

Matematická analýza 2

Varianta: **VZOROVÁ**

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

1. Určete a v \mathbb{R}^2 znázorněte definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) - \ln(1 - x^2).$$

2. Vypočtěte rovnici tečné roviny sestavené ke grafu funkce f v bodě c , je-li

$$f(x, y) = xy + \sqrt{x^2 - 3y^2}, \quad c = (2, 1, 3).$$

$$[z = 3x - y - 2]$$

3. Najděte všechny lokální extrémů funkce f definované předpisem

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}.$$

[Funkce má jediný lokální extrém – a to ostré lokální minimum v bodě $(5, 2)$.]

4. Vypočtěte integrál

$$\iint_M \frac{x}{y} dx dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 1, x \geq 0, y \leq 2\}.$$

$$[\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}]$$

5. Vypočtěte integrál

$$\iint_M \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq y\}.$$

$$[\frac{\pi}{2} \ln 2]$$

6. Vypočtěte integrál

$$\iiint_M 1 dx dy dz, \quad \text{kde}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}.$$

$$[\frac{2}{3}]$$

7. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá/nepravdivá:¹

(a) Na intervalu $(-\infty, 0)$ platí $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccotg} x$.

(b) Platí $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r \cos t dt \right) dr$.

(c) Na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ existuje globální minimum funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

(d) Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá v \mathbb{R}^2 , má f alespoň jeden lokální extrém.

(e) Platí $\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2+1}{y^2+x^2+1} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{x^2+1}{y^2+x^2+1} dx \right) dy$.

[(a), (c), (e) – pravdivé, (b), (d) – nepravdivé]

¹Za každou správnou odpověď obdržíte 2 body a za špatnou se 2 body odečtou. Nemusíte však odpovídat na všechny otázky. Maximálně můžete získat 10 bodů a minimálně 0 bodů.