# Laplaceova (a Poissonova) PDR

Nechť $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega$ je otevřená, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a je zadaná $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Následující PDR označme

$$\text{Laplaceova rovnice:} \qquad -\Delta u = 0 \tag{1}$$
$$\text{Poissonova rovnice:} \qquad -\Delta u = f. \tag{2}$$

Funkci $v \in C^2$ splňující (1) nazveme harmonická funkce. Laplaceův operátor $-\Delta u = -\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}\right)$ je invariantní k translaci a rotaci (viz 6.1).

*Poznámka* 1. Pojmy harmonická funkce (v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) a holomorfní funkce (v $\Omega \subset \mathbb{C}$) spolu (po obvyklém ztotožnění $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$) souvisejí: Obě složky $u$ a $v$ funkce $f = u + iv$, která je holomorfní na otevřené množině $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ jsou harmonické na otevřené množině $\Omega_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, z = x + iy \in \Omega_{\mathbb{C}}\}$. Z Cauchyho-Riemannových podmínek

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

totiž plyne

$$\begin{aligned}\triangle u &= u_{xx} + u_{yy} = \partial_x(v_y) + \partial_y(-v_x) = 0\\ \triangle v &= v_{xx} + v_{yy} = \partial_x(-u_y) + \partial_y(u_x) = 0.\end{aligned}$$

Připomeňme, že holomorfní funkce je automaticky $f \in C^\infty(\mathbb{C})$.

## 1 Vlastnosti Laplaceova operátoru

Funkci $u \in C^2(\Omega)$ nazveme na otevřené množině $\Omega$

$$\begin{aligned}\text{subharmonická} &\Leftrightarrow -\triangle u \le 0 \ \forall \underline{x} \in \Omega\\ \text{superharmonická} &\Leftrightarrow -\triangle u \ge 0 \ \forall \underline{x} \in \Omega.\end{aligned}$$

**Věta 2.** *Mějme subharmonickou funkci $u$ na (otevřené) množině $\Omega$ a kouli $B^n(\underline{x}; R)$ se středem v bodě $\underline{x} \in \Omega$ a poloměrem $R$, která je celá uvnitř $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Označme dále*

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x}; r)|} \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} u(\underline{\xi}) \, \mathrm{d}S(\underline{\xi}), \quad 0 < r < R. \tag{3}$$

*Pak pro všechna $r \in (0, R)$ je $\varphi'(r) \ge 0$ a navíc*

$$\lim_{r \to 0^+} \varphi(r) = u(\underline{x})\,. \tag{4}$$

*Důkaz.* Nejprve dokažme tvrzení $\varphi' \ge 0$. Předpis pro $\varphi$ lze (viz vzorce v odstavcích 5.4 a 5.3) upravit na

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{1}{|\partial B^n(\underline{0}; r)|} \int_{\partial B^n(\underline{0};r)} u(\underline{x} + \underline{w}) \, \mathrm{d}S(\underline{w})\\
&= \frac{1}{r^{n-1} |\partial B^n(\underline{0}; 1)|} \int_0^{2\pi} \overbrace{\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi}^{n-2} u(\underline{x} + \underline{w}(r, \varphi, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}))(-1)^n r^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_{n-2}) \cdots \sin(\phi_1) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\phi_1 \ldots \mathrm{d}\phi_{n-2}\\
&= \frac{1}{|\partial B^n(\underline{0}; 1)|} \int_0^{2\pi} \overbrace{\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi}^{n-2} u(\underline{x} + r\underline{w}(1, \varphi, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}))(-1)^n \sin^{n-2}(\phi_{n-2}) \cdots \sin(\phi_1) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\phi_1 \ldots \mathrm{d}\phi_{n-2}\\
&= \frac{1}{|\partial B^n(\underline{0}; 1)|} \int_{\partial B^n(\underline{0};1)} u(\underline{x} + r\underline{z}) \, \mathrm{d}S(\underline{z}).\end{aligned}$$

Toho lze využít pro výpočet derivace (přechod od $\underline{x} + r\underline{z}$ zpět ke $\underline{\xi}$ se provede analogicky jako v předchozích úpravách)

