Taylor vs. l'Hospital stylem KO

Matyáš „$\int_0^T M\mathrm{d}x$" Theuer

OSMA - únor 2011

Bylo by omylem domnívat se, že l'Hospitalovo pravidlo je za všech okolností nejlepší metodou výpočtu limity podílu typu „$\frac{0}{0}$". Může se stát, že po derivování čitatele a jmenovatele dostaneme zlomek složitější, než byl zlomek původní. Také je možné, že limita podílu derivací neexistuje, takže není splněn předpoklad l'Hospitalova pravidla. Mnohdy vede pohodlnější, rychlejší, nebo alespoň alternativní cesta k výpočtu limity přes tzv. Taylorovy polynomy, které využijeme k aproximaci příslušných funkcí.

Taylorův polynom

Def. 1 Nechť je reálná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována v jistém okolí $U(a)$ jistého bodu $a \in \mathbb{R}$. Existuje-li pro některé celé číslo $n \geq 0$ konečná derivace $f^{(n)}(a)$, nazývá se funkce

$$\mathcal{T}^f_{a,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{1}$$

n-tý Taylorův polynom funkce f o středu a. Je-li ze souvislosti zřejmé, o kterou funkci f a o který bod a se jedná, můžeme jej stručně značit např. $\mathcal{T}_n(x)$.

Taylorův vzorec

Def. 2 Nechť je reálná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována v jistém okolí $U(a)$ jistého bodu $a \in \mathbb{R}$ a nechť pro některé celé číslo $n \geq 0$ existuje konečná derivace $f^{(n)}(a)$. Definujme funkci $R_n(x) := f(x) - \mathcal{T}_n(x)$. Pak vztah

$$f(x) = \mathcal{T}_n(x) + R_n(x) \tag{2}$$

nazýváme Taylorovým vzorcem a $R_n(x)$ nazýváme zbytkem v Taylorově vzorci.

Věta 1 Nechť je reálná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována v jistém okolí $U(a)$ jistého bodu $a \in \mathbb{R}$, nechť existuje konečná derivace $f^{(n)}(a)$, kde $n \in \mathbb{N}$, pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{3}$$

Důkaz: Z definice zbytku plyne, že

$$R_n(a) = R'_n(a) = R''_n(a) = \ldots = R_n^{(n-1)}(a) = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Z podmínek věty a definice n-té derivace dostaneme

$$0 = R_n^{(n)}(a) = \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(a)}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{(x-a)}.$$

Existence poslední napsané limity umožňuje $(n-1)$-krát použít l'Hospitalovo pravidlo na výrazy typu "$\frac{0}{0}$". Dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \overset{\text{l'H}}{=} \dots \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!}\cdot 0 = 0.\square$$

Limitní aproximace

Def. 3 Je-li $a \in \mathbb{R}^\star$ a jsou-li f, h dvě funkce definované v jistém $P(a)$, bude značení

$$f(x) = o(h(x)) \;\text{ pro } x \to a \tag{4}$$

znamenat, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0; \tag{5}$$

jsou-li f, g, h tři funkce definované v jistém $P(a)$ bude zápis

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \;\text{ pro } x \to a \tag{6}$$

znamenat, že

$$f(x) - g(x) = o(h(x)) \;\text{ pro } x \to a. \tag{7}$$

Analogicky se definují symboly, v nichž je buď „$x \to a-$", nebo „$x \to a+$" místo „$x \to a$".

Pozn. 1 Zápis $f(x) = o(h(x))$ znamená pouze symboliku, neplatí rovnost mezi funkcemi!

Pozn. 2 Za situace (4) jsou prakticky důležité jen případy, kdy jsou limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} h(x)$ rovny 0 nebo $\pm\infty$. První případ odpovídá představě, že „pro $x \to a$ se $f(x)$ blíží k nule podstatně rychleji než $h(x)$". Například x^2 konverguje k 0 pro $x \to 0$ podstatně rychleji než x. ($\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = 0$, tedy $x^2 = o(x)$ pro $x \to 0$.)

Ve druhém případě naopak „$f(x)$ diverguje pro $x \to a$ do $\pm\infty$ podstatně pomaleji než $g(x)$". Například x^{-1} diverguje pro $x \to 0+$ do $+\infty$ podstatně pomaleji než x^{-2}. ($\lim_{x\to 0+} \frac{x^{-1}}{x^{-2}} = 0$, tedy $x^{-1} = o(x^{-2})$ pro $x \to 0+$.)

