

1. přednáška (seznámení se systémem Maple)

Maple (Mathematics pleasure) je systém počítačové algebry vyvíjený od 80. let minulého století.

- Úvod

Současná verze 15 systému Maple (zkráceně Maple 15) umožňuje provádět jak symbolické a numerické výpočty a vytvářet grafy, tak doplňovat je vlastními texty a vytvářet tak tzv. hypertextové zápisníky (worksheet). Takto vytvořené zápisníky umožňuje Maple 15 ukládat do souboru na počítači ve svém speciálním mapleovském formátu MW (popř. MWS). Tyto soubory umožňuje Maple 15 načítat zpět ke zpracování, což umožňuje snadnou přenositelnost mapleovských zápisníků mezi nejrůznějšími počítačovými platformami a operačními systémy.

V Maple 15 se používá vlastní programovací jazyk čtvrté generace podobný Pascalu s mnoha předdefinovanými funkcemi a procedurami. Mapleovské funkce pokrývají mnoho odvětví matematiky od základů diferenciálního a integrálního počtu, lineární algebry, řešení rovnic, až k řešení diferenciálních a diferenčních rovnic, diferenciální geometrii a logice.

Maple se skládá ze tří základních částí: JÁDRA (KERNEL), KNIHOVEN ([PACKAGES](#)) a uživatelského rozhraní (INTERFACE). Jádro a knihovny jsou pro všechny systémy stejné (jádro je napsáno v jazyce C a po spuštění je uloženo v paměti počítače).

- Uživatelské prostředí

K dispozici máme "klasické" nebo "moderní" uživatelské rozhraní.

Matematické příkazy ukončujeme středníkem (výsledek se vypíše na obrazovku), popř. dvojtečkou (nic se nevypisuje).

```
> a:=evalf(Pi,100);  
a := 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078\  
16406286208998628034825342117068  
> b:=evalf(exp(1),100):  
> b;  
2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663\  
0353547594571382178525166427
```

```
[ > restart;
```

```
[ Příkaz "restart" vymaže vnitřní paměť.
```

```
[ > a;b;
```

```
      a
```

```
      b
```

```
[ >
```

Některé klávesové zkratky:

CTRL+T (vlození textu)

CTRL+K (vlození "prováděcí skupiny" před kurzor)

CTRL+J (vlození "prováděcí skupiny" za kurzor)

CTRL+Del (smazání "prováděcí skupiny")

(vyzkoušejte !!!)

Ukládání dokumentu:

Z menu "File" zvolíme "Save" popř. "Save As". Uložený soubor má koncovku "mw", popř. "mws" (classic worksheet).

- Nápověda

```
[ > ?plot
```

```
[ zobrazí kompletní nápovědu
```

```
[ > ??plot
```

```
[ zobrazí sbalenou nápovědu
```

```
[ > ???plot
```

```
[ zobrazí příklady
```

Další možností je dostat se do nápovědy z menu "Help".

- Ukázky možností Maplu

- Maple jako kalkulačka

```
[ > 2+3;
```

```
      5
```

```
[ > 34*21;
```

```
      714
```

```

> 34/123;
      34
     ---
     123

> 34.0/123;
0.2764227642

> 123^21;
77269364466549865653073473388030061522211723

> sin(Pi/3);
       $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

> arctan(1);
       $\frac{\pi}{4}$ 

>

```

- Přirázování

```

> restart;
> a:=b;
      a := b

> b:=1;
      b := 1

> a;
      1

> b:=2;
      b := 2

> a;
      2

> restart;

> b:=1;
      b := 1

> a:=b;
      a := 1

> a;
      1

> b:=2;
      b := 2

> a;
      1

```

Zrušení přiřazení:

```
> a:='a';
```

```
a := a
```

```
> a;
```

```
a
```

```
>
```

- Výrazy

```
> expand((a+b)^10);
```

```

$$a^{10} + 10 a^9 b + 45 a^8 b^2 + 120 a^7 b^3 + 210 a^6 b^4 + 252 a^5 b^5 + 210 a^4 b^6 + 120 a^3 b^7 + 45 a^2 b^8 + 10 a b^9 + b^{10}$$

```

```
> (x^3-1)/(x^2-1);
```

```

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

```

```
> simplify(%);
```

```

$$\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

```

```
> (x^2-2)/(x^6-1);
```

```

$$\frac{x^2 - 2}{x^6 - 1}$$

```

```
> convert(%,parfrac,x);
```

```

$$\frac{1}{6(x+1)} + \frac{5+4x}{6(x^2+x+1)} + \frac{5-4x}{6(x^2-x+1)} - \frac{1}{6(x-1)}$$

```

Symbol % představuje poslední vypočtený výraz (poslední výraz předaný jádru - ne poslední výraz v zápisníku).