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \frac{1}{|\partial B^n(\underline{0}; 1)|} \int_{\partial B^n(\underline{0};1)} \nabla u(\underline{x} + r\underline{z}) \cdot \underline{z} \, \mathrm{d}S(\underline{z}) = \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x}; r)|} \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} \nabla u(\underline{\xi}) \cdot \frac{\underline{\xi} - \underline{x}}{r} \, \mathrm{d}S(\underline{\xi})\\
&= \frac{1}{|\partial B(\underline{x}; r)|} \int_{B(\underline{x};r)} \operatorname{div}\left(\nabla u(\underline{y})\right) \, \mathrm{d}\underline{y} = \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x}; r)|} \int_{B^n(\underline{x};r)} \triangle u(\underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} \ge 0,\end{aligned} \tag{5}$$

protože $\triangle u \geq 0$. V úpravách jsme využili Gaussovy věty a toho, že jednotkový vektor vnější normály $\underline{n}(\underline{\xi})$ lze ve všech bodech $\underline{\xi} \in \partial B^n(\underline{x};r)$ napsat jako $\underline{n}(\xi) = \frac{\underline{\xi}-\underline{x}}{r}$. Nyní se věnujme druhému tvrzení, $\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = u(\underline{x})$. Následujícími úpravami odhadneme

$$
\begin{aligned}
|\varphi(r) - u(\underline{x})| &= \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x};r)|} \left| \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} u(\underline{\xi}) - u(\underline{x}) \,\mathrm{d}S(\underline{\xi}) \right| \leq \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x};r)|} \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} \left| u(\underline{\xi}) - u(\underline{x}) \right| \,\mathrm{d}S(\underline{\xi}) \\
&\leq \sup_{\underline{\xi}\in\partial B^n(\underline{x};r)} \left| u(\underline{\xi}) - u(\underline{x}) \right| ,
\end{aligned}
$$

jelikož pro všechny $\underline{\xi} \in B^n(\underline{x};r)$ je $\|\underline{\xi} - \underline{x}\| = r$, plyne ze spojitosti $u$ limita (4). □

**Důsledek 3.** *Za předpokladů z věty 2 navíc pro všechna $r \in (0, R)$ platí*

$$
u(\underline{x}) \leq \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x};r)|} \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} u(\underline{\xi}) \,\mathrm{d}S(\underline{\xi}) \tag{6}
$$

$$
u(\underline{x}) \leq \frac{1}{|B^n(\underline{x};r)|} \int_{B^n(\underline{x};r)} u(\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} \,. \tag{7}
$$

*Důkaz.* Platnost (6) plyne z vlastnosti $\varphi' \geq 0$, definice $\varphi$ (3) a limitní vlastnosti (4). Nerovnost (7) plyne z

$$
\begin{aligned}
u(\underline{x})\frac{|B^n(\underline{x};r)|}{|B^n(\underline{x};r)|} &= \frac{u(\underline{x})}{|B^n(\underline{x};r)|} \int_0^r |\partial B^n(\underline{x};\rho)| \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{|B^n(\underline{x};r)|} \int_0^r u(\underline{x})|\partial B^n(\underline{x};\rho)| \,\mathrm{d}\rho \\
&\overset{(6)}{\leq} \frac{1}{|B^n(\underline{x};r)|} \int_0^r \int_{\partial B^n(\underline{x};\rho)} u(\underline{\xi}) \,\mathrm{d}S(\underline{\xi}) \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{|B^n(\underline{x};r)|} \int_{B^n(\underline{x};r)} u(\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} \,.
\end{aligned}
$$

□

*Poznámka* 4. Máme-li superharmonickou funkci $u$, lze využít věty (2) a důsledku (3) pro funkci $-u$ a obdržet tak analogii (6) a (7) s opačným znaménkem. Je-li $u$ harmonická, je přímým důsledkem následující věta.