Pozn. 3 Samostatný symbol $o(h(x))$ znamená nějakou funkci f takovou, že $f(x) = o(h(x))$. Tato funkce f však není určena jednoznačně.

o-algebra

K efektivnímu počítání se symbolem o uveďme několik základních vlastností.

Věta 2 Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f, g, h, k jsou funkce definované v jistém $P(a)$. Pak pro $x \to a$ platí:

$$(i) \quad (f(x) = o(h(x)) \;\wedge\; g(x) = o(h(x))) \;\Rightarrow f(x) \pm g(x) = o(h(x)) \tag{8}$$

$$(ii) \quad (f(x) = o(h(x)) \;\wedge\; g(x) = o(k(x))) \;\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = o(h(x) \cdot k(x)) \tag{9}$$

$$(iii) \quad \exists b \in \mathbb{R} :\; 0 \neq b = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{k(x)} \Rightarrow (f(x) = o(k(x)) \;\Leftrightarrow\; f(x) = o(h(x))) \tag{10}$$

$$(iv) \quad (g(x) \text{ je omezená v } P(a) \;\wedge\; f(x) = o(h(x))) \Rightarrow\; f(x) \cdot g(x) = o(h(x)) \tag{11}$$

Důkaz: (i) Z předpokladů vyplývá, že $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ a $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$. Protože tyto limity existují, můžeme podle věty o limitě součtu psát

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0 + 0 = 0,$$

Obdobně bychom postupovali pro rozdíl f a g.$\square$

(ii) Podobně jako v předchozím důkazu můžeme podle věty o limitě součinu psát

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x) \cdot k(x)} = (\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)})(\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{k(x)}) = 0 \cdot 0 = 0. \,\square$$

(iii) Dokažme$\Rightarrow$. Z předpokladů vyplývá, že $\lim_{x\to a} |\frac{h(x)}{k(x)}| = |b|$, tedy existuje okolí bodu a takové, že funkci $|h(x)|$ tedy můžeme odhadnout $\frac{|b|}{2}|k(x)| \leq |h(x)| \leq 2|b| \cdot |k(x)|$. Podíl funkce $f(x)$ a $h(x)$ můžeme odhadnout:

$$\frac{1}{2|b|} \frac{|f(x)|}{|k(x)|} \leq \frac{|f(x)|}{|h(x)|} \leq \frac{2}{|b|} \frac{|f(x)|}{|k(x)|}.$$

Nyní můžeme použít větu o limitě sevřené funkce. Protože $\lim_{x\to a} \frac{1}{2|b|} \frac{|f(x)|}{|k(x)|} = \lim_{x\to a} \frac{2}{|b|} \frac{|f(x)|}{|k(x)|} = 0$, je i $\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|h(x)|} = 0$ a tedy $f(x) = o(h(x))$. Obdobně bychom dokázali obrácenou implikaci a tím i danou ekvivalenci. $\square$

(iv) Funkci $|g(x)|$ můžeme v nějakém $P(a)$ odhadnout číslem $m \in \mathbb{R}^+$ tak, že $|g(x)| \leq m$. Funkci $|\frac{g(x) \cdot f(x)}{h(x)}|$ můžeme odhadnout:

$$\frac{|g(x) \cdot f(x)|}{|h(x)|} \leq m \frac{|f(x)|}{|h(x)|}.$$

Limita $\lim_{x\to a} m \frac{|f(x)|}{|h(x)|} = 0$, takže $\lim_{x\to a} \frac{|g(x) \cdot f(x)|}{|h(x)|} = 0$.$\square$

Pozn. 4 Zapisujeme-li funkce f a g ve smyslu pozn. 2 můžeme tvrzení věty 2 formulovat následujícím způsobem:

$$(i) \quad o(h(x)) + o(h(x)) = o(h(x)) \tag{12}$$

$$(ii) \quad o(h(x)) \cdot o(k(x)) = o(h(x) \cdot k(x)) \tag{13}$$

$$(iv) \quad g(x) \text{ je omezená v } P(a) \Rightarrow\; g(x) \cdot o(h(x)) = o(h(x)) \tag{14}$$