(%% - předposlední výraz, %%% - předpředposlední výraz)

```
> convert(0.345453,fraction);
```

```

$$\frac{12190}{35287}$$

```

- Funkce

```
> f:=x->x^2;
```

```
f := x → x2
```

```
> f(3);
```

```
9
```

```
> g:=unapply(x^2,x);
```

```
g := x → x2
```

```
> g(2);
```

```
4
```

```
> v:=x^2;
```

```

v := x^2
> v(2);
x(2)^2
> subs(x=2,v);
4
> whattype(f);whattype(v);
symbol
^
>

```

– Rovnice a nerovnice

```

> solve(x^2+x-6=0,x);
2, -3
> solve((x-1)/(x+2)>=0,x);
RealRange(-infinity, Open(-2)), RealRange(1, infinity)
> solve(x^5+x+3=0,x);
RootOf(_Z^5 + _Z + 3, index = 1), RootOf(_Z^5 + _Z + 3, index = 2),
RootOf(_Z^5 + _Z + 3, index = 3), RootOf(_Z^5 + _Z + 3, index = 4),
RootOf(_Z^5 + _Z + 3, index = 5)

```

Vidíme, že Maple rovnici nevyřešil.

Numerické řešení:

```

> fsolve(x^5+x+3=0,x);
-1.132997566
> fsolve(x^5+x+3=0,x,complex);
-1.132997566, -0.4753807567 - 1.129701725 I, -0.4753807567 + 1.129701725 I,
1.041879540 - 0.8228703381 I, 1.041879540 + 0.8228703381 I

```

Soustava rovnic:

```

> solve({x+y=p, p*x+y=2},{x,y});
{x = -(-2+p)/(p-1), y = (p^2-2)/(p-1)}
> x;y;
x
y
> assign(%);
> x;y;
-(-2+p)/(p-1)

```

$$\frac{p^2 - 2}{p - 1}$$

```
[ > restart;  
[ >
```

- Derivace

```
[ > f:=x^3/(x^2-1);
```

$$f := \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

```
[ > diff(f,x);
```

$$\frac{3x^2}{x^2 - 1} - \frac{2x^4}{(x^2 - 1)^2}$$

```
[ > simplify(%);
```

$$\frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

```
[ > g:=x->x^3/(x^2-1);
```

$$g := x \rightarrow \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

```
[ > diff(g,x);
```

0

```
[ > D(g);
```

$$x \rightarrow \frac{3x^2}{x^2 - 1} - \frac{2x^4}{(x^2 - 1)^2}$$

10. derivace:

```
[ > (D@@10)(g);
```

$$x \rightarrow -\frac{14689382400 x^7}{(x^2 - 1)^8} + \frac{5269017600 x^5}{(x^2 - 1)^7} - \frac{838252800 x^3}{(x^2 - 1)^6} + \frac{39916800 x}{(x^2 - 1)^5} \\ + \frac{20437401600 x^9}{(x^2 - 1)^9} - \frac{13934592000 x^{11}}{(x^2 - 1)^{10}} + \frac{3715891200 x^{13}}{(x^2 - 1)^{11}}$$

```
[ >
```

- Limity

```
[ > Limit((x-sin(x))/x^3,x=0);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

```
[ > limit((x-sin(x))/x^3,x=0);
```

```

< >
< > limit(1/x,x=0);  $\frac{1}{6}$ 
< > limit(1/x,x=0,right); undefined
< > limit(1/x,x=0,left);  $\infty$ 
< > limit(1/x,x=0,left);  $-\infty$ 
< >
Pozor!!!
< > limit(ln(x),x=0);  $-\infty$ 
< >

```

[-] Taylorův polynom

```

< > f:=sin(x);  $f := \sin(x)$ 
< > taylor(f,x=0,10);
< > 
$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

< > mtaylor(f,x=0,10);
< > 
$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$$

< > g:=tan(x);  $g := \tan(x)$ 
< > mtaylor(g,x=Pi/4,5);
< > 
$$1 + 2x - \frac{\pi}{2} + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3} + \frac{10\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{3}$$

