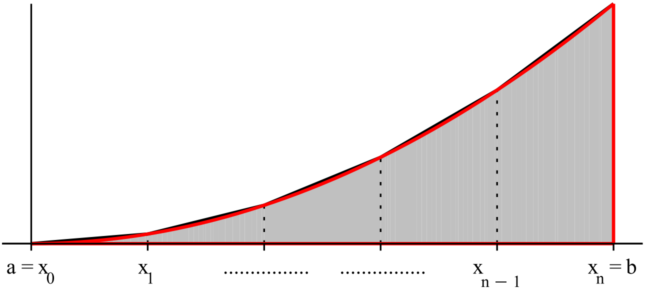
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right].$$

Lichoběžníkové pravidlo



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right]}_{L_n(f;a,b)}.$$

Lichoběžníkové pravidlo

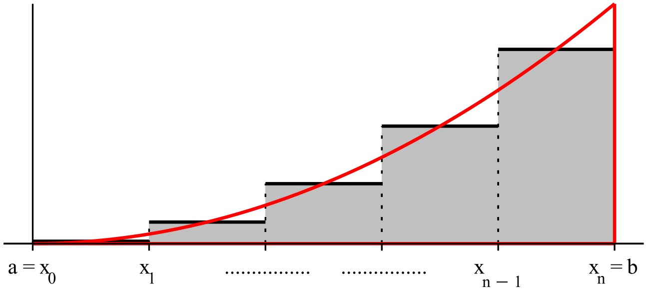


$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]}_{L_n(f;a,b)}.$$

Chyba, které se přitom dopustíme:

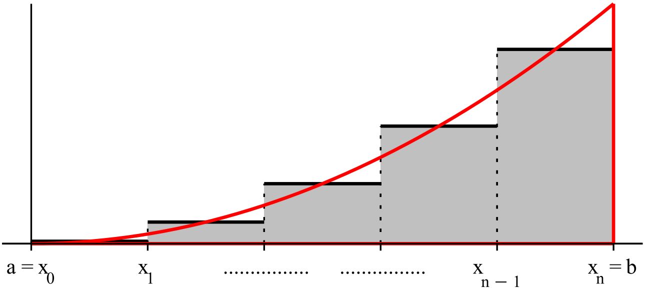
$$I_n(f;a,b) = L_n(f;a,b) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obdélníkové pravidlo



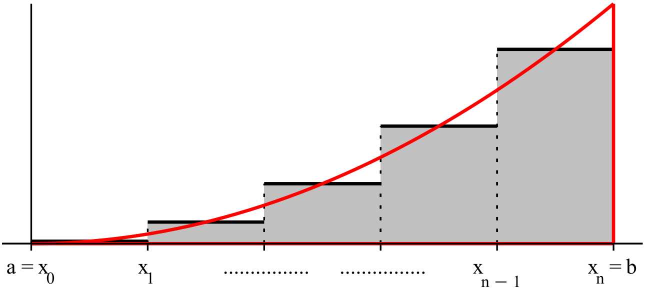
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

Obdélníkové pravidlo



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]}_{O_n(f;a,b)}.$$

Obdélníkové pravidlo



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]}_{O_n(f;a,b)}.$$

Chyba, které se přitom dopustíme:

$$o_n(f;a,b) = O_n(f;a,b) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Připomenutí lichoběžníkového a obdélníkového pravidla

2. Odhady chyb jednotlivých pravidel

3. Porovnání obou pravidel
   - numerické experimenty
   - analytické výpočty
   - další numerické experimenty

4. Závěr

Připomeňme si jedno známé tvrzení týkající se obou výše zmíněných pravidel. Věta bude dokázána (dokonce v silnějším tvaru) později.

Věta.

Předpokládejme, že $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak pro chybu lichoběžníkového, resp. obdélníkového pravidla platí*

$$|l_n(f; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|,$$

resp.

$$|o_n(f; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|.$$

Připomeňme si jedno známé tvrzení týkající se obou výše zmíněných pravidel. Věta bude dokázána (dokonce v silnějším tvaru) později.

Věta.

Předpokládejme, že $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak pro chybu lichoběžníkového, resp. obdélníkového pravidla platí

$$|l_n(f; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|,$$

resp.

$$|o_n(f; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Zde si můžeme všimnout, že odhad chyby obdélníkového pravidla je dvakrát lepší než odhad chyby lichoběžníkového pravidla.

Připomeňme si jedno známé tvrzení týkající se obou výše zmíněných pravidel. Věta bude dokázána (dokonce v silnějším tvaru) později.

Věta.

Předpokládejme, že $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak pro chybu lichoběžníkového, resp. obdélníkového pravidla platí*

$$|l_n(f; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|,$$

resp.

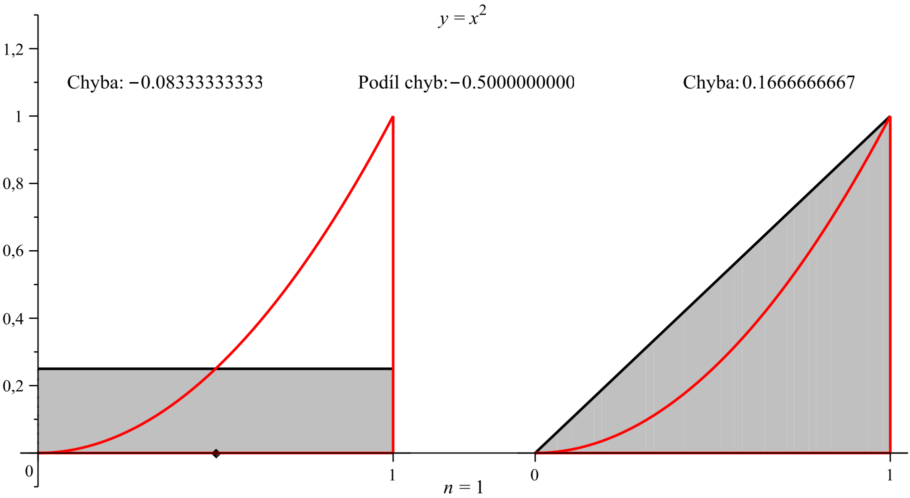
$$|o_n(f; a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|.$$

Zde si můžeme všimnout, že odhad chyby obdélníkového pravidla je dvakrát lepší než odhad chyby lichoběžníkového pravidla.

To však ještě **nic neříká o skutečných chybách**, kterých se dopouštíme při použití lichoběžníkového, resp. obdélníkového pravidla.