Věta 3 Nechť $a, b \in \mathbb{R}^\star$, $f(y) = o(h(y))$ pro $y \to b$, $\lim_{x\to a} g(x) = b$ a $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že $\forall x \in P(a,\delta) : g(x) \neq b$, potom

$$f(g(x)) = o(h(g(x))) \quad \text{pro } x \to a. \tag{15}$$

Důkaz: Dvojice funkcí $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, $g(x)$ splňují podmínky věty o limitě složené funkce, proto:

$$0 = \lim_{y\to b} \frac{f(y)}{h(y)} = \lim_{x\to a} \frac{f(g(x))}{h(g(x))},$$

takže $f(g(x)) = o(h(g(x)))$ pro $x \to a$. $\square$

Věta 4 (o limitní aproximaci funkcí polynomy) Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pak platí:

$$f(x) = \mathcal{T}^f_{a,n}(x) + o((x-a)^n) \quad \text{pro } x \to a. \tag{16}$$

Důkaz: Podle věty 1 platí pro $R_n(x)$ v Taylorově vzorci

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

takže můžeme podle definice 3 napsat

$$R_n(x) = o((x-a)^n) \ \text{pro } x \to a$$

dosadíme-li tuto rovnost do (2) získáme uvedený předpis (16) pro $f(x)$. $\square$

Věta 5 Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pak jediný polynom $P(x)$ stupně nejvýše n, který splňuje podmínku:

$$f(x) = P(x) + o((x-a)^n) \quad \text{pro } x \to a \tag{17}$$

je $\mathcal{T}^f_{a,n}(x)$.

Důkaz: Dokažme si nejprve následující lemma:

Lemma: Nechť $Q(x)$ je polynom stupně nejvýše $n \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ a platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

pak $Q(x) \equiv 0$.

Důkaz (indukcí): Z předpokladů plyne, že $Q(a) = 0$, a je tedy kořenem $Q(x)$.

1. *$n = 1 \Rightarrow Q(x)$ je nejvýše lineární $\Rightarrow Q(x) = c(x-a)$, kde $c \in \mathbb{R}$, a proto*

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{c(x-a)}{(x-a)} = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow Q(x) \equiv 0$$

2. *$(n-1) \hookrightarrow n$: $Q(x) = (x-a)R(x)$, kde $R(x)$ je polynom stupně nejvýše $(n-1)$. Pak*

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}},$$

podle indukčních předpokladů je $R(x) \equiv 0 \Rightarrow Q(x) = (x-a)\cdot 0 \Rightarrow Q(x) \equiv 0$. $\square$(lemma)

Odečteme-li od sebe rovnice (16) a (17) dostaneme $\mathcal{T}^f_{a,n}(x) - P(x) = o((x-a)^n) - o((x-a)^n)$. Po využití vztahu (12) na pravou stranu rovnice získáváme z definice 3 podmínku:

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathcal{T}^f_{a,n}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Z právě dokázaného lemmatu vyplývá, že $\mathcal{T}^f_{a,n}(x) - P(x) \equiv 0$, to nastane právě tehdy, když $\mathcal{T}^f_{a,n}(x) = P(x)$. □

Využití

Věta 6 Jsou-li

$$\mathcal{T}^f_{a,n}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-a)^j \quad \text{a} \quad \mathcal{T}^g_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

n-té Taylorovy polynomy funkcí f, g v bodě a, tak platí:

$$(i) \quad \mathcal{T}^{f\pm g}_{a,n}(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \pm b_j)(x-a)^j \tag{18}$$

$$(ii) \quad \mathcal{T}^{f\cdot g}_{a,n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} (x-a)^m. \tag{19}$$

Důkaz[1]*:* Tvrzení (i) je triviální, dokažme si proto jen tvrzení (ii):

Podle věty 2 můžeme funkce f a g vyjádřit pomocí Taylorových polynomů $f(x) = \mathcal{T}^f_{a,n}(x) + o((x-a)^n)$ a $g(x) = \mathcal{T}^g_{a,n}(x) + o((x-a)^n)$. Vynásobíme-li takto vyjádřené funkce dostaneme

$$f(x)\cdot g(x) = \mathcal{T}^f_{a,n}(x)\cdot\mathcal{T}^g_{a,n}(x) + \mathcal{T}^f_{a,n}(x)\cdot o((x-a)^n) + \mathcal{T}^g_{a,n}(x)\cdot o((x-a)^n) + o((x-a)^n)\cdot o((x-a)^n).$$