< >

```

[-] Integrály

```

< > Int(sin(sqrt(x)),x);  $\int \sin(\sqrt{x}) dx$ 
< > int(sin(sqrt(x)),x);
< > 
$$2 \sin(\sqrt{x}) - 2 \sqrt{x} \cos(\sqrt{x})$$

< > Int(x^2,x=0..1);
< > 
$$\int_0^1 x^2 dx$$

< > int(x^2,x=0..1);

```

$$\frac{1}{3}$$

```
> Int(exp(-x^2),x=-infinity..infinity)=int(exp(-x^2),x=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

```
> Int(sin(x)/x,x)=int(sin(x)/x,x);
```

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx = \text{Si}(x)$$

Jedná se o tzv. vyšší transcendentní funkci. [?Si](#)

```
> Int(sin(x)/x,x=0..infinity)=int(sin(x)/x,x=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

```
>
```

Řady

```
> Sum(1/n^2,n=1..20);
```

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n^2}$$

```
> sum(1/n^2,n=1..20);
```

$$\frac{17299975731542641}{10838475198270720}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.596163244$$

```
> Sum(1/n^2,n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

```
> sum(1/n^2,n=1..infinity);
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

Součet třetích mocnin prvních n přirozených čísel:

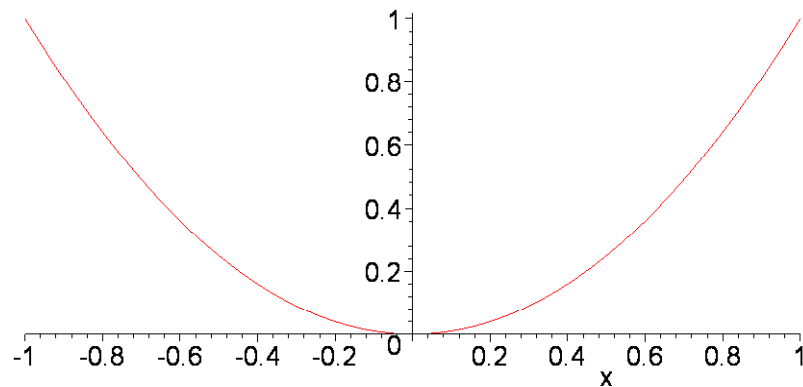
```
> Sum(i^3,i=1..n)=simplify(sum(i^3,i=1..n));
```

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

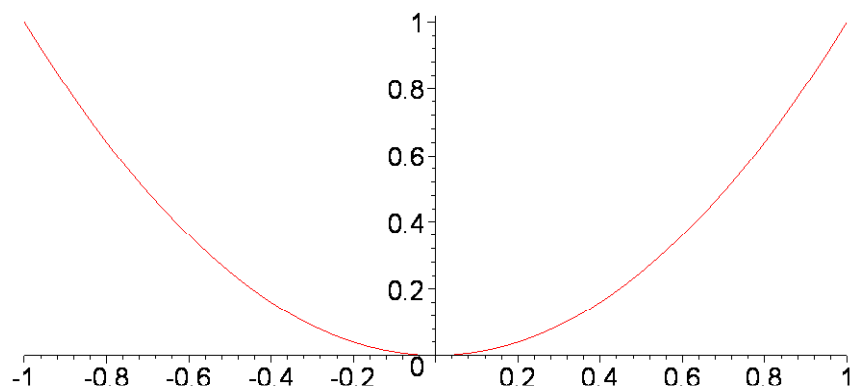
[>

Grafika a animace

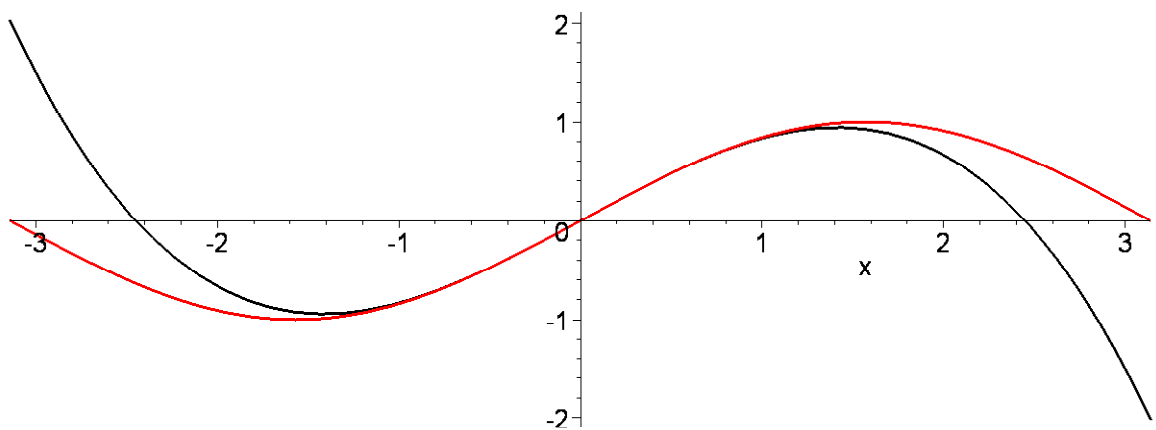
```
> plot(x^2,x=-1..1);
```



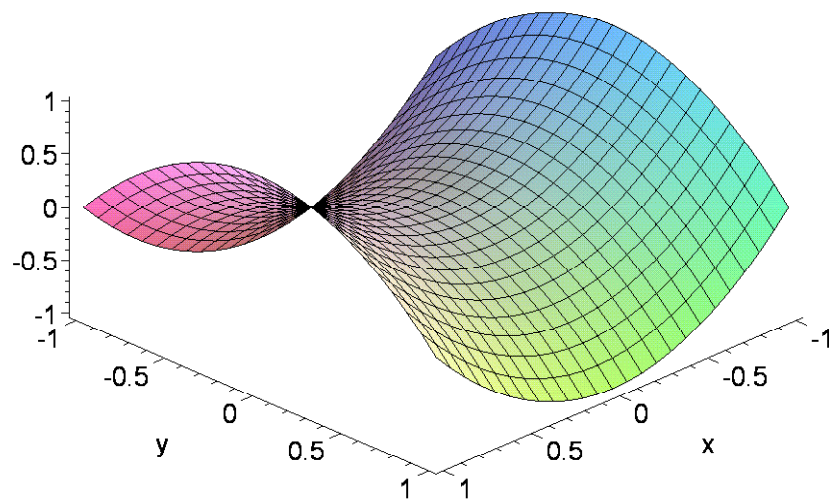
```
> plot(x->x^2,-1..1);
```



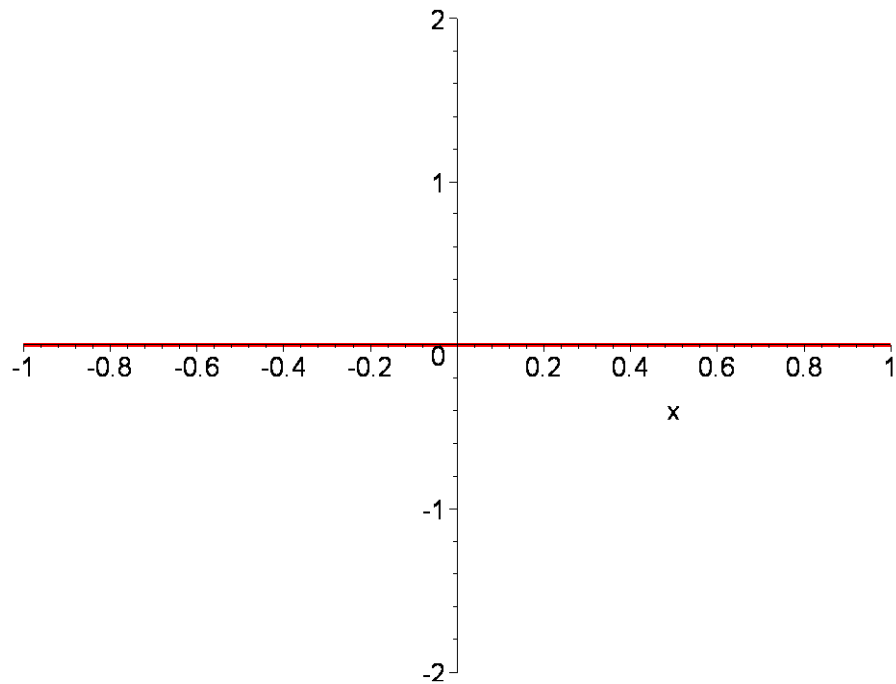
```
> plot([sin(x),x-x^3/6],x=-Pi..Pi,color=[red,black],thickness=3);
```



```
> plot3d(x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1,axes=frame);
```



```
> plots[animate]( plot,[2*sin(a)*x^2, x=-1..1, thickness=4],
a=0..2*Pi,paraminfo=false);
```



