Exponenciální funkce - zavedení a základní vlastnosti

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

VŠB-TU Ostrava, 29.3.2011
Mirko Rokyta
KMA MFF UK Praha

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- 1,

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x,$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- 1, x, x^n,

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots,$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x$,

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x,$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots,$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\ldots$, $\arcsin x$,

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x,$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- 1, x, x^n, $\sqrt[n]{x}$,..., $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ..., $\arcsin x$, $\arccos x$, ...
- $\exp x$, $\ln x$,

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- 1, x, x^n, $\sqrt[n]{x}$,..., $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ..., $\arcsin x$, $\arccos x$, ...
- $\exp x$, $\ln x$, ..., obecné mocniny a logaritmy

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x, \ln x, \ldots,$ obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \dots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \dots, \arcsin x, \arccos x, \dots$
- $\exp x, \ln x, \dots$, obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x, \ln x, \ldots,$ obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x, \ln x, \ldots$, obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \dots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \dots, \arcsin x, \arccos x, \dots$
- $\exp x, \ln x, \dots,$ obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

$\Longrightarrow$ **Všechny elementární funkce jsou elementární, ale některé jsou “elementárnější” než jiné.**

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x, \ln x, \ldots,$ obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

$\Longrightarrow$ **Všechny elementární funkce jsou elementární, ale některé jsou "elementárnější" než jiné.**

- $\boxed{1}, \boxed{x}, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x, \ln x, \ldots$, obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

$\Longrightarrow$ **Všechny elementární funkce jsou elementární, ale některé jsou “elementárnější” než jiné.**

- $\boxed{1}, \boxed{x}, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\boxed{\sin x}, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x, \ln x, \ldots,$ obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

$\Longrightarrow$ **Všechny elementární funkce jsou elementární, ale některé jsou "elementárnější" než jiné.**

- $\boxed{1}, \boxed{x}, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\boxed{\sin x}, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\boxed{\exp x}, \ln x, \ldots,$ obecné mocniny a logaritmy

1. Úvod: elementární funkce

Elementární funkce a potřeba jejich dobrých definic.

- $1, x, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\exp x, \ln x, \ldots,$ obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

$\Longrightarrow$ **Všechny elementární funkce jsou elementární, ale některé jsou “elementárnější” než jiné.**

- $\boxed{1}, \boxed{x}, x^n, \sqrt[n]{x}, \ldots, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \frac{P(x)}{Q(x)}$
- $\boxed{\sin x}, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
- $\boxed{\exp x}, \ln x, \ldots,$ obecné mocniny a logaritmy
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak “co nejlépe” definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak “co nejlépe” definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst.

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak “co nejlépe” definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst.
  Další námitka: není to definice “kruhem”?)

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak “co nejlépe” definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst.
  Další námitka: není to definice “kruhem”?)
- Řadou?

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak "co nejlépe" definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst. Další námitka: není to definice "kruhem"?)
- Řadou? $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

$\Longrightarrow$ Základní (reálné) elementární funkce:

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak "co nejlépe" definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst. Další námitka: není to definice "kruhem"?)
- Řadou? $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

  (Námitka: málo intuitivní;

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak “co nejlépe” definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst. Další námitka: není to definice “kruhem”?)
- Řadou? $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
  (Námitka: málo intuitivní; je například nějak vidět, že je opravdu 2π-periodická?

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak “co nejlépe” definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst. Další námitka: není to definice “kruhem”?)
- Řadou? $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$
  (Námitka: málo intuitivní; je například nějak vidět, že je opravdu 2π-periodická? A co součtové vzorce?)

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak "co nejlépe" definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst. Další námitka: není to definice "kruhem"?)
- Řadou? $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
  (Námitka: málo intuitivní; je například nějak vidět, že je opravdu 2π-periodická? A co součtové vzorce?)
- Popisem vlastností,

$\Longrightarrow$ **Základní (reálné) elementární funkce:**

- $1, x, \boxed{\sin x}, \boxed{\exp(x)}$
- 4 aritmetické operace & inverze funkce & složení funkcí, a jejich konečné opakování

Jak “co nejlépe” definovat (například) funkci sinus?