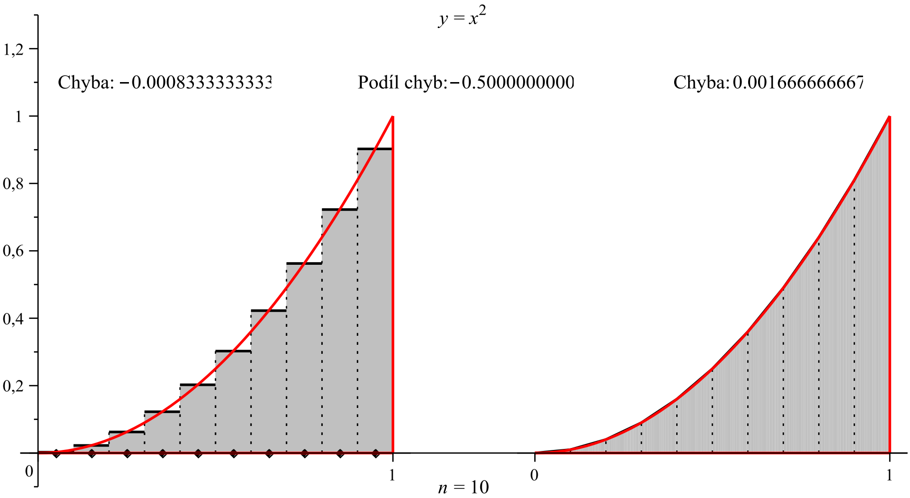
1. Připomenutí lichoběžníkového a obdélníkového pravidla
2. Odhady chyb jednotlivých pravidel
3. Porovnání obou pravidel
   - numerické experimenty
   - analytické výpočty
   - další numerické experimenty
4. Závěr

Experiment č. 1



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

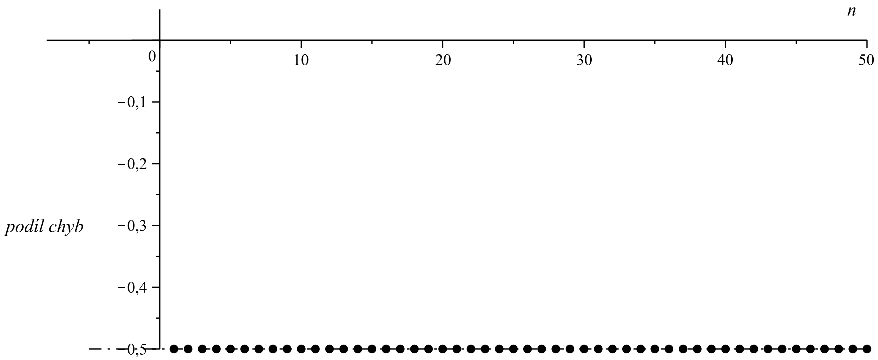
Experiment č. 1



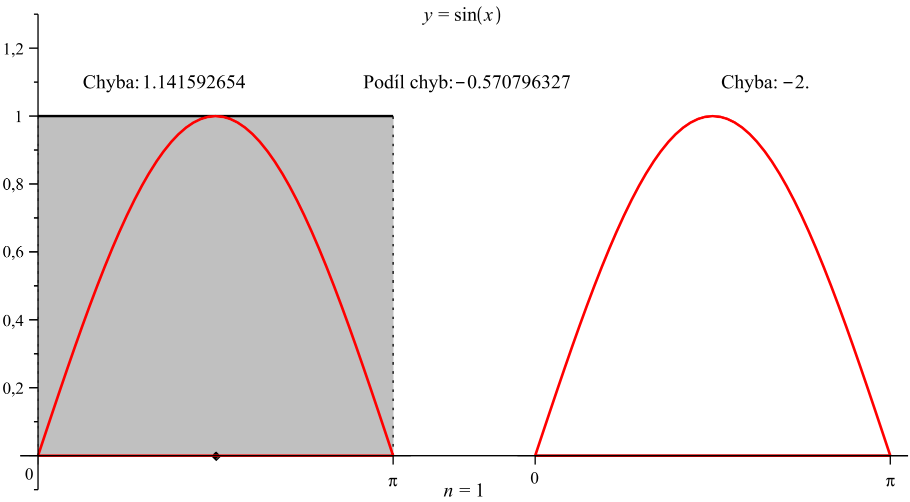
Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)} = -\frac{1}{2}$.

Experiment č. 1

Na následujícím obrázku vidíme graf závislosti podílu $\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}$ na n.