```
>
```

Teorie čísel

```
> iquo(1234,63);
19
> irem(1234,63);
37
> igcd(12003505,1000001000);
5
> lcm(12,8);
24
> ifactor(34832908568098240);
```

```

(2)6 (5) (197) (82471) (6699961)
> isprime(32439084320901);
false
> a:=nextprime(3243908432090543543543543345351);
a := 3243908432090543543543543345471
> b:=nextprime(4548359034850348534905834095438);
b := 4548359034850348534905834095513
> c:=a*b;
c := 14754460225326252014843522865768754578487027906789833369971623
> t:=time():ifactor(c);time()-t;
(3243908432090543543543543345471) (4548359034850348534905834095513)
33.828

```

Pokud bychom vzali dvě několika set místná prvočísla a vynásobili je, zpětný rozklad už je v reálném čase prakticky nemožný. Na tomto faktu jsou založeny mnohé šifrovací algoritmy.

```
>
```

- Komplexní čísla

```

> I^2;
-1
> a:=2+3*I;
a := 2 + 3 I
> b:=7-4*I;
b := 7 - 4 I
> a+b;
9 - I
> a*b;
26 + 13 I
> a/b;
2/65 + 29/65 I
> Re(a);
2
> Im(a);
3
> c:=1+sqrt(3)*I;
c := 1 + sqrt(3) I
> argument(c);
pi/3

```

```

> abs(c);
2
> polar(c);
polar(2, pi/3)
> evalc(%);
1 + sqrt(3) I
>

```

Matrice

```

> with(linalg);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian,
addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout,
blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion,
concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge,
dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal,
exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim,
gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose,
ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian,
jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol,
mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential,
randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref,
scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol,
swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim,
vector, wronskian]
> A:=<<1,2,3>|<1,2,3>|<2,3,1>>;
A := [ 1  1  2
       2  2  3
       3  3  1]
> eigenvalues(A);
0, 6, -2
> eigenvectors(A);
[0, 1, {[ -1, 1, 0]}], [-2, 1, {[ 1, 1, -2]}], [6, 1, {[ 11/18, 19/18, 1}]]
> rank(A);
2
> transpose(A);
[ 1  2  3
  1  2  3
  2  3  1]
> B:=<<1,1,1>|<2,1,4>|<5,4,1>>;

```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 11 \\ 7 & 18 & 21 \\ 7 & 13 & 28 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(B,A);
```

$$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 13 \\ 15 & 15 & 9 \\ 12 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(B);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

```
> multiply(% ,B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>
```

Cvičení

Vytvořte soubor <příjmení>.mw, popř. <příjmení>.mws, ve kterém bude řešení následujících úloh.

Soubor poté odešlete e-mailem na adresu **petr.vodstrcil@vsb.cz**.

1) Vypočtěte $2^{100} - 10^{30}$.

2) Kolika nulami končí $7321!$ (7321 faktoriál).

3) Řešte rovnici: $2x^7 - 11x^6 + 12x^5 + 4x^4 + 26x^3 - 24x^2 - 18x - 27 = 0$.

4) Rozložte na parciální zlomky: $\frac{2x^4 + 19x^3 - 42x^2 + 23x - 35}{x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2}$.

5) Nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ na intervalu $\langle -3, 3 \rangle$.

6) Rozložte na součin prvočísel číslo 48783069575366214071417382. Kolik dělitelů má toto číslo?

7) Jaký zbytek dává číslo 32428490856845087802 po dělení číslem 349724299 ?

8) Vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{\sin(x^2)}$.

9) Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \dots$

10) Vypočtěte integrál $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}} dx$.

11) Najděte inverzní matici k matici $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

12) Vypočtěte $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{I}{2} \right)^{385}$. Určete také absolutní hodnotu výsledku.

13) Vypočtěte první, druhou a třetí derivaci funkce $x^{(x^x)}$. Dále určete hodnotu 10. derivace této funkce v bodě 1.

14) Vypočtete integrál $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin(x)} dx$.

15) Vypočtete derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{1-x}$. Co si myslíte o výsledku?

16) Najděte lokální extrémů a inflexní body funkce $f(x) = e^{(-x^2)}(x^2 - 1)$. Nalezněte přesné řešení i jeho přibližnou hodnotu s přesností na 30 platných číslic.

17) Určete Taylorův polynom 6. řádu funkce $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ se středem v bodě $x_0 = 1$. Dále do jednoho obrázku vykreslete funkci f a vypočtený Taylorův polynom. To vše na intervalu $\langle -1,3 \rangle$.