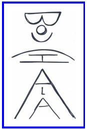
O jednom racionálním využití iracionality

Jiří Bouchala



Katedra aplikované matematiky

11. 12. 2012

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Svět vědy
CZ 1.07/2.3.00/35.0018

Uvažujme mocniny čísla 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \dots$$

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \dots$$

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2, která začíná cifrou 9?

Odpověď: Ano, například

$$2^{53} = 9007199254740992.$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 9?

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2,
která „začíná číslem“ 41 ?

Odpověď: Ano, například

$$2^{22} = 4194304.$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které „začínají číslem“ 41 ?

A stejně snadno hrubou silou zjistíme, že

$$2^{4077} = 19920137050879526265940717901546943332289967518756557090458\ldots$$

$$2^{8256} = 20120751706647203082820834423161892963769886319285588819985\ldots$$

$$\ldots$$

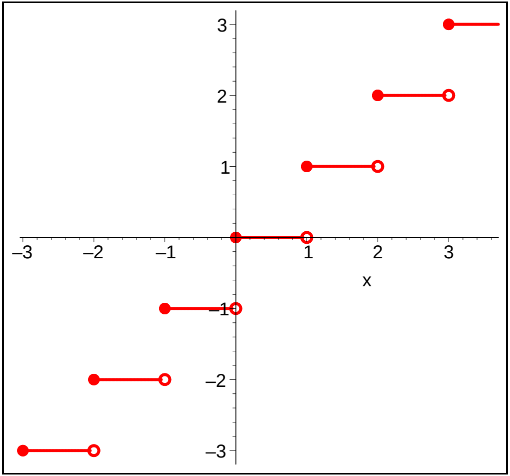
Zásadní problém:

Buď $\check{c} \in \mathbb{N}$ (zvoleno libovolně).

Kolik existuje přirozených čísel n takových, že (dekadický) zápis čísla 2^n „začíná číslem“ $\check{c}$?

Nejdříve pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujme <u>celou část čísla</u> x jako takové číslo $[x] \in \mathbb{Z}$, pro něž

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$



Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Buď $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, je $a_{n+q} = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, je posloupnost (a_n) prostá a navíc platí, že pro každé $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha < \beta$, leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) v intervalu (α, β) (tzn. $\overline{\{a_n : \; n \in \mathbb{N}\}} = \langle 0, 1 \rangle$).

Důkaz prvních dvou tvrzení je velmi snadný, neboť

$$a_{n+q} = (n+q)\frac{p}{q} - [(n+q)\frac{p}{q}] = n\frac{p}{q} + p - [n\frac{p}{q}] - p = a_n.$$

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

- Je-li
$$nx - [nx] = \underline{a_n = a_m} = mx - [mx],$$
je
$$(n-m)x = [nx] - [mx] \in \mathbb{Z},$$
a proto (x je iracionální!) $\underline{n = m}$. Posloupnost (a_n) je prostá.

- Buď $n \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha,$$
a uvažujme body
$$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \langle 0, 1 \rangle.$$
Pak zřejmě existují $i, s \in \mathbb{N}$ takové, že $i, i+s \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a že
$$0 < \varepsilon := |a_i - a_{i+s}| \leq \frac{1}{n} < \beta - \alpha.$$

- Nyní si představme reálnou osu navinutou na kružnici K o délce 1, na níž je vyznačen bod 0 (situace je podobná jako při znázorňování goniometrických funkcí, ale poloměr příslušné kružnice není 1, ale $\frac{1}{2\pi}$). Reálná čísla si znázorňujme jako body této kružnice, intervalu $(\alpha, \beta) \subset \langle 0, 1 \rangle$ pak odpovídá oblouk na této kružnici.

- Uvažujme zobrazení $f: K \to K$ definované jako otočení (v kladném směru) kolem středu K o úhel $2\pi x$ radianů a posloupnost (b_n) bodů ležících na K definovanou rekurentně:

$$b_1 = f(0),$$

$$b_2 = f(b_1) = (f \circ f)(0),$$

...

$$b_n = f(b_{n-1}) = (\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{ -krát}})(0).$$

- Všimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je délka oblouku $(0, b_n)$ rovna číslu a_n, a proto délka oblouku mezi body b_i a b_{i+s} je rovna číslu $\varepsilon < \beta - \alpha$. Takže $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{s\text{-krát}}$ je otočení o úhel $2\pi\varepsilon$ radianů.

- Z uvedených úvah již snadno plyne, že nekonečně mnoho z bodů

$$b_s,\ b_{2s},\ b_{3s},\ b_{4s},\ \ldots$$

leží v oblouku (α, β) (jehož délka je větší než ε, což je délka oblouků s krajními body b_{ns}, $b_{(n+1)s}$), a proto nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) leží v intervalu (α, β).

∎

Příklad. Uvažujme posloupnost $(\sin n)$. Není těžké nahlédnout, že

$$\lim(\sin n) \text{ neexistuje.}$$

Ukažme si, že dokonce platí

$$\overline{\{\sin n : \ n \in \mathbb{N}\}} = \langle -1, 1 \rangle.$$

Důkaz. Označme $x := \frac{1}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak zřejmě platí:

$$\sin n = \sin\left(2\pi\left(n\frac{1}{2\pi} - \left[n\frac{1}{2\pi}\right]\right)\right) = \sin\left(2\pi\left(nx - [nx]\right)\right),$$

$$\overline{\left\{nx - [nx] : \ n \in \mathbb{N}\right\}} = \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\overline{\left\{2\pi\left(nx - [nx]\right) : \ n \in \mathbb{N}\right\}} = \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Odtud a ze spojitosti funkce sinus již snadno vyplývá dokazované tvrzení. ∎

Věta (odpověď na Zásadní problém).