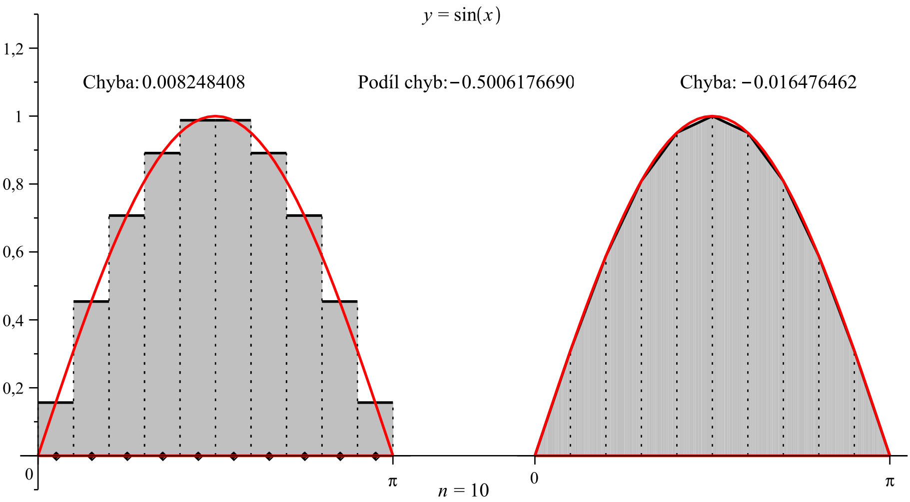


Experiment č. 2



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

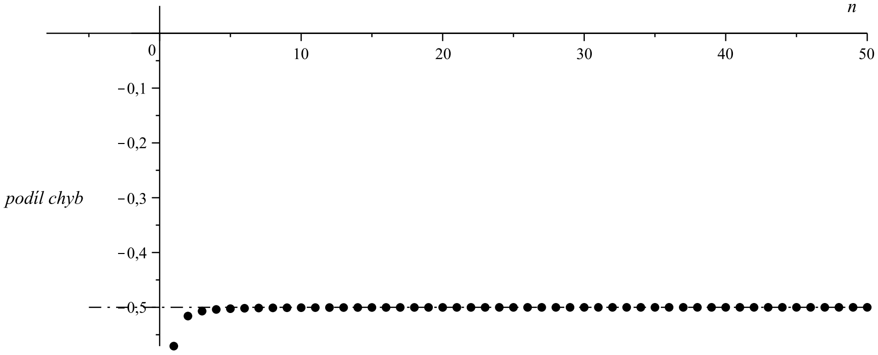
Experiment č. 2



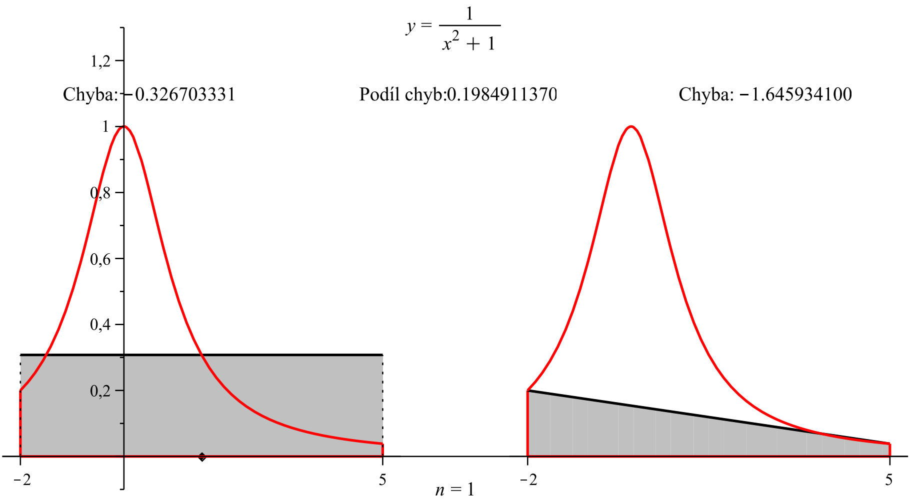
Zdá se, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)} = -\frac{1}{2}$.

Experiment č. 2

Na následujícím obrázku vidíme graf závislosti podílu $\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}$ na n.

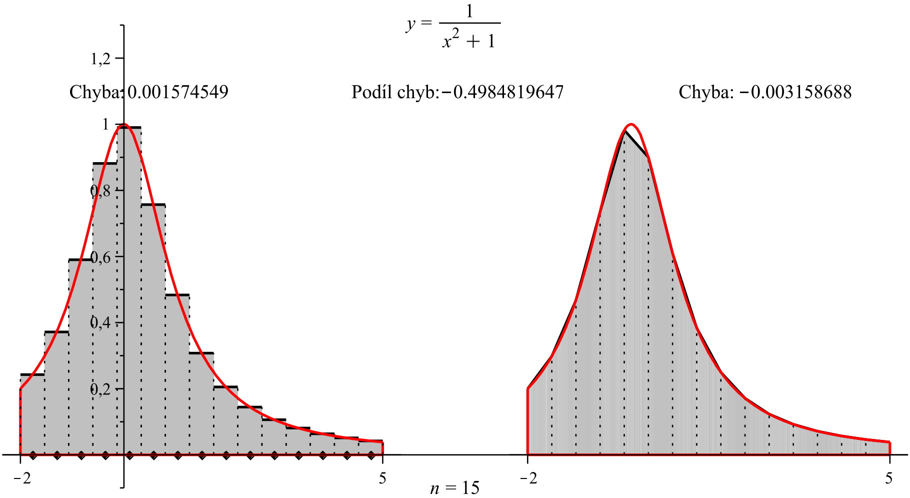


Experiment č. 3



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

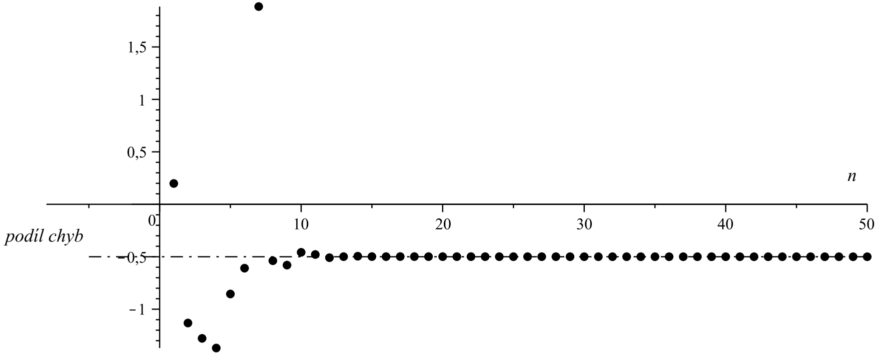
Experiment č. 3



I nyní to vypadá, že $\lim_{n\to\infty} \frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)} = -\frac{1}{2}$.

Experiment č. 3

Na následujícím obrázku vidíme graf závislosti podílu $\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}$ na n.



Nyní dokážeme jednu velmi důležitou větu poskytující nám jistou informaci o skutečných chybách, kterých se dopouštíme při používání lichoběžníkového, resp. obdélníkového pravidla.

Nyní dokážeme jednu velmi důležitou větu poskytující nám jistou informaci o skutečných chybách, kterých se dopouštíme při používání lichoběžníkového, resp. obdélníkového pravidla.

Věta.

Předpokládejme, že $f \in C^2(\langle u, v\rangle)$. *Pak existují čísla* $\xi, \eta \in \langle u, v\rangle$ *taková, že*

$$\left((v-u)\frac{f(u)+f(v)}{2} - \int\limits_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right) = l_1(f;u,v) = \frac{(v-u)^3}{12}\cdot f''(\xi)$$

a

$$\left((v-u)f\left(\frac{u+v}{2}\right) - \int\limits_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right) = o_1(f;u,v) = -\frac{(v-u)^3}{24}\cdot f''(\eta).$$

Důkaz.

Dokážeme alespoň druhé tvrzení.

Pro zjednodušení zápisu položme $c = \frac{u+v}{2}$ a definujme funkci

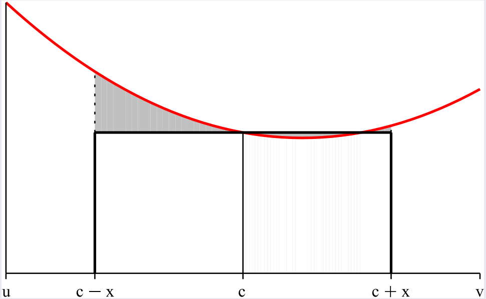
$$F(x) = 2xf(c) - \int\limits_{c-x}^{c+x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \left\langle 0, \tfrac{v-u}{2} \right\rangle.$$

Důkaz.

Dokážeme alespoň druhé tvrzení.

Pro zjednodušení zápisu položme $c = \frac{u+v}{2}$ a definujme funkci

$$F(x) = 2xf(c) - \int\limits_{c-x}^{c+x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \left\langle 0, \frac{v-u}{2} \right\rangle .$$



Důkaz.

Dokážeme alespoň druhé tvrzení.