- Z jednotkové kružnice?
  (Námitka: spočtěte $\sin 1$ na 17 desetinných míst. Další námitka: není to definice “kruhem”?)
- Řadou? $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
  (Námitka: málo intuitivní; je například nějak vidět, že je opravdu 2π-periodická? A co součtové vzorce?)
- Popisem vlastností, které ji **jednoznačně** určují.

2. Přípravné práce

- Exponenciála a její co nejefektivnější zavedení.

2. Přípravné práce

- Exponenciála a její co nejefektivnější zavedení.
  (Co to je “nejefektivnější”?)

2. Přípravné práce

- Exponenciála a její co nejefektivnější zavedení.
  (Co to je “nejefektivnější”?)
  (Ukážeme: stačí součtový vzorec a jedna (přirozená) nerovnost.)

2. Přípravné práce

- Exponenciála a její co nejefektivnější zavedení.
  (Co to je “nejefektivnější”?)
  (Ukážeme: stačí součtový vzorec a jedna (přirozená) nerovnost.)
- Intermezzo: Kterak (ne)oklamat spořitelnu.

2. Přípravné práce

- Exponenciála a její co nejefektivnější zavedení.
  (Co to je “nejefektivnější”?)
  (Ukážeme: stačí součtový vzorec a jedna (přirozená) nerovnost.)
- Intermezzo: Kterak (ne)oklamat spořitelnu.

$$\ldots \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n .$$

2. Přípravné práce

- Exponenciála a její co nejefektivnější zavedení.
  (Co to je “nejefektivnější”?)
  (Ukážeme: stačí součtový vzorec a jedna (přirozená) nerovnost.)
- Intermezzo: Kterak (ne)oklamat spořitelnu.

$$\ldots \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n .$$

- Poznámka: test pro “selský rozum nastupujících studentů”: Tipněte si, čemu je rovna (pokud existuje)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

2. Přípravné práce

- Exponenciála a její co nejefektivnější zavedení.
  (Co to je “nejefektivnější”?)
  (Ukážeme: stačí součtový vzorec a jedna (přirozená) nerovnost.)
- Intermezzo: Kterak (ne)oklamat spořitelnu.

$$\ldots \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n .$$

- Poznámka: test pro “selský rozum nastupujících studentů”: Tipněte si, čemu je rovna (pokud existuje)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Vzhůru k formalismu.

Co budeme potřebovat:

Co budeme potřebovat:

- Tvrzení: monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost reálných čísel má vlastní limitu.

Co budeme potřebovat:

- Tvrzení: monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost reálných čísel má vlastní limitu.
- Pro $\alpha_j \geq 0$, ($j = 1, \dots, n$), $n \in \mathbb{N}$, platí:

$$\alpha_1 \, \alpha_2 \dots \, \alpha_n \leq \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right)^n$$

Co budeme potřebovat:

- Tvrzení: monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost reálných čísel má vlastní limitu.
- Pro $\alpha_j \geq 0$, ($j = 1, \dots, n$), $n \in \mathbb{N}$, platí:

$$\alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_n \leq \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right)^n \qquad (\textit{A-G nerovnost}).$$

Co budeme potřebovat:

- Tvrzení: monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost reálných čísel má vlastní limitu.
- Pro $\alpha_j \geq 0$, ($j = 1, \ldots, n$), $n \in \mathbb{N}$, platí:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \leq \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right)^n \qquad (\textit{A-G nerovnost}).$$

- Pro $x > -2$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Co budeme potřebovat:

- Tvrzení: monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost reálných čísel má vlastní limitu.
- Pro $\alpha_j \geq 0$, ($j = 1, \dots, n$), $n \in \mathbb{N}$, platí:

$$\alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_n \leq \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right)^n$$ (*A-G nerovnost*).

- Pro $x > -2$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$ (*Bernoulliho nerovnost*).

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ *existuje vlastní* $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
Zvolíme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ pevné a uvažujeme $n \geq k$.