Poslední člen můžeme podle (13) zapsat jako $o((x-a)^{2n})$. Dále platí, že $\mathcal{T}^f_{a,n}(x)$ a $\mathcal{T}^g_{a,n}(x)$ jsou omezená na nějakém $P(a)$, takže podle (14) můžeme psát

$$f(x)\cdot g(x) = \mathcal{T}^f_{a,n}(x)\cdot\mathcal{T}^g_{a,n}(x) + o((x-a)^n) + o((x-a)^n) + o((x-a)^{2n}).$$

Jelikož funkce, která je $o((x-a)^{2n})$, je zároveň $o((x-a)^n)$, můžeme tři poslední členy sečíst podle (12), takže součin f a g můžeme napsat jako součet polynomu $T(x) = \mathcal{T}^f_{a,n}(x)\cdot\mathcal{T}^g_{a,n}(x)$ řádu nejvýše $2n$ a funkce $o((x-a)^n)$:

$$f(x)\cdot g(x) = T(x) + o((x-a)^n).$$

Vybereme-li z polynomu $T(x)$ pouze ty členy, ve kterých se vyskytuje nejvýše n-tá mocnina získáme polynom $T_o(x)$ stupně nejvýše n a polynom ve tvaru $\sum_{k=n+1}^{2n} c_k (x-a)^k$, pro jehož členy platí

$$\lim_{x\to a} \frac{c_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} c_k (x-a)^{k-n} = 0,$$

což znamená, že jsou všechny $o((x-a)^n)$. Opět můžeme všechny členy $o((x-a)^n)$ sečíst podle (12). Získáme vztah:

$$f(x)\cdot g(x) = T_o(x) + o((x-a)^n).$$

Podle věty 5 je $T_o(x) = \mathcal{T}^{f\cdot g}_{a,n}(x)$. □

[1]V důkazu pro stručnost vynecháváme symbol „$x \to a$"

Příklad 1 Abychom získali čtvrtý Taylorův polynom funkce $\sin x \cdot \cos x$ o středu 0, násobíme čtvrtý Taylorův polynom prvního faktoru čtvrtým Taylorovým polynomem druhého faktoru, ale ponecháme pouze mocniny x^m s $m \leq 4$:

$$\sin x \cdot \cos x = (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) =$$
$$= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4) \text{ pro } x \to 0$$

Všechny ostatní členy „přešly" podle (12) a (13) do $o(x^4)$.

Příklad 2 Funkci $\cos x$ v čitateli limity $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$, snadno nahradíme Taylorovým vzorcem v bodě $a = 0$ pro $n = 2$. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathcal{T}_2(x) + o(x^2) - 1}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2},$$

protože funkce $o(x^2)$ je nějaká funkce f, pro kterou platí $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Příklad 3 Pro výpočet limity

$$L := \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{e^x - \sin x - 1}$$

najdeme Taylorovy polynomy čitatele i jmenovatele. Pro čitatele použijeme vztah (19) a pro jmenovatele (18) a upravíme podle věty 2 ve smyslu pozn. 4:

$$\sin^2 x = (x + o(x^2))(x + o(x^2)) = x^2 + (2x + 1) \cdot o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$
$$e^x - \sin x - 1 = (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x + o(x^2)) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Nyní dosadíme do počítané limity a rozšíříme výrazem $\frac{x^{-2}}{x^{-2}}$:

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = 2.$$

Příklad 4 Při výpočtu limity

$$L := \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(x+1)} - \sqrt[3]{(x+1)}}{x}$$

můžeme aproximujeme čitatele pomocí součtu Taylorových vzorců ($n = 1$ v bodě $a = 0$) pro funkce $(x + 1)^{\frac{1}{2}}$ a $(x + 1)^{\frac{1}{3}}$:

$$(x+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$
$$(x+1)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$$

Není potřeba použít polynom vyššího stupně, protože členy s vyšší mocninou by se zkrátily se jmenovatelem na členy s limitou 0 pro $x \to 0$. Platí tedy

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x + o(x) - 1 - \frac{1}{3}x - o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}.$$

Dodatek

Přehled použitých Taylorových vzorců pro $x \to 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(x+1)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Literatura

CERNÝ, Ilja. *Úvod do inteligentního kalkulu.* Vydání 1. Praha : Academia, 2002. Limity funkcí - 2. část, s. 69-84. ISBN 80-200-1017-3.