**Věta 5** (O střední hodnotě harmonické funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $u$ harmonická funkce. Pak pro všechna $\underline{x} \in \Omega$ a všechna $r > 0$ takové, že $\overline{B^n(\underline{x};r)} \subset \Omega$ platí*

$$
u(\underline{x}) = \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x};r)|} \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} u(\underline{\xi}) \,\mathrm{d}S(\underline{\xi}) = \frac{1}{|B^n(\underline{x};r)|} \int_{B^n(\underline{x};r)} u(\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} \,.
$$

Platí také opačné tvrzení

**Věta 6.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $u \in C^2(\Omega)$ a pro všechna $\underline{x} \in \Omega$ a všechna $r > 0$ takové, že $\overline{B^n(\underline{x};r)} \subset \Omega$ platí*

$$
u(\underline{x}) = \frac{1}{|\partial B^n(\underline{x};r)|} \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} u(\underline{\xi}) \,\mathrm{d}S(\underline{\xi})
$$

*pak je $u$ harmonická v $\Omega$.*

*Důkaz.* Použijeme-li označení (3) pak z předpokladů plyne $\varphi'(s) = 0$ pro $s \in (0, r)$. Použijme důkaz sporem; kdyby nebylo $u$ harmonické, existovalo by takové $\underline{x} \in \Omega$, že $|\triangle u(\underline{x})| > 0$ a vzhledem ke spojitosti $u$ by existovala koule $B^n(\underline{x};\rho) \in \Omega$ taková, že uvedená nerovnost by platila v celé kouli $\overline{B^n(\underline{x};\rho)}$. Ze vzorce (5) pro $\varphi'$ plyne $\varphi'(r) \neq 0$ což je ve sporu se vzorcem pro $u$ v předpokladu. □

**Věta 7.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast (otevřená a souvislá množina), $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ je subharmonická v $\Omega$. Pak platí*

$$
\max_{\underline{y}\in\overline{\Omega}} u(\underline{y}) = \max_{\underline{y}\in\partial\Omega} u(\underline{y}) \,. \tag{8}
$$

*Pokud existuje $\underline{x} \in \Omega$ takové, že*

$$
u(\underline{x}) = \max_{\underline{y}\in\overline{\Omega}} u(\underline{y}) \tag{9}
$$

*tak je $u$ konstantní na $\Omega$.*

*Důkaz.* Dokažme nejprve druhé tvrzení. Nechť platí (9) a položme $M = u(\underline{x})$, pak existuje koule o poloměru $r > 0$, $B^n(\underline{x}; r) \subset \Omega$, na které pak platí

$$M = u(\underline{x}) \overset{(7)}{\leq} \frac{1}{|B^n(\underline{x}; r)|} \int_{B^n(\underline{x};r)} u(\underline{y})\, \mathrm{d}\underline{y} \overset{(9)}{\leq} u(x) = M \tag{10}$$

což vzhledem k (9) znamená, že je $u$ konstantní na $B^n(\underline{x}; r)$. Kdyby tomu tak nebylo, tak by existovala v $B^n(\underline{x}; r)$ taková množina (nenulové míry, $u$ je spojitá), na které by bylo $u(\underline{y}) < u(\underline{x})$, což by by spor s (10). Označme

$$A = \left\{ \underline{y} \in \Omega \middle|\, y(\underline{y}) = M \right\}$$

(dle předpokladu neprázdnou) množinu všech vzorů čísla $M$ v zobrazení $u$. Víme, že pro každé $y \in A \subset \Omega$ existuje otevřená koule $B^n(\underline{y}; r) \subset \Omega$, že pro všechny $\underline{z} \in B^n(\underline{y}; r)$ je $u(\underline{z}) = M$. Množinu $A$ lze popsat jako sjednocení otevřených množin, je tedy otevřená. Množina $A$ je množinou všech vzorů čísla $M$ ve spojitém zobrazení $u$. Jednoprvková množina $\{M\}$ je uzavřená a vzorem uzavřené množiny ve spojitém zobrazení je uzavřená množina. Množina $A$ je tedy také uzavřená v $\Omega$. Neprázdná množina $A$ je současně uzavřená a otevřená v souvislé množině $\Omega$, je tedy $A = \Omega$.