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
Zvolíme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ pevné a uvažujeme $n \geq k$.
(Pak totiž $1 \pm \frac{x}{n} \geq 0$).

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ *existuje vlastní* $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
Zvolíme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ pevné a uvažujeme $n \geq k$.
(Pak totiž $1 \pm \frac{x}{n} \geq 0$).

- **Monotonie.**

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
Zvolíme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ pevné a uvažujeme $n \geq k$.
(Pak totiž $1 \pm \frac{x}{n} \geq 0$).

- **Monotonie.** Z A-G nerovnosti:

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
Zvolíme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ pevné a uvažujeme $n \geq k$.
(Pak totiž $1 \pm \frac{x}{n} \geq 0$).

- **Monotonie.** Z A-G nerovnosti:

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \quad \leq$$

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
Zvolíme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ pevné a uvažujeme $n \geq k$.
(Pak totiž $1 \pm \frac{x}{n} \geq 0$).

- **Monotonie.** Z A-G nerovnosti:

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \quad \leq \quad \left(\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Lemma 1

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Důkaz. Pro $x \in \mathbb{R}$ pevné označíme $a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
Zvolíme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ pevné a uvažujeme $n \geq k$.
(Pak totiž $1 \pm \frac{x}{n} \geq 0$).

- **Monotonie.** Z A-G nerovnosti:

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \quad \leq \quad \left(\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \quad \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}\,.$$

- **Omezenost.**

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\left(\underbrace{1+\frac{x}{nk}}_{\geq 0}\right)^{-n}$$

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\Bigg(\underbrace{1 + \frac{x}{nk}}_{\geq 0}\Bigg)^{-n} = \Bigg(\underbrace{1 - \frac{x}{nk + x}}_{\geq 0}\Bigg)^{n}$$

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\left(\underbrace{1 + \frac{x}{nk}}_{\geq 0}\right)^{-n} = \left(\underbrace{1 - \frac{x}{nk + x}}_{\geq 0}\right)^{n} \geq 1 - \frac{nx}{nk + x}$$

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\Big(\underbrace{1+\frac{x}{nk}}_{\geq 0}\Big)^{-n} = \Big(\underbrace{1-\frac{x}{nk+x}}_{\geq 0}\Big)^{n} \geq 1-\frac{nx}{nk+x} \geq 1-\frac{x}{k} > 0\,.$$

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\Big(\underbrace{1+\frac{x}{nk}}_{\geq 0}\Big)^{-n} = \Big(\underbrace{1-\frac{x}{nk+x}}_{\geq 0}\Big)^{n} \geq 1-\frac{nx}{nk+x} \geq 1-\frac{x}{k} > 0\,.$$

Po umocnění a úpravě:

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\Big(\underbrace{1+\frac{x}{nk}}_{\geq 0}\Big)^{-n} = \Big(\underbrace{1-\frac{x}{nk+x}}_{\geq 0}\Big)^{n} \geq 1-\frac{nx}{nk+x} \geq 1-\frac{x}{k} > 0\,.$$

Po umocnění a úpravě:

$$\Big(1+\frac{x}{nk}\Big)^{nk} \leq \Big(1-\frac{x}{k}\Big)^{-k}$$

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\Big(\underbrace{1+\frac{x}{nk}}_{\geq 0}\Big)^{-n} = \Big(\underbrace{1-\frac{x}{nk+x}}_{\geq 0}\Big)^{n} \geq 1-\frac{nx}{nk+x} \geq 1-\frac{x}{k} > 0\,.$$

Po umocnění a úpravě:

$$\Big(1+\frac{x}{nk}\Big)^{nk} \leq \Big(1-\frac{x}{k}\Big)^{-k} =: C > 0\,,$$

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\Bigl(\underbrace{1+\frac{x}{nk}}_{\geq 0}\Bigr)^{-n} = \Bigl(\underbrace{1-\frac{x}{nk+x}}_{\geq 0}\Bigr)^{n} \geq 1-\frac{nx}{nk+x} \geq 1-\frac{x}{k} > 0\,.$$

Po umocnění a úpravě:

$$\Bigl(1+\frac{x}{nk}\Bigr)^{nk} \leq \Bigl(1-\frac{x}{k}\Bigr)^{-k} =: C > 0\,,$$

tedy $a_{nk} \leq C$ pro všechna přirozená n.

