Příklady k zápočtu (MA 2)

(Diferenciální počet funkcí více proměnných)

Určete a v $\mathbb{R}^2$ znázorněte definiční obor funkce f definované předpisem:

- $f(x,y) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-y^2}$;
- $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}\,\ln(xy)$;
- $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$;
- $f(x,y) = \ln(x+y)$;
- $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$.

Určete a v $\mathbb{R}^2$ znázorněte vrstevnice funkce f definované předpisem:

- $f(x,y) = 1-|x|-|y|$;
- $f(x,y) = xy$;
- $f(x,y) = 1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}$.

Spočtěte první parciální derivace funkce f podle všech proměnných, je-li:

- $f(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;
- $f(x,y) = x^y$;
- $f(x,y,z) = 2x^3 - \cos\left(x^2yz\right) - 2x$;
- $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{y}{x}$;

- $f(x,y) = \ln \frac{x+4}{y^2}$;
- $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$;
- $f(x,y) = xy^3 \ln(x+y)$;
- $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}$.

Určete diferenciál funkce f v bodě c, je-li:

- $f(x,y) = \ln \sqrt{2x^2 - y^2}, \quad c = (3, -\sqrt{2})$;
- $f(x,y,z,u) = \sin(x+y)\cos(z-u), \quad c = (0,0,0,0)$;
- $f(x,y) = xy + \frac{x^2}{y}, \quad c = (1,1)$;
- $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}, \quad c = (1,0,1)$.

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce f sestrojené v bodě c, je-li:

- $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2, \quad c = (1,1,4)$;
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad c = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
- $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad c = (1, -1, ?)$.

Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u}$, je-li:

- $f(x,y,z) = xyz, \quad c = (5,1,2), \quad u = \frac{1}{\|(4,0,-3)\|} \cdot (4,0,-3)$;
- $f(x,y) = \frac{x}{y^2}, \quad c = (1,1), \quad u = \frac{1}{\|(1,2)\|} \cdot (1,2)$;
- $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad c = (1,2,2), \quad u = \frac{1}{\|(1,0,1)\|} \cdot (1,0,1)$.

Určete, pro jaké $u \in \mathbb{R}^3$ je $\dfrac{\mathrm{d}f(c)}{\mathrm{d}u}$ největší (resp. nejmenší), je-li:

- $f(x,y,z) = z + \sin(2x) + \cos y, \quad c = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 1\right);$
- $f(x,y,z) = \dfrac{xy^2}{3+z}, \quad c = (2,1,-2).$

Určete $\mathrm{d}^k f_c$, je-li:

- $f(x,y) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + x + 3y, \quad c = (2,1), \quad k = 2;$
- $f(x,y) = \sin(2x+y), \quad c = (0,\pi), \quad k = 2;$
- $f(x,y) = \sin(2x+y), \quad c = (0,\pi), \quad k = 3.$

Najděte Taylorův polynom m–tého řádu funkce f v bodě c, je-li:

- $f(x,y) = \ln(1+x)\cdot\ln(1+y), \quad c = (0,0), \quad m = 2;$
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad c = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right), m = 2;$
- $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2} + xy, \quad c = (1,2), \quad m = 2;$
- $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, \quad c = (1,1), \quad m = 2;$
- $f(x,y) = x^3y^2 + 5xy^2 + 3xy - y^2 + 4x^2 - x + y + 1, \quad c = (0,0), \quad m = 2;$
- $f(x,y) = x^3y^2 + 5xy^2 + 3xy - y^2 + 4x^2 - x + y + 1, \quad c = (0,0), \quad m = 3.$

Najděte všechny lokální extrémy funkce f definované předpisem:

- $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 5;$
- $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 - 7;$
- $f(x,y) = 3x^2 + y^3 - 6xy - 9y + 2;$
- $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y};$

- $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$;
- $f(x,y,z) = xyz(12 - x - 2y - 3z)$;
- $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z - 1$.

Najděte globální extrémy funkce f na množině M, je-li:

- $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad M = \langle 0,2\rangle \times \langle -1,2\rangle$;
- $f(x,y) = x^2 y, \quad M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\big\}$;
- $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad M = \langle -5,1\rangle \times \langle 3,7\rangle$;
- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| \le 1\}$;
- $f(x,y) = x^2 + 2y^2, \quad M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 9\big\}$;
- $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y, \quad M$ je trojúhelník určený body $A = (0,2),\ B = (3,0),\ C = (0,-1)$.