První tvrzení plyne přímým důsledkem z druhého. □

## 2 Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Před četbou tohoto odstavce si prostudujte pomocné poznámky 5.4 o kouli v $\mathbb{R}^n$. Řešme (1) v hypersférických souřadnicích [wiki]. Z invariance Laplaceova operátoru k translaci a rotaci plyne, že řešení $v$ bude záviset pouze na vzdálenosti od počátku:

$$v(\underline{x}) = w(r)$$

kde $r = \|\underline{x}\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ a platí tedy

$$\begin{aligned} r_{x_i} &= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r} \\ r_{x_i x_j} &= \frac{1}{r}\delta_{ij} + x_i\,(-1)\,r^{-2} r_{x_j} = \frac{1}{r}\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^3} \end{aligned}$$

pro nenulové $\underline{x}$. Vyjádřeme Laplaceovu rovnici v hypersférických souřadnicích:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= w'(r)\frac{x_i}{r} \\ v_{x_i x_i} &= w''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + w'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\ 0 = \Delta v &= \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i} = w''(r)\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2} + w'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^3}\right) \\ &= w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r)\,. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme ODR, kterou zkusíme vyřešit. Pro $r > 0$ a $w' \neq 0$ (konstantní řešení nás nezajímá) pak

$$\begin{aligned} \frac{1-n}{r} &= \frac{1}{w'} w'' = (\ln(w'))' \\ \ln(w') &= \int \frac{1-n}{r}\,\mathrm{d}r = (1-n)\ln(r) + c_1 \\ w' &= c_2 r^{1-n} = \frac{c_2}{r^{n-1}} \\ w &= \begin{cases} b\ln(r) + c & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & n \geq 3\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Funkci

$$\Phi(\underline{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(|\underline{x}|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|\underline{x}|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

kde $\underline{0} \neq \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha(n)$ je objem jednotkové $n-$rozměrné koule $B^n(0;1)$ nazveme fundamentální řešení Laplaceovy rovnice. Pro $\Phi(\underline{x})$ platí

$$\Phi(\underline{x}) = \Phi(|\underline{x}|)$$
$$\Phi_{x_i}(\underline{x}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i}{|\underline{x}|^n}$$
$$\Phi_{x_i x_j}(\underline{x}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \left( \frac{\delta_{ij}}{|\underline{x}|^n} - n \frac{x_i x_j}{|\underline{x}|^{n+2}} \right)$$

a proto se dá odhadnout (odhady platí pro nějakou konstantu $c > 0$):

$$|D\Phi(\underline{x})| = \left( \sum_{a_1+\cdots+a_d=1} \left| D^{(a_1,\ldots,a_d)} \Phi(\underline{x}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\underline{x}|^{n-1}} \leq \frac{c}{|\underline{x}|^{n-1}}$$
$$\nabla\Phi(\underline{x}) \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|\underline{x}|^n} \frac{x_i}{|\underline{x}|} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\underline{x}|^{n-1}} \tag{11}$$
$$\left| D^2\Phi(\underline{x}) \right| = \left( \sum_{a_1+\cdots+a_d=2} \left| D^{(a_1,\ldots,a_d)} \Phi(\underline{x}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c}{|\underline{x}|^n}\,.$$

Podívejme se pro $k \in \mathbb{N}$ na integrály

$$\int_{B^2(\underline{0};\varepsilon)} |\ln(|\underline{x}|)| \, \mathrm{d}\underline{x} \overset{\varepsilon\in(0,1)}{=} -\int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \ln(r) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi \lim_{\sigma\to 0+} \left[ \frac{r^2}{4} (2\ln(r) - 1) \right]_{\sigma}^{\varepsilon} = 2\pi \left| \frac{\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \right| \overset{\varepsilon\in(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})}{\leq} 2\pi\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)|$$

$$\int_{B^n(\underline{0};\varepsilon)} |\underline{x}|^{-k} \, \mathrm{d}\underline{x} = \int_0^{\varepsilon} \int_{\partial B^n(\underline{0};r)} |r|^{-k} \, \mathrm{d}S(\underline{\xi}) \mathrm{d}r = \int_0^{\varepsilon} |r|^{-k} \overbrace{|\partial B^n(\underline{0};r)|}^{r^{n-1}|\partial B^n(\underline{0};1)|} \, \mathrm{d}r$$
$$= \kappa(n) \int_0^{\varepsilon} r^{n-1-k} \, \mathrm{d}r = \begin{cases} \frac{\kappa(n)}{n-k} \varepsilon^{n-k} < \infty & 0 \leq n-1-k \\ \infty & 0 > n-1-k\,. \end{cases}$$