- **Omezenost.** Z Bernoulliho nerovnosti (x, k pevné, $n \in \mathbb{N}$ libovolné):

$$\Big(\underbrace{1 + \frac{x}{nk}}_{\geq 0}\Big)^{-n} = \Big(\underbrace{1 - \frac{x}{nk+x}}_{\geq 0}\Big)^{n} \geq 1 - \frac{nx}{nk+x} \geq 1 - \frac{x}{k} > 0\,.$$

Po umocnění a úpravě:

$$\Big(1 + \frac{x}{nk}\Big)^{nk} \leq \Big(1 - \frac{x}{k}\Big)^{-k} =: C > 0\,,$$

tedy $a_{nk} \leq C$ pro všechna přirozená n. To spolu s monotonií posloupnosti dává omezenost.

$\square$

3. Zavedení exponenciály

Hlavní věta.

3. Zavedení exponenciály

Hlavní věta.

Věta 2

Existuje jediná funkce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

3. Zavedení exponenciály

Hlavní věta.

Věta 2

Existuje jediná funkce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \tag{1}$$

3. Zavedení exponenciály

Hlavní věta.

Věta 2

Existuje jediná funkce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \exp x \cdot \exp y && (1) \\ \exp x &\geq 1 + x && (2) \end{aligned}$$

3. Zavedení exponenciály

Hlavní věta.

Věta 2

Existuje jediná funkce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

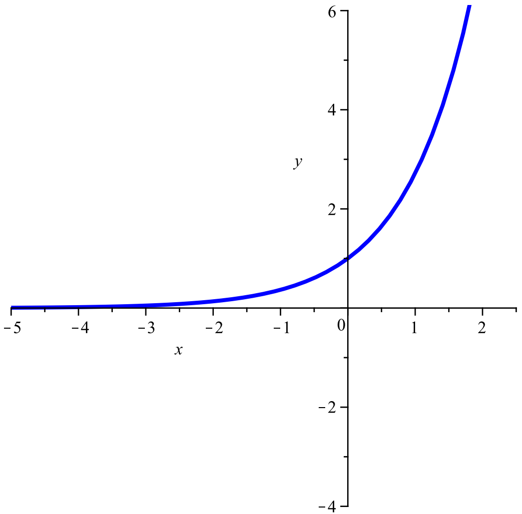
$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \tag{1}$$

$$\exp x \geq 1 + x \tag{2}$$

pro všechna reálná x, y.

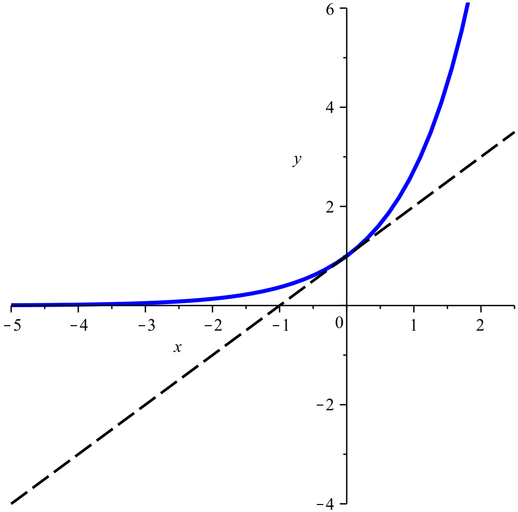
Ilustrace druhé vlastnosti:

$$\exp(x) \geq 1 + x$$



Ilustrace druhé vlastnosti:

$$\exp(x) \geq 1 + x$$



Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1)

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$ $\implies$ $\exp(0)$ je 0 nebo 1.

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$ $\implies$ $\exp(0)$ je 0 nebo 1. První možnost je však ve sporu s (2), a proto $\exp(0) = 1$.