Pro zjednodušení zápisu položme $c = \frac{u+v}{2}$ a definujme funkci

$$F(x) = 2xf(c) - \int\limits_{c-x}^{c+x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \left\langle 0, \tfrac{v-u}{2} \right\rangle .$$

Přímým výpočtem zjistíme, že $F(0) = 0$ a $F\left(\frac{v-u}{2}\right) = o_1(f; u, v)$.

Důkaz.

Dokážeme alespoň druhé tvrzení.

Pro zjednodušení zápisu položme $c = \frac{u+v}{2}$ a definujme funkci

$$F(x) = 2xf(c) - \int\limits_{c-x}^{c+x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \left\langle 0, \frac{v-u}{2} \right\rangle.$$

Přímým výpočtem zjistíme, že $F(0) = 0$ a $F\left(\frac{v-u}{2}\right) = o_1(f; u, v)$.

Dále platí

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2f(c) - \big(f(c+x) + f(c-x)\big), \quad F'(0) = 0,\\
F''(x) &= -\big(f'(c+x) - f'(c-x)\big), \quad F''(0) = 0,\\
F'''(x) &= -\big(f''(c+x) + f''(c-x)\big).
\end{aligned}$$

Důkaz.

Z Taylorovy věty plyne existence čísla $\vartheta \in \left(0, \frac{v-u}{2}\right)$ takového, že

$$o_1(f; u, v) = F\left(\frac{v-u}{2}\right) =$$

$$= \overbrace{F(0)}^{0} + \frac{\overbrace{F'(0)}^{0}}{1!} \cdot \frac{v-u}{2} + \frac{\overbrace{F''(0)}^{0}}{2!} \cdot \left(\frac{v-u}{2}\right)^2 + \frac{F'''(\vartheta)}{3!} \cdot \left(\frac{v-u}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{(v-u)^3}{48} \cdot F'''(\vartheta) = -\frac{(v-u)^3}{24} \cdot \frac{f''(c+\vartheta) + f''(c-\vartheta)}{2}.$$

Důkaz.

Z Taylorovy věty plyne existence čísla $\vartheta \in \left(0, \frac{v-u}{2}\right)$ takového, že

$$o_1(f; u, v) = F\left(\frac{v-u}{2}\right) =$$

$$= \overbrace{F(0)}^{0} + \frac{\overbrace{F'(0)}^{0}}{1!} \cdot \frac{v-u}{2} + \frac{\overbrace{F''(0)}^{0}}{2!} \cdot \left(\frac{v-u}{2}\right)^2 + \frac{F'''(\vartheta)}{3!} \cdot \left(\frac{v-u}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{(v-u)^3}{48} \cdot F'''(\vartheta) = -\frac{(v-u)^3}{24} \cdot \frac{f''(c+\vartheta) + f''(c-\vartheta)}{2}.$$

Protože funkce f'' je spojitá na intervalu $\langle u, v\rangle$, existuje číslo $\eta \in \langle u, v\rangle$ takové, že

$$o_1(f; u, v) = -\frac{(v-u)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

□

Důsledek.

Předpokládejme, že $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak existují čísla* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *a* $\eta_1, \dots, \eta_n$ *splňující*

$$\xi_i, \eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \quad \text{pro každé } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

a taková, že

$$I_n(f; a, b) = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

a

$$o_n(f; a, b) = -\frac{(b-a)^3}{24n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i).$$

Důkaz.

Tvrzení plyne z předchozí věty a z rovností

$$l_n(f;a,b) = \sum_{i=1}^{n} l_1(f;x_{i-1},x_i),$$

$$o_n(f;a,b) = \sum_{i=1}^{n} o_1(f;x_{i-1},x_i)$$

a

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{pro každé } i \in \{1,2,\dots,n\},$$

které ověříme přímým výpočtem.

Z předchozí věty víme, že $\quad l_1(f;u,v) = \frac{(v-u)^3}{12} \cdot f''(\xi), \quad o_1(f;u,v) = -\frac{(v-u)^3}{24} \cdot f''(\eta).$

Důkaz.

Skutečně,

$$l_n(f;a,b) = \sum_{i=1}^{n} l_1(f;x_{i-1},x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} \cdot f''(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} \cdot f''(\xi_i) = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

Důkaz.

Skutečně,

$$l_n(f;a,b) = \sum_{i=1}^{n} l_1(f;x_{i-1},x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} \cdot f''(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} \cdot f''(\xi_i) = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

Úplně analogicky ukážeme, že

$$o_n(f;a,b) = -\frac{(b-a)^3}{24n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i).$$

$\square$

Poznámka.

Z výše uvedeného důsledku snadno vyplývají i odhady zmíněné na začátku prezentace. Platí totiž

$$|I_n(f;a,b)| = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} |f''(\xi_i)| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|$$

Poznámka.

Z výše uvedeného důsledku snadno vyplývají i odhady zmíněné na začátku prezentace. Platí totiž

$$|I_n(f;a,b)| = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} |f''(\xi_i)| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$$

a

$$|o_n(f;a,b)| = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} |f''(\eta_i)| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Věta.

Předpokládejme, že $f\in C^2(\langle a,b\rangle)$

Pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}=-\frac{1}{2}.$$

Věta.

Předpokládejme, že $f\in C^2(\langle a,b\rangle)$

Pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)}=-\frac{1}{2}.$$

Důkaz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{(b-a)^2}{24n^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\eta_i)\frac{b-a}{n}\right)}{\frac{(b-a)^2}{12n^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\eta_i)\frac{b-a}{n}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right)}= \qquad \square$$

Věta.

Předpokládejme, že $f\in C^2(\langle a,b\rangle)$

Pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}=-\frac{1}{2}.$$

Důkaz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{(b-a)^2}{24n^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\eta_i)\frac{b-a}{n}\right)}{\frac{(b-a)^2}{12n^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\eta_i)\frac{b-a}{n}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}.\qquad\square$$

Věta.

Předpokládejme, že $f\in C^2(\langle a,b\rangle)$ a je splněna podmínka $\int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$.

Pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)}=-\frac{1}{2}.$$

Důkaz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{(b-a)^2}{24n^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\eta_i)\frac{b-a}{n}\right)}{\frac{(b-a)^2}{12n^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\eta_i)\frac{b-a}{n}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f''(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}.\quad\square$$

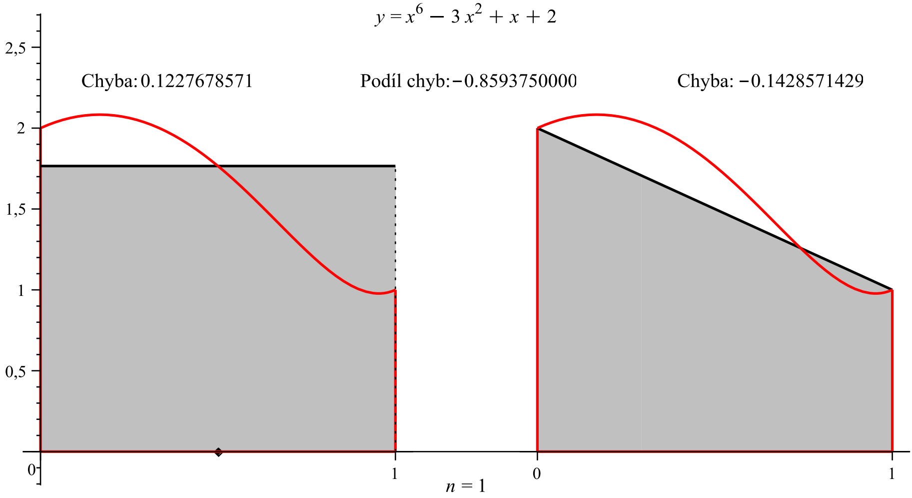
Předchozí věta: $f \in C^2(\langle a, b\rangle),\ \int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x \neq 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)} = -\frac{1}{2}.$

Srovnejte předchozí větu s numerickými experimenty č. 1–3.

Srovnejte předchozí větu s numerickými experimenty č. 1–3.

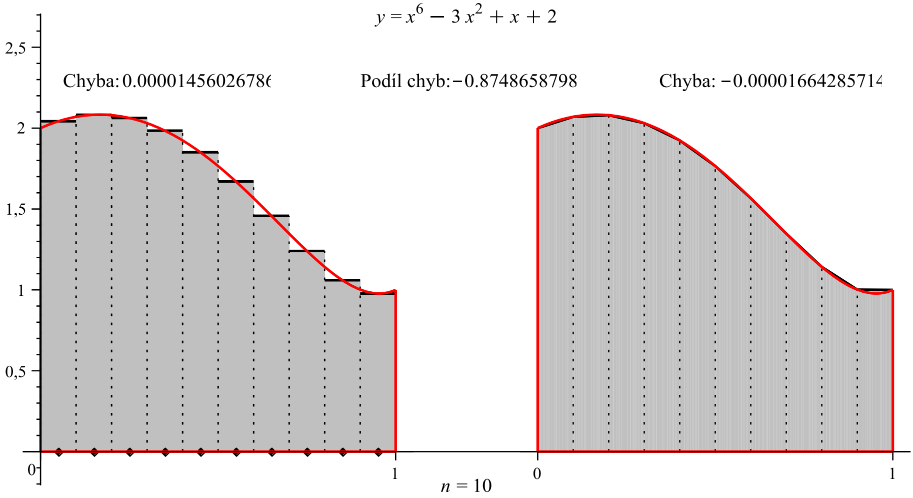
Nyní bychom se mohli ptát, jaký bude vztah mezi obdélníkovým a lichoběžníkovým pravidlem, pokud nebude splněn předpoklad $\int\limits_a^b f''(x)\,dx \neq 0$, tj. v případě $f'(a) = f'(b)$.

Experiment č. 4 (případ $f'(b) - f'(a) = \int_a^b f''(x)\,dx = 0$)



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

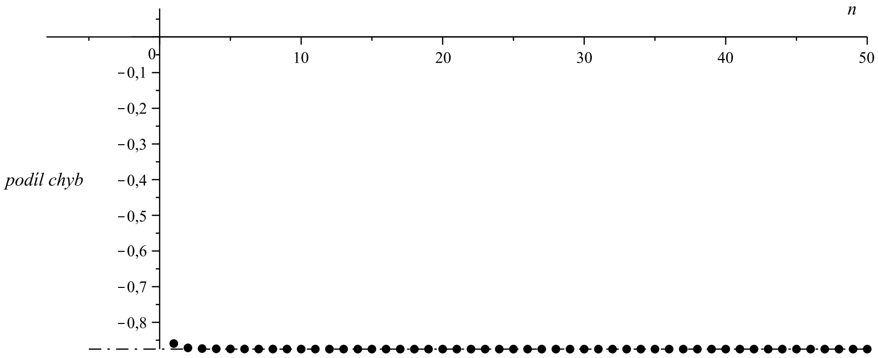
Experiment č. 4 (případ $f'(b) - f'(a) = \int_a^b f''(x)\,dx = 0$)



Vypadá to, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{o_n(f;a,b)}{l_n(f;a,b)} \neq -\dfrac{1}{2}$.

Experiment č. 4

Na následujícím obrázku vidíme graf závislosti podílu $\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}$ na n.



Odpověď na otázku, co se bude dít v případě $f'(a) = f'(b)$, dává (alespoň částečně) následující věta.

Odpověď na otázku, co se bude dít v případě $f'(a) = f'(b)$, dává (alespoň částečně) následující věta.

Věta.

Nechť $f \in C^4(\langle a, b \rangle)$. *Dále nechť platí* $f'(a) = f'(b)$ *a* $f'''(a) \neq f'''(b)$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_n(f; a, b)}{l_n(f; a, b)} = -\frac{7}{8}.$$

Odpověď na otázku, co se bude dít v případě $f'(a) = f'(b)$, dává (alespoň částečně) následující věta.

Věta.

Nechť $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$*. Dále nechť platí* $f'(a) = f'(b)$ *a* $f'''(a) \neq f'''(b)$*. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_n(f; a, b)}{I_n(f; a, b)} = -\frac{7}{8}.$$

Důkaz.

Myšlenky důkazu této věty jsou podobné, jako u předchozí věty. Technická náročnost je však větší, a proto zde důkaz nebudeme uvádět. □

Odpověď na otázku, co se bude dít v případě $f'(a) = f'(b)$, dává (alespoň částečně) následující věta.

Věta.

Nechť $f \in C^4(\langle a, b \rangle)$. Dále nechť platí $f'(a) = f'(b)$ a $f'''(a) \neq f'''(b)$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_n(f; a, b)}{I_n(f; a, b)} = -\frac{7}{8}.$$

Důkaz.

Myšlenky důkazu této věty jsou podobné, jako u předchozí věty. Technická náročnost je však větší, a proto zde důkaz nebudeme uvádět. □

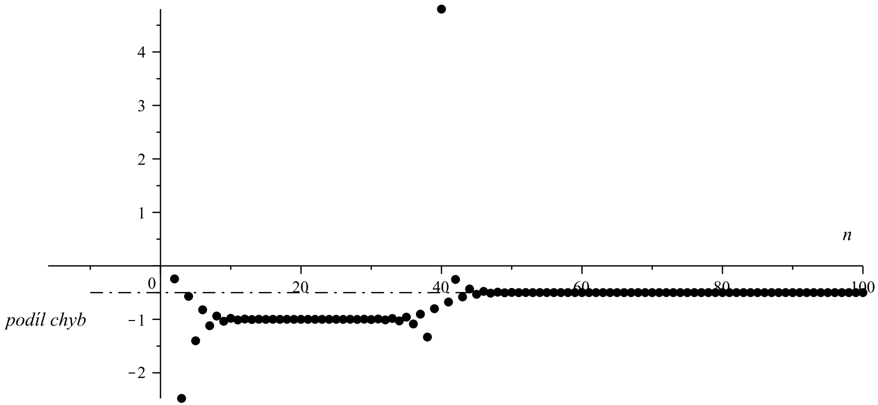
Poznámka.