Funkce $|\underline{x}|^{-k}$ je tedy integrovatelná na $B^n(\underline{0};\varepsilon)$ právě tehdy když $k \leq n-1$, z čehož plyne $\Phi, \partial_i\Phi \in L^1\left(B^n(\underline{0};\varepsilon)\right)$ a $\partial_j\partial_i\Phi \notin L^1\left(B^n(\underline{0};\varepsilon)\right)$. Dále:

$$\int_{\partial B^2(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)| \, \mathrm{d}S(y) = |\ln(\varepsilon)| \, |\partial B^2(\underline{0};\varepsilon)| = |\ln(\varepsilon)| \varepsilon |\partial B^2(\underline{0};1)| = |\ln(\varepsilon)| 2\pi\varepsilon$$
$$\int_{\partial B^n(\underline{0};\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}S(y) = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} |\partial B^2(\underline{0};\varepsilon)| = \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}} |\partial B^2(\underline{0};1)| = n\alpha(n)\varepsilon$$

a proto

$$\int_{B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y} - \underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{y} = \begin{cases} \int_{B^2(\underline{0};\varepsilon)} -\frac{1}{2\pi} \ln(|\underline{y}|) \, \mathrm{d}\underline{y} & n = 2 \\ \int_{B^n(\underline{0};\varepsilon)} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|\underline{y}|^{n-2}} \, \mathrm{d}\underline{y} & n \geq 3 \end{cases} \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)| & n = 2 \\ C\varepsilon^2 & n \geq 3 \end{cases} \tag{12}$$
$$\int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y} - \underline{x}) \, \mathrm{d}S(\underline{y}) = \begin{cases} \int_{\partial B^2(\underline{0};\varepsilon)} -\frac{1}{2\pi} \ln(|\underline{y}|) \, \mathrm{d}S(\underline{y}) & n = 2 \\ \int_{\partial B^n(\underline{0};\varepsilon)} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|\underline{y}|^{n-2}} \, \mathrm{d}S(\underline{y}) & n \geq 3 \end{cases} \leq \begin{cases} C\varepsilon |\ln(\varepsilon)| & n = 2 \\ C\varepsilon & n \geq 3\,. \end{cases} \tag{13}$$

# 3 Věta o třech potenciálech

Dokažme, že pro omezenou oblast $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s dostatečně hladkou hranicí (takovou aby platila Gaussova-Ostrogradského věta) a funkci $u \in C^2(\overline{\Omega})$ platí (tzv. věta o třech potenciálech) pro všechna $\underline{x} \in \Omega$:

$$u(\underline{x}) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Phi(\underline{y} - \underline{x}) u_{\underline{n}}(\underline{y}) \, \mathrm{d}S(\underline{y})}_{v_u(\underline{x}) \text{ potenciál jednoduché vrstvy}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Phi_{\underline{n}}(\underline{y} - \underline{x}) u(\underline{y}) \, \mathrm{d}S(\underline{y})}_{w_u(\underline{x}) \text{ potenciál dvojvrstvy}} - \underbrace{\int_{\Omega} \Phi(\underline{y} - \underline{x}) \Delta u(\underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y}}_{\varphi_u(\underline{x}) \text{ objemový potenciál}}\,. \tag{14}$$

**Důkaz** Předně si uvědomíme, že pro $\varepsilon > 0$ jsou $\Phi(\underline{y}-\underline{x})$ a $\Phi_{\underline{n}}(\underline{y}-\underline{x})$ integrovatelné na $\Omega \setminus \overline{B^n(\underline{x};\varepsilon)}$. Vzpomeneme si na druhou Greenovu formuli (20) a aplikujme ji na oblast $\Omega \setminus \overline{B^n(\underline{x};\varepsilon)}$