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$ $\implies$ $\exp(0)$ je 0 nebo 1. První možnost je však ve sporu s (2), a proto $\exp(0) = 1$.
- $y = -x$ v (1)

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$ $\implies$ $\exp(0)$ je 0 nebo 1. První možnost je však ve sporu s (2), a proto $\exp(0) = 1$.
- $y = -x$ v (1) $\implies$ $1 = \exp(0) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$ $\implies$ $\exp(0)$ je 0 nebo 1. První možnost je však ve sporu s (2), a proto $\exp(0) = 1$.
- $y = -x$ v (1) $\implies$ $1 = \exp(0) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$ $\implies$ $\exp \neq 0$ na $\mathbb{R}$, a,

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$ $\implies$ $\exp(0)$ je 0 nebo 1. První možnost je však ve sporu s (2), a proto $\exp(0) = 1$.
- $y = -x$ v (1) $\implies$ $1 = \exp(0) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$ $\implies$ $\exp \neq 0$ na $\mathbb{R}$, a,

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

- (1) $\implies$ $\exp(2x) = (\exp(x))^2$

Důkaz.
Nechť funkce daných vlastností existuje.

1) Trivialitky:

- $x = y = 0$ v (1) $\implies$ $\exp(0) = (\exp(0))^2$ $\implies$ $\exp(0)$ je 0 nebo 1. První možnost je však ve sporu s (2), a proto $\exp(0) = 1$.
- $y = -x$ v (1) $\implies$ $1 = \exp(0) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$ $\implies$ $\exp \neq 0$ na $\mathbb{R}$, a,

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

- (1) $\implies$ $\exp(2x) = (\exp(x))^2$ a odtud indukcí $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ pro přirozená n.

1) Hlavní odhad:

1) Hlavní odhad:

$$1 + x \;\leq\; \exp x$$

1) Hlavní odhad:

$$
\begin{aligned}
1 + x &\leq \exp x \\
1 + \frac{x}{n} &\leq \exp \frac{x}{n}
\end{aligned}
$$

1) Hlavní odhad:

$$\begin{aligned} 1 + x &\leq \exp x \\ 1 + \frac{x}{n} &\leq \exp \frac{x}{n} \end{aligned}$$

(nyní zvolím n dostatečně velké:)

1) Hlavní odhad:

$$
\begin{aligned}
1 + x &\leq \exp x \\
1 + \frac{x}{n} &\leq \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)} \\
0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

1) Hlavní odhad:

$$
\begin{aligned}
1 + x &\leq \exp x \\
1 + \frac{x}{n} &\leq \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)} \\
0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp x
\end{aligned}
$$

1) Hlavní odhad:

$$1 + x \leq \exp x$$

$$1 + \frac{x}{n} \leq \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)}$$

$$0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp x$$

$$0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(-x)$$

1) Hlavní odhad:

$$
\begin{aligned}
1 + x &\leq \exp x \\
1 + \frac{x}{n} &\leq \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)} \\
0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp x \\
0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &\leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}
\end{aligned}
$$

1) Hlavní odhad:

$$\begin{aligned}
1 + x &\leq \exp x \\
1 + \frac{x}{n} &\leq \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)} \\
0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp x \\
0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &\leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \\
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \exp x
\end{aligned}$$

1) Hlavní odhad:

$$\begin{aligned}
1+x &\leq \exp x \\
1+\frac{x}{n} &\leq \exp\frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)} \\
0<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &\leq \left(\exp\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\cdot\frac{x}{n}\right) = \exp x \\
0<\left(1-\frac{x}{n}\right)^n &\leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \\
\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &\leq \exp x \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}
\end{aligned}$$

1) Hlavní odhad:

$$
\begin{aligned}
1 + x \;&\leq\; \exp x \\
1 + \frac{x}{n} \;&\leq\; \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)} \\
0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \;&\leq\; \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp x \\
0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \;&\leq\; \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \\
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \;&\leq\; \exp x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \\
1 \;&\leq\; \frac{\exp x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}
\end{aligned}
$$