Buď $č \in \mathbb{N}$ dáno. Pak existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že (dekadický) zápis čísla 2^n „začíná číslem“ $č$.

Důkaz.

- Nejdříve si všimněme, že pro každé $c \in \mathbb{N}$, jehož (dekadický) zápis má právě k cifer, platí $[\log c] = k - 1$:

$$c \in \mathbb{N} \text{ má právě } k \text{ cifer}$$
$$\Downarrow$$
$$10^{k-1} \leq c < 10^k$$
$$\Downarrow$$
$$k - 1 \leq \log c < k$$
$$\Downarrow$$
$$[\log c] = k - 1.$$

- Nyní buď dáno číslo $\check{c} \in \mathbb{N}$ a uvažujme čísla $\check{c}1 := 10\check{c} + 1$, $\check{c}2 := 10\check{c} + 2$. Zřejmě platí:

$$2^n \text{ „začíná číslem“ } \check{c}$$

$$\Uparrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N} : \ \check{c}1 \cdot 10^k \leq 2^n \leq \check{c}2 \cdot 10^k$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N} : \ \log(\check{c}1) + k \leq n \log 2 \leq \log(\check{c}2) + k$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N} : \ s + \alpha + k \leq n \log 2 \leq s + \beta + k,$$

$$\text{kde } s := [\log(\check{c}1)] = [\log(\check{c}2)], 0 \leq \alpha < \beta < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N} : \ \alpha \leq n \log 2 - \underbrace{(s + k)}_{\in \mathbb{Z}} \leq \beta$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha \leq n \log 2 - [n \log 2] \leq \beta.$$

A zbývající část důkazu již snadno plyne z předcházející věty a faktu, že $\log 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ∎

... a něco numerologie:

$1931\ldots = 2^{7462}$,	$1946\ldots = 2^{10475}$,	$1961\ldots = 2^{187}$,	$1976\ldots = 2^{1064}$,	$1991\ldots = 2^{1941}$,
$1932\ldots = 2^{569}$,	$1947\ldots = 2^{1446}$,	$1962\ldots = 2^{4459}$,	$1977\ldots = 2^{5336}$,	$1992\ldots = 2^{4077}$,
$1933\ldots = 2^{6977}$,	$1948\ldots = 2^{9990}$,	$1963\ldots = 2^{1838}$,	$1978\ldots = 2^{579}$,	$1993\ldots = 2^{1456}$,
$1934\ldots = 2^{84}$,	$1949\ldots = 2^{961}$,	$1964\ldots = 2^{3974}$,	$1979\ldots = 2^{4851}$,	$1994\ldots = 2^{3592}$,
$1935\ldots = 2^{6492}$,	$1950\ldots = 2^{7369}$,	$1965\ldots = 2^{10382}$,	$1980\ldots = 2^{94}$,	$1995\ldots = 2^{971}$,
$1936\ldots = 2^{1735}$,	$1951\ldots = 2^{476}$,	$1966\ldots = 2^{1353}$,	$1981\ldots = 2^{2230}$,	$1996\ldots = 2^{3107}$,
$1937\ldots = 2^{6007}$,	$1952\ldots = 2^{6884}$,	$1967\ldots = 2^{9897}$,	$1982\ldots = 2^{10774}$,	$1997\ldots = 2^{486}$,
$1938\ldots = 2^{1250}$,	$1953\ldots = 2^{2127}$,	$1968\ldots = 2^{868}$,	$1983\ldots = 2^{1745}$,	$1998\ldots = 2^{2622}$,
$1939\ldots = 2^{5522}$,	$1954\ldots = 2^{6399}$,	$1969\ldots = 2^{7276}$,	$1984\ldots = 2^{8153}$,	$1999\ldots = 2^{9030}$,
$1940\ldots = 2^{765}$,	$1955\ldots = 2^{1642}$,	$1970\ldots = 2^{383}$,	$1985\ldots = 2^{1260}$,	$2000\ldots = 2^{2137}$,
$1941\ldots = 2^{5037}$,	$1956\ldots = 2^{5914}$,	$1971\ldots = 2^{6791}$,	$1986\ldots = 2^{7668}$,	$2001\ldots = 2^{8545}$,
$1942\ldots = 2^{280}$,	$1957\ldots = 2^{1157}$,	$1972\ldots = 2^{2034}$,	$1987\ldots = 2^{775}$,	$2002\ldots = 2^{1652}$,
$1943\ldots = 2^{4552}$,	$1958\ldots = 2^{5429}$,	$1973\ldots = 2^{6306}$,	$1988\ldots = 2^{7183}$,	$2003\ldots = 2^{5924}$,
$1944\ldots = 2^{10960}$,	$1959\ldots = 2^{672}$,	$1974\ldots = 2^{1549}$,	$1989\ldots = 2^{290}$,	$2004\ldots = 2^{1167}$,
$1945\ldots = 2^{1931}$,	$1960\ldots = 2^{4944}$,	$1975\ldots = 2^{5821}$,	$1990\ldots = 2^{6698}$,	$2005\ldots = 2^{5439}$.

Domácí úkol:

Buď $\check{c} \in \mathbb{N}$ (zvoleno libovolně).

Kolik existuje přirozených čísel n takových, že (dekadický) zápis čísla n^2 „začíná číslem“ $\check{c}$?

Literatura a zdroje

P. Strzelecki
On powers of 2
EMS Newsletter, No. 52 (2004), 7-8

V. Jarník
Diferenciální počet II
Academia, Praha (1976), 72-74

P. Vodstrčil
... ten, co umí s Maplem
Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)