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B^n(\underline{x};\varepsilon)}} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\Delta u(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y} = \int_{\Omega \setminus \overline{B^n(\underline{x};\varepsilon)}} \overbrace{\Delta_{\underline{y}}\Phi(\underline{y}-\underline{x})}^{=0}\, u(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y}$$
$$+ \left( \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \right) \left[\Phi(\underline{y}-\underline{x})u_{\underline{n}}(\underline{y}) - u(\underline{y})\Phi_{\underline{n}}(\underline{y}-\underline{x})\right]\,\mathrm{d}S(\underline{y})\,.$$

V objemovém potenciálu na pravé straně (14) rozdělíme $\Omega = \left(\Omega \setminus \overline{B^n(\underline{x};\varepsilon)}\right) \cup \overline{B^n(\underline{x};\varepsilon)}$ a využijeme právě odvozeného vztahu:

$$v_u(\underline{x}) - w_u(\underline{x}) - \varphi_u(\underline{x}) = v_u(\underline{x}) - w_u(\underline{x}) - \int_{\Omega \setminus \overline{B^n(\underline{x};\varepsilon)}} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\Delta u(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y} - \int_{B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\Delta u(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y}$$
$$= \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} u(\underline{y})\Phi_{\underline{n}}(\underline{y}-\underline{x})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) - \underbrace{\int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}-\underline{x})u_{\underline{n}}(\underline{y})\,\mathrm{d}S(\underline{y})}_{\to 0} - \underbrace{\int_{B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\Delta u(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y}}_{\to 0}\,,$$

protože $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $\Phi \in L^1\left(B^n(\underline{0};\varepsilon)\right)$ lze tedy s použitím (12) a (13) prokázat, že opravdu

$$\int_{B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\Delta u(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y} \le \|D^2u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \int_{B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{y} \to 0$$
$$\int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}-\underline{x})u_{\underline{n}}(\underline{y})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) \le \|Du\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) \to 0\,.$$

Ve zbývajícím integrálu na chvíli zapomeňme na $u$ a získáme tak rovnost

$$\int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi_{\underline{n}}(\underline{y}-\underline{x})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) = \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \nabla\Phi(\underline{y}-\underline{x}) \cdot \underbrace{\left(-\frac{\underline{y}-\underline{x}}{|\underline{y}-\underline{x}|}\right)}_{\underline{n}}\,\mathrm{d}S(\underline{y})$$
$$\overset{(11)}{=} \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \frac{1}{\kappa(n)\varepsilon^{n-1}}\,\mathrm{d}S(\underline{y}) = \frac{|\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)|}{\kappa(n)\varepsilon^{n-1}} = 1\,, \tag{15}$$

kterou dále využijeme v odhadu

$$\left| u(\underline{x}) - \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} u(\underline{y})\Phi_\nu(\underline{y}-\underline{x})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) \right| \overset{(15)}{=} \left| \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \left[u(\underline{x}) - u(\underline{y})\right] \Phi_{\underline{n}}(\underline{y}-\underline{x})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) \right|$$
$$\le \sup_{y \in \partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \left|u(\underline{x}) - u(\underline{y})\right| \left| \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} \Phi_{\underline{n}}(\underline{y}-\underline{x})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) \right| \to 0\,,$$

jelikož $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Tímto je dokázána věta o třech potenciálech. Dále zmíníme několik důsledků:

- Je-li $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, tedy $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a $\operatorname{supp}(u)$ je kompaktní, pak

  $$u(\underline{x}) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}-\underline{x})\Delta u(\underline{y})\,\mathrm{d}\underline{y}\,,$$

  což plyne z věty o třech potenciálech v případě, že použijeme dostatečně velkou oblast $\Omega \supset \operatorname{supp}(u)$ a vypadnou tedy potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy, jelikož $u = u_{\underline{n}} = 0$ na $\partial\Omega$.