Srovnejte tuto větu s numerickým experimentem č. 4.

Situace může být zajímavá, pokud se $f'(a)$ a $f'(b)$ příliš neliší. Uvažujme například funkci $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^4}$ na intervalu $\langle -5, 5 \rangle$. Pak totiž $0 < |f'(a) - f'(b)| < 10^{-5}$.

Situace může být zajímavá, pokud se $f'(a)$ a $f'(b)$ příliš neliší. Uvažujme například funkci $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^4}$ na intervalu $\langle -5, 5\rangle$. Pak totiž $0 < |f'(a) - f'(b)| < 10^{-5}$.

Na následujícím obrázku vidíme graf závislosti podílu $\frac{o_n(f;a,b)}{I_n(f;a,b)}$ na n.



Ukázali jsme tedy, že za vhodných předpokladů je obdélníkové pravidlo (s hodnotami počítanými uprostřed dělících intervalů) lepší než pravidlo lichoběžníkové.

Ukázali jsme tedy, že za vhodných předpokladů je obdélníkové pravidlo (s hodnotami počítanými uprostřed dělících intervalů) lepší než pravidlo lichoběžníkové.

Další experimenty se proto budou týkat výhradně obdélníkových pravidel.

1 Připomenutí lichoběžníkového a obdélníkového pravidla

2 Odhady chyb jednotlivých pravidel

3 Porovnání obou pravidel
- numerické experimenty
- analytické výpočty
- další numerické experimenty

4 Závěr

Proč jsme uvažovali obdélníkové pravidlo s hodnotami uprostřed dělících intervalů ???

Proč jsme uvažovali obdélníkové pravidlo s hodnotami uprostřed dělících intervalů ???

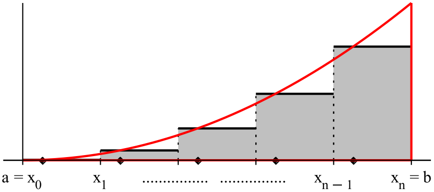
Je takové pravidlo ze všech obdélníkových pravidel nejlepší ???

Proč jsme uvažovali obdélníkové pravidlo s hodnotami uprostřed dělících intervalů ???

Je takové pravidlo ze všech obdélníkových pravidel nejlepší ???

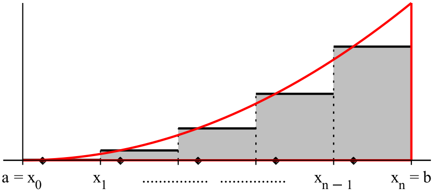
Bylo by lepší uvažovat jiné obdélníkové pravidlo ???

Ilustrace pro $\lambda = \frac{1}{4}$:



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\Big[f(c_{\lambda,1}) + f(c_{\lambda,2}) + \cdots + f(c_{\lambda,n})\Big]}_{\text{výraz označme jako } O_{\lambda,n}(f;a,b)},$$

Ilustrace pro $\lambda = \frac{1}{4}$:

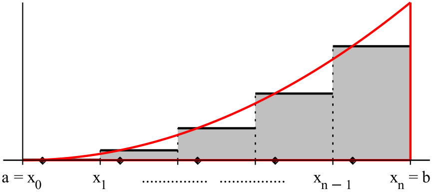


$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\Big[f(c_{\lambda,1}) + f(c_{\lambda,2}) + \cdots + f(c_{\lambda,n})\Big]}_{\text{výraz označme jako } O_{\lambda,n}(f;a,b)},$$

kde

$$c_{\lambda,i} = x_{i-1} + \lambda(x_i - x_{i-1}) = x_{i-1} + \lambda\,\frac{b-a}{n} \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

Ilustrace pro $\lambda = \frac{1}{4}$:



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{n}\Big[f(c_{\lambda,1}) + f(c_{\lambda,2}) + \cdots + f(c_{\lambda,n})\Big]}_{\text{výraz označme jako } O_{\lambda,n}(f;a,b)},$$

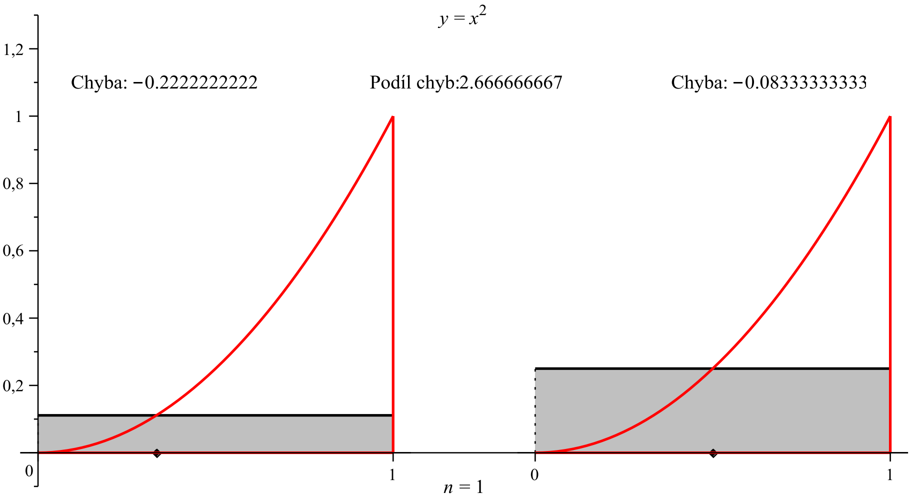
kde

$$c_{\lambda,i} = x_{i-1} + \lambda(x_i - x_{i-1}) = x_{i-1} + \lambda\,\frac{b-a}{n} \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

Chyba, které se přitom dopustíme:

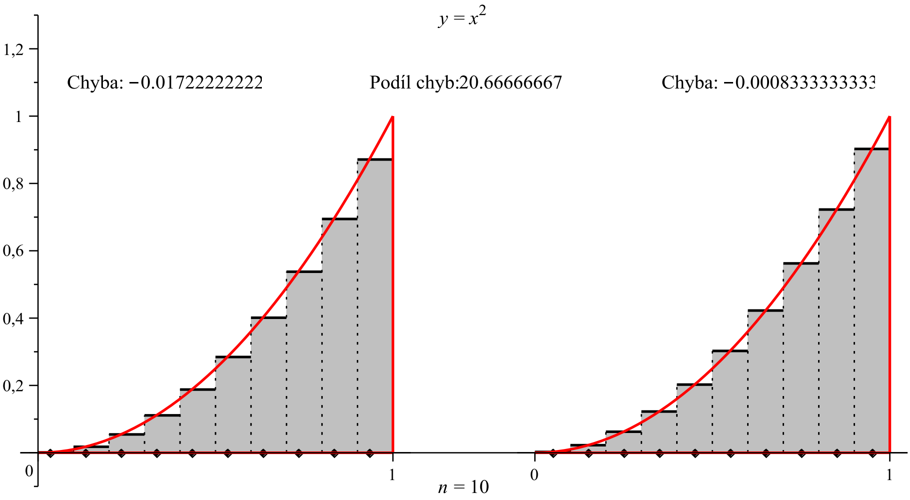
$$o_{\lambda,n}(f; a, b) = O_{\lambda,n}(f; a, b) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Experiment č. 5 $\quad (\lambda = \frac{1}{3})$

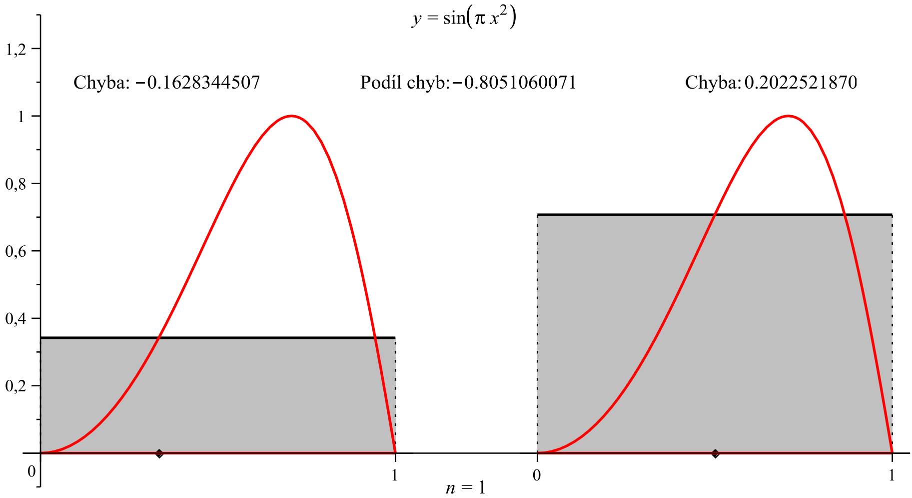


Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

Experiment č. 5 $\quad (\lambda = \frac{1}{3})$ (Obdélníkové pravidlo „s prostředním bodem“ je lepší.)

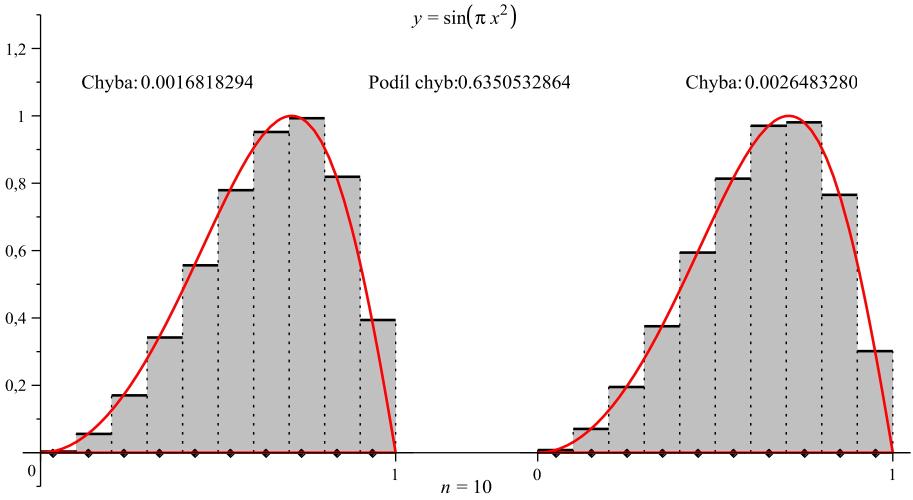


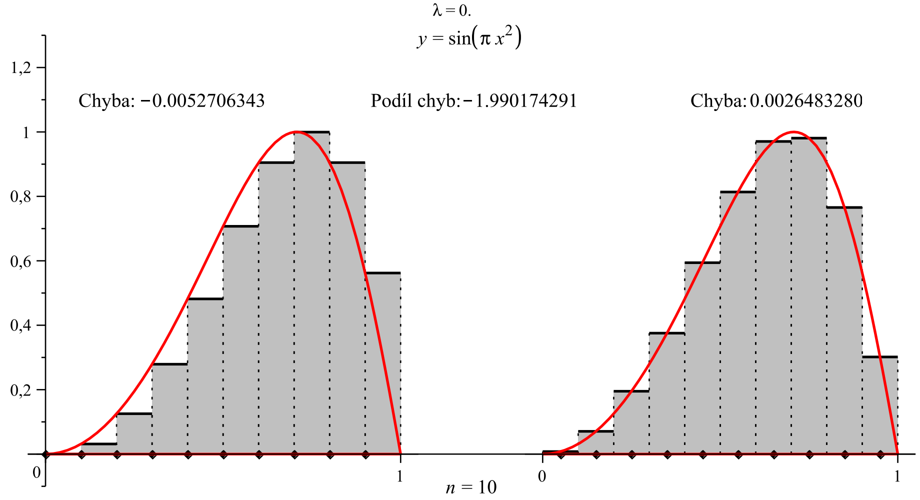
Experiment č. 6 $\quad (\lambda = \frac{1}{3})$



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

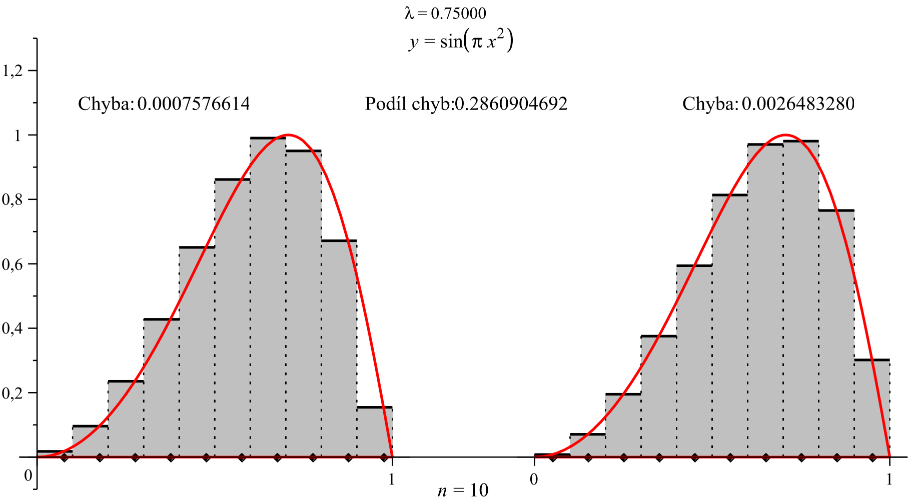
Experiment č. 6 $\quad (\lambda = \frac{1}{3})$ (Obdélníkové pravidlo „s prostředním bodem“ je horší.)





Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

Experiment č. 7 (srovnání obdélníkových pravidel pro různá λ)



Lze ukázat následující dvě věty (uvědomme si přitom, že $o_n(f; a, b) = o_{\frac{1}{2},n}(f; a, b)$).

Věta.

Nechť $f \in C^1(\langle a, b\rangle)$ a $f(a) \neq f(b)$. Pak pro libovolné $\lambda \neq \frac{1}{2}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_n(f; a, b)}{o_{\lambda,n}(f; a, b)} = 0.$$

Lze ukázat následující dvě věty (uvědomme si přitom, že $o_n(f;a,b) = o_{\frac{1}{2},n}(f;a,b)$).

Věta.

Nechť $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $f(a) \neq f(b)$. Pak pro libovolné $\lambda \neq \frac{1}{2}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_n(f;a,b)}{o_{\lambda,n}(f;a,b)} = 0.$$

Poznámka.

Za uvedených předpokladů to znamená, že obdélníkové pravidlo s hodnotami počítanými uprostřed dělících intervalů je lepší než jakékoliv jiné (zobecněné) obdélníkové pravidlo (myšleno pro dostatečně velká n).

Věta.

Nechť $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$, $f(a) = f(b)$ *a* $f'(a) \neq f'(b)$. *Pak pro libovolné* $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ *platí*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{o_{\lambda,n}(f; a, b)}{o_n(f; a, b)} = -12\lambda^2 + 12\lambda - 2.$$

Věta.

Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$, $f(a) = f(b)$ *a* $f'(a) \neq f'(b)$. *Pak pro libovolné* $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_{\lambda,n}(f; a, b)}{o_n(f; a, b)} = -12\lambda^2 + 12\lambda - 2.$$

Poznámka.

Z této věty je možné např. vyčíst, že za uvedených předpokladů je obdélníkové pravidlo nejlepší, jestliže λ je kořenem polynomu $-12\lambda^2 + 12\lambda - 2$, tj. $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,211$ nebo $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,789$.

Věta.

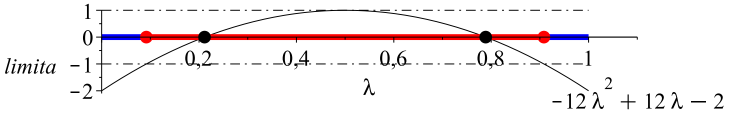
Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$, $f(a) = f(b)$ *a* $f'(a) \neq f'(b)$. *Pak pro libovolné* $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_{\lambda,n}(f; a, b)}{o_n(f; a, b)} = -12\lambda^2 + 12\lambda - 2.$$

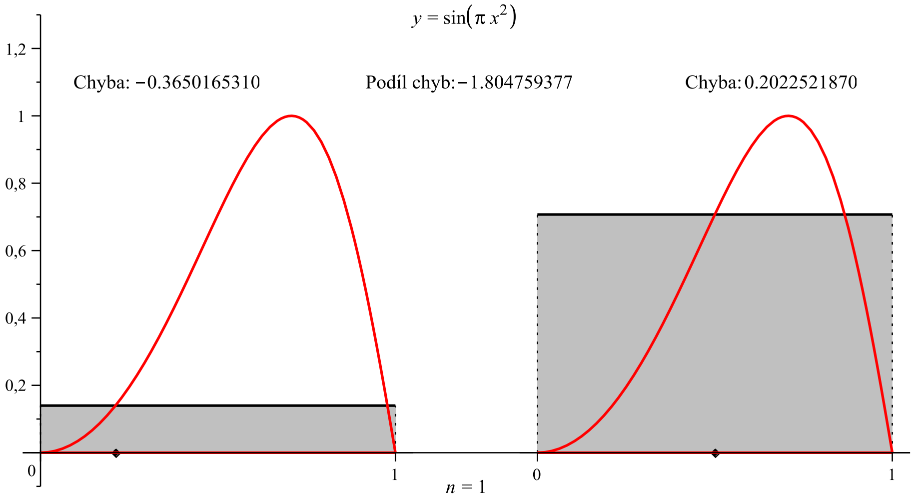
Poznámka.

Z této věty je možné např. vyčíst, že za uvedených předpokladů je obdélníkové pravidlo nejlepší, jestliže λ je kořenem polynomu $-12\lambda^2 + 12\lambda - 2$, tj. $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,211$ nebo $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,789$.

Graf závislosti výsledku výše uvedené limity na λ:

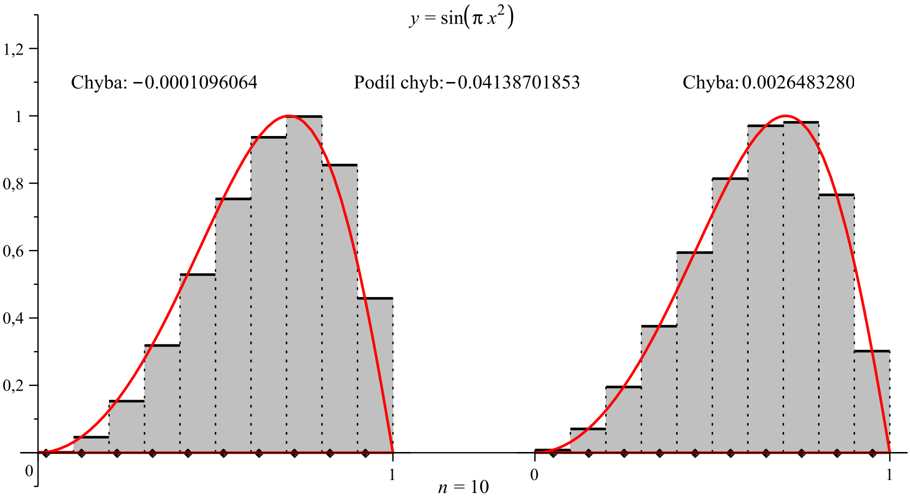


Experiment č. 8 (nejlepší obdélníkové pravidlo – případ $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}211$)



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

Experiment č. 8 (nejlepší obdélníkové pravidlo – případ $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,211$)



$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_{\lambda,n}(f;a,b)}{o_n(f;a,b)} = 0.$$

Děkuji za pozornost !!!