1) Hlavní odhad:

$$
\begin{aligned}
1 + x &\leq \exp x \\
1 + \frac{x}{n} &\leq \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)} \\
0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp x \\
0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &\leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \\
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\leq \exp x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \\
1 &\leq \frac{\exp x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n} \overset{\text{Bern.}}{\leq} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}
\end{aligned}
$$

1) Hlavní odhad:

$$1 + x \leq \exp x$$

$$1 + \frac{x}{n} \leq \exp \frac{x}{n} \qquad \text{(nyní zvolím } n \text{ dostatečně velké:)}$$

$$0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp x$$

$$0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

$$1 \leq \frac{\exp x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n} \overset{\text{Bern.}}{\leq} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Tedy jsme ukázali, že pokud funkce exp vlastností (1)–(2) existuje, pak pro $x \in \mathbb{R}$ je

Tedy jsme ukázali, že pokud funkce exp vlastností (1)–(2) existuje, pak pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = 1\,,$$

Tedy jsme ukázali, že pokud funkce exp vlastností (1)–(2) existuje, pak pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1\,, \tag{4}$$

odtud (viz Lemma 1),

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n . \tag{5}$$

Tedy jsme ukázali, že pokud funkce exp vlastností (1)–(2) existuje, pak pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1\,, \tag{4}$$

odtud (viz Lemma 1),

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{5}$$

Existence $\implies$ jednoznačnost.

Tedy jsme ukázali, že pokud funkce exp vlastností (1)–(2) existuje, pak pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1\,, \tag{4}$$

odtud (viz Lemma 1),

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{5}$$

Existence $\implies$ jednoznačnost.
Explicitní vzorec (5) $\implies$ existence.

Tedy jsme ukázali, že pokud funkce exp vlastností (1)–(2) existuje, pak pro $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1\,, \tag{4}$$

odtud (viz Lemma 1),

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n . \tag{5}$$

Existence $\implies$ jednoznačnost.
Explicitní vzorec (5) $\implies$ existence. Vlastnosti?

4. Intermezzo: řada pro exponenciálu

Zavedení exponenciály řadou? Proč ne:

4. Intermezzo: řada pro exponenciálu

Zavedení exponenciály řadou? Proč ne:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

4. Intermezzo: řada pro exponenciálu

Zavedení exponenciály řadou? Proč ne:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

- Mocninná řada (6) konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (dokonce $x \in \mathbb{C}$).

4. Intermezzo: řada pro exponenciálu

Zavedení exponenciály řadou? Proč ne:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

- Mocninná řada (6) konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (dokonce $x \in \mathbb{C}$).
- Násobení (absolutně konvergentních) řad $\Longrightarrow$

4. Intermezzo: řada pro exponenciálu

Zavedení exponenciály řadou? Proč ne:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

- Mocninná řada (6) konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (dokonce $x \in \mathbb{C}$).
- Násobení (absolutně konvergentních) řad $\Longrightarrow$

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y) \tag{7}$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ (dokonce $x, y \in \mathbb{C}$).

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$,

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$.

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$,

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies E(-x) > 0$ pro $x > 0$.

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies$ $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1, \implies E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.
- $x > 0 \implies E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies$ $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.
- $x > 0 \implies E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0 \implies$ $E(x) > 1 + x$.

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies$ $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.
- $x > 0 \implies E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0 \implies$ $E(x) > 1 + x$.
- $x > 0 \implies$ $1 - E(x)(1 - x) = x^2(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + x^3(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots > 0$.

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies$ $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.
- $x > 0 \implies E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0 \implies$ $E(x) > 1 + x$.
- $x > 0 \implies$
  $1 - E(x)(1 - x) = x^2(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + x^3(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots > 0.$

  $1 - E(x)(1 - x) > 0$

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies$ $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.
- $x > 0 \implies E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0 \implies$ $E(x) > 1 + x$.
- $x > 0 \implies$ $1 - E(x)(1 - x) = x^2(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + x^3(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots > 0.$

$$1 - E(x)(1 - x) > 0 \implies E(-x) - (1 - x) > 0\,, \quad x > 0\,,$$

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies$ $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.
- $x > 0 \implies E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0 \implies$ $E(x) > 1 + x$.
- $x > 0 \implies$ $1 - E(x)(1-x) = x^2(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + x^3(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots > 0.$

$$1 - E(x)(1-x) > 0 \implies E(-x) - (1-x) > 0\,, \quad x > 0\,,$$

to je ovšem $E(x) > 1 + x$ pro $x < 0$.