- Pokud je $u$ harmonická ($\Delta u = 0$), pak vypadne objemový potenciál a

  $$u(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} \Phi(\underline{y}-\underline{x})u_{\underline{n}}(\underline{y})\,\mathrm{d}S(\underline{y}) - \int_{\partial\Omega} \Phi_{\underline{n}}(\underline{y}-\underline{x})u(\underline{y})\,\mathrm{d}S(\underline{y})\,.$$

- Pokud je $\Omega$ otevřená a $u$ harmonická, pak $u \in C^\infty(\Omega)$ a ke každému $\underline{y} \in \Omega$ existuje okolí, na kterém lze $u$ vyjádřit pomocí Taylorovy řady.

Poslední tvrzení je nutné dokázat. Nechť tedy $\underline{y} \in \Omega$ a $r$ je takový poloměr otevřené koule $B^n(\underline{y}; r)$ se středem v $\underline{y}$, že $\overline{B^n(\underline{y}; r)} \subset \Omega$. Pro všechny $\underline{x} \in B^n(\underline{y}; r)$ pak platí

$$u(\underline{x}) = \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} \Phi(\underline{z} - \underline{x}) u_{\underline{n}}(\underline{z}) \, \mathrm{d}S(\underline{z}) - \int_{\partial B^n(\underline{x};r)} \Phi_{\underline{n}}(\underline{z} - \underline{x}) u(\underline{z}) \, \mathrm{d}S(\underline{z})$$

DOKONCIT

# 4 Řešení Poissonovy rovnice

Dokažme, že pro $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, (tj. $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a $f$ má kompaktní support) a pro funkci $v$ danou vzorcem

$$v(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{x} - \underline{y}) f(\underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\underline{x} - \underline{y}|) f(\underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\underline{y})}{|\underline{x}-\underline{y}|^{n-2}} \, \mathrm{d}\underline{y} & n \geq 3 \end{cases} \tag{16}$$

platí $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a je řešením Poissonovy rovnice (2). Toto tvrzení si dokážeme:

**Důkaz** $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ Předně ukážeme, že integrální vztah v (16) je konvoluce, tj. že

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{x} - \underline{y}) f(\underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) f(\underline{x} - \underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} \equiv (\Phi * f)(\underline{x}) \, .$$

Rozepišme (16) na složený integrál

$$v(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{x} - \underline{y}) f(\underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\underline{x} - \underline{y}) f(\underline{y}) \, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n \, ,$$

použijeme substituci $i \in \{1, \ldots, n\}$: $z_i = x_i - y_i$,

$$\mathrm{d}z_i = -\mathrm{d}y_i, \qquad \begin{array}{lll} y_i \to \infty & \Rightarrow z_i & \to -\infty \\ y_i \to -\infty & \Rightarrow z_i & \to \infty \end{array}$$

a tedy:

$$\begin{aligned} v(\underline{x}) &= \int_{\infty}^{-\infty} \cdots \int_{\infty}^{-\infty} \Phi(\underline{z}) f(\underline{x} - \underline{z}) (-1)^n \, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\underline{z}) f(\underline{x} - \underline{z}) \, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \qquad \text{přeznačení } \underline{y} = \underline{z} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\underline{y}) f(\underline{x} - \underline{y}) \, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) f(\underline{x} - \underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} \, . \end{aligned}$$

Jelikož je integrál v (16) konvolucí, lze zapsat

$$\frac{v(\underline{x} + h\underline{e}_i) - v(\underline{x})}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) \frac{f(\underline{x} + h\underline{e}_i - \underline{y}) - f(\underline{x} - \underline{y})}{h} \, \mathrm{d}\underline{y} \, .$$

