Příklady k zápočtu (MA 2)

(Integrální počet funkcí více proměnných)

Vypočtěte integrály (Fubiniova věta pro dvojný integrál):

- $\iint\limits_M (x^2 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \langle 0, 2\rangle \times \langle 1, 3\rangle$;
- $\iint\limits_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \langle 0, 2\rangle \times \langle 1, 3\rangle$;
- $\iint\limits_M (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x + y \leq 2\}$;
- $\iint\limits_M \dfrac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2,\ y \leq x,\ xy \geq 1\}$;
- $\iint\limits_M \cos(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq x,\ y \leq \pi\}$;
- $\iint\limits_M (3xy^2 - 2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$;
- $\iint\limits_M \dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 1,\ x \leq 2,\ y \leq x,\ y \geq 1\}$;
- $\iint\limits_M \mathrm{e}^{2x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \leq 2,\ y \geq 0,\ y \leq 1,\ x \geq 0\}$;
- $\iint\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$;
- $\iint\limits_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$.

Vypočtěte integrály (transformace dvojného integrálu):

- $\iint\limits_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$;
- $\iint\limits_M x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$;
- $\iint\limits_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 3x,\ y \ge 0\}$;
- $\iint\limits_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\}$;
- $\iint\limits_M \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1\}$;
- $\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \frac{x^2}{4}+y^2 \le 1\right\}$;
- $\iint\limits_M (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+4y^2 \le 36,\ x \ge 0\}$.

Vypočtěte integrály (Fubiniova věta pro trojný integrál):

- $\iiint\limits_M xy^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \langle 0,2\rangle \times \langle 1,3\rangle \times \langle 1,2\rangle$;
- $\iiint\limits_M \mathrm{e}^{3x+2y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$;
- $\iiint\limits_M \frac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 2,5\rangle \times \langle 2,4\rangle$;
- $\iiint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
  $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1,\ 0 \le z \le x^2+y^2+1\}$;
- $\iiint\limits_M \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
  $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$;

- $\iiint_M x^2yz^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \le xy,\ y \ge x \ge 0,\ y \le 1,\ z \ge 0\}.$$

Vypočtěte integrály (transformace trojného integrálu):

- $\iiint_M z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \ge \sqrt{x^2+y^2},\ z \le 1\}$;
- $\iiint_M z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2\}$;
- $\iiint_M z\sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 9,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 2\};$$
- $\iiint_M (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 2z,\ z \le 2\}$;
- $\iiint_M z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2}-1 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}\};$$
- $\iiint_M (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x^2+y^2+z^2 \le 2z\};$$
- $\iiint_M xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\};$$
- $\iiint_M \sqrt{x^2+y^2+z^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le y,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\};$$
- $\iiint_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$;
- $\iiint_M z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.