Stačí tedy ukázat $E(x) \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Přímo z (6): $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (6): $E(0) = 1$. Podle (7) je i $E(-x) \cdot E(x) = 1$, $\implies$ $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Celkem $E(x) > 0$ pro všechna reálná x.
- $x > 0 \implies E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0 \implies$ $E(x) > 1 + x$.
- $x > 0 \implies$ $1 - E(x)(1-x) = x^2(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + x^3(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots > 0.$

  $$1 - E(x)(1-x) > 0 \implies E(-x) - (1-x) > 0\,, \quad x > 0\,,$$

  to je ovšem $E(x) > 1 + x$ pro $x < 0$. Celkem tedy

$$E(x) \geq 1 + x \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Věta 3

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Věta 3

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ *je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Poznámky.

- Řada vlevo má vlastnosti (1)–(2), má je tedy i limita vpravo.

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Věta 3

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Poznámky.

- Řada vlevo má vlastnosti (1)–(2), má je tedy i limita vpravo. (To ještě chybělo k důkazu Věty 2.)

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Věta 3

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Poznámky.

- Řada vlevo má vlastnosti (1)–(2), má je tedy i limita vpravo. (To ještě chybělo k důkazu Věty 2.)
- Komplexní exponenciála, sinus a kosinus.

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Věta 3

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Poznámky.

- Řada vlevo má vlastnosti (1)–(2), má je tedy i limita vpravo. (To ještě chybělo k důkazu Věty 2.)
- Komplexní exponenciála, sinus a kosinus.
- $e := \exp(1) \implies \ln(e) = 1.$

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Věta 3

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Poznámky.

- Řada vlevo má vlastnosti (1)–(2), má je tedy i limita vpravo. (To ještě chybělo k důkazu Věty 2.)
- Komplexní exponenciála, sinus a kosinus.
- $e := \exp(1) \implies \ln(e) = 1$.
- Obecná mocnina $a^b := \exp(b \ln(a))$ $(a > 0,\ b \in \mathbb{R})$,

Z jednoznačnosti (viz Věta 2) tedy nutně plyne

Věta 3

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Poznámky.

- Řada vlevo má vlastnosti (1)–(2), má je tedy i limita vpravo. (To ještě chybělo k důkazu Věty 2.)
- Komplexní exponenciála, sinus a kosinus.
- $e := \exp(1) \implies \ln(e) = 1$.
- Obecná mocnina $a^b := \exp(b \ln(a))$ ($a > 0$, $b \in \mathbb{R}$), $e^x := \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim_{x \to +\infty} e^x \geq \lim_{x \to +\infty} (1 + x) = +\infty$,

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$,
  $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$,
  $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
- Základní limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$,
  $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
- Základní limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

- Derivace:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \geq \lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$,
  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
- Základní limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

- Derivace:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

je vlastní $\forall x \in \mathbb{R}$

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$,
  $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
- Základní limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

- Derivace:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

je vlastní $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ spojitost.

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$,
  $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.
- Základní limita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

- Derivace:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

je vlastní $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ spojitost. Derivace kladná $\implies$ exp roste

5. Všechny důležité vlastnosti exp

Odvození dalších vlastností funkce e^x je jednoduché.

- exp je kladná na $\mathbb{R}$,
  $\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$,
  $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$.
- Základní limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\,.$$

- Derivace:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

je vlastní $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ spojitost. Derivace kladná $\implies$ exp roste a zobrazuje tedy prostě reálnou osu na $(0,+\infty)$.

6. Dodatek: *exp* není racionální funkce

Lemma 4

Exponenciála není racionální funkce, tj. neexistují žádné (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že

$$e^x = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Sporem:

$$e^x\, Q \;=\; P$$

6. Dodatek: *exp* není racionální funkce

Lemma 4

Exponenciála není racionální funkce, tj. neexistují žádné (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že

$$e^x = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Sporem:

$$\begin{aligned} e^x Q &= P \\ \text{proderivování:} \qquad e^x Q + e^x Q' &= P' \end{aligned}$$

6. Dodatek: *exp* není racionální funkce

Lemma 4

Exponenciála není racionální funkce, tj. neexistují žádné (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že

$$e^x = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Sporem:

$$\begin{aligned} && e^x\,Q &= P \\ \text{proderivování:} && e^x\,Q + e^x\,Q' &= P' \\ e^x = \frac{P}{Q}: && P + \frac{P}{Q}\,Q' &= P' \end{aligned}$$

6. Dodatek: *exp* není racionální funkce

Lemma 4

Exponenciála není racionální funkce, tj. neexistují žádné (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že

$$e^x = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Sporem:

$$\begin{aligned} e^x Q &= P \\ \text{proderivování:} \qquad e^x Q + e^x Q' &= P' \\ e^x = \frac{P}{Q}: \qquad P + \frac{P}{Q} Q' &= P' \\ P(Q + Q') &= P'Q \end{aligned}$$

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') \quad = \quad P'Q\,. \tag{8}$$

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') \quad = \quad P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\implies$ P nedělí Q

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') \quad = \quad P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\Longrightarrow$ P nedělí Q $\Longrightarrow$ P dělí P'

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') = P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\Longrightarrow$ P nedělí Q $\Longrightarrow$ P dělí P' $\Longrightarrow$ P=konst. ($\neq 0$, nutně).

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') = P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\implies$ P nedělí Q $\implies$ P dělí P' $\implies$ P=konst. ($\neq 0$, nutně).
- P=konst. $\neq 0$

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') \;=\; P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\implies$ P nedělí Q $\implies$ P dělí P' $\implies$ P=konst. ($\neq 0$, nutně).
- P=konst. $\neq 0 \implies Q + Q' = 0$

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') \quad = \quad P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\implies$ P nedělí Q $\implies$ P dělí P' $\implies$ P=konst. ($\neq 0$, nutně).
- P=konst. $\neq 0 \implies Q + Q' = 0 \implies Q = -Q'$,

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') \quad = \quad P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\implies$ P nedělí Q $\implies$ P dělí P' $\implies$ P=konst. ($\neq 0$, nutně).
- P=konst. $\neq 0 \implies Q + Q' = 0 \implies Q = -Q'$, což nesplňuje žádný nenulový polynom (derivace snižuje stupeň).

Tedy pokud existují (nesoudělné) polynomy $P = P(x)$, $Q = Q(x)$ takové, že $e^x = \frac{P}{Q}$, je

$$P(Q + Q') \;=\; P'Q\,. \tag{8}$$

Ale:

- Nesoudělnost $\implies$ P nedělí Q $\implies$ P dělí P' $\implies$ P=konst. ($\neq 0$, nutně).
- P=konst. $\neq 0 \implies Q + Q' = 0 \implies Q = -Q'$, což nesplňuje žádný nenulový polynom (derivace snižuje stupeň).

Alternativně:

- Stupeň polynomu vpravo v (8) je ostře menší než stupeň polynomu vlevo (pokud je P nekonstantní a Q nenulový).

$\square$

7. Ještě dodatek: multinomická věta

Binomická věta:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

7. Ještě dodatek: multinomická věta

Binomická věta:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \approx \qquad \boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

7. Ještě dodatek: multinomická věta

Binomická věta:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \approx \qquad \boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Multinomická věta:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdots e^{x_k} = e^{x_1+x_2+\cdots+x_k}$$

7. Ještě dodatek: multinomická věta

Binomická věta:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \approx \qquad \boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Multinomická věta:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdots e^{x_k} = e^{x_1+x_2+\cdots+x_k} \qquad \approx$$

$$\boxed{(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n \\ \alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}}\,.$$

To je vše.

Děkuji za pozornost.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

mirko.rokyta@mff.cuni.cz