Výraz $\frac{f(\underline{x}+h\underline{e}_i-\underline{y})-f(\underline{x}-\underline{y})}{h}$ na pravé straně konverguje stejnoměrně k $f_{x_i}(\underline{x} - \underline{y})$, $f$ má kompaktní support, a proto [wiki]:

$$\begin{aligned} v_{x_i}(\underline{x}) &= \lim_{h \to 0} \frac{v(\underline{x} + h\underline{e}_i) - v(\underline{x})}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) \lim_{h \to 0} \left[ \frac{f(\underline{x} + he_i - \underline{y}) - f(\underline{x} - \underline{y})}{h} \right] \mathrm{d}\underline{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) f_{x_i}(\underline{x} - \underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} \qquad \text{a podobně} \\ v_{x_i x_j}(\underline{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) f_{x_i x_j}(\underline{x} - \underline{y}) \, \mathrm{d}\underline{y} \, . \end{aligned}$$

Připomeňme si předpoklad $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ a pravá strana v posledním výrazu je tedy spojitá vzhledem k proměnné $x$ a (pokud integrál existuje) je $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Ukažme nyní, že opravdu $-\Delta v = f$. Podívejme se na

$$\begin{aligned}
\Delta v(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\underline{y}) \Delta_{\underline{x}} f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} \\
&= \underbrace{\int_{B^n(\underline{0};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}) \Delta_{\underline{x}} f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y}}_{I_1(\varepsilon)} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B^n(\underline{0};\varepsilon)}} \Phi(\underline{y}) \Delta_{\underline{x}} f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} \\
&\overset{(17)}{=} I_1(\varepsilon) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B^n(\underline{0};\varepsilon)}} \Phi(\underline{y}) \Delta_{\underline{y}} f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} \\
&\overset{(19)}{=} I_1(\varepsilon) + \underbrace{\int_{\partial B^n(\underline{0};\varepsilon)} \Phi(\underline{y}) f_{\underline{n}}(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}S(\underline{y})}_{I_2(\varepsilon)} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B^n(\underline{0};\varepsilon)}} \underline{\nabla}\Phi(\underline{y}) \cdot \underline{\nabla}_{\underline{y}} f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y} \\
&\overset{(19)}{=} I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) \underbrace{- \int_{\partial B^n(\underline{0};\varepsilon)} \Phi_{\underline{n}}(\underline{y}) f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}S(\underline{y})}_{I_3(\varepsilon)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B^n(\underline{0};\varepsilon)}} \Delta\Phi(\underline{y}) \cdot f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}\underline{y}}_{0},
\end{aligned}$$

kde jsme využili skutečnosti, že

$$\begin{aligned}
\Delta_{\underline{x}} f(\underline{x}-\underline{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_i} \big(f(\underline{x}-\underline{y})\big) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \big(f_i(\underline{x}-\underline{y}) \cdot 1\big) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{ii}(\underline{x}-\underline{y})}_{} \\
&\hphantom{=} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Vert \\
\Delta_{\underline{y}} f(\underline{x}-\underline{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\partial_{y_i} \big(f(\underline{x}-\underline{y})\big) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} \big(f_i(\underline{x}-\underline{y}) \cdot (-1)\big) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{ii}(\underline{x}-\underline{y})}^{},
\end{aligned} \tag{17}$$

dvakrát první Greenovy věty (19) a skutečnosti, že $\Delta\Phi = 0$ mimo počátek $\underline{0}$. Jenom upozorňujeme, že $\underline{n}$ zde označuje vnitřní normálu ke kouli $B^n(\underline{0};\varepsilon)$. Pro $I_1$, $I_2$ platí

$$\begin{aligned}
|I_1(\varepsilon)| &\le k\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^n(\underline{0};\varepsilon)} \big|\Phi(\underline{y})\big| \,\mathrm{d}\underline{y} \overset{(12)}{\le} \begin{cases} C\varepsilon^2 \,|\ln(\varepsilon)| & n=2 \\ C\varepsilon^2 & n \ge 3 \end{cases} \\
|I_2(\varepsilon)| &\le \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \,\mathrm{d}S(y) \overset{(13)}{\le} \begin{cases} C\varepsilon |\ln(\varepsilon)| & n=2 \\ C\varepsilon & n \ge 3 \end{cases} \\
I_3(\varepsilon) &= -\int_{\partial B^n(\underline{0};\varepsilon)} \left(\underline{\nabla}\Phi(\underline{y}) \cdot \left(-\frac{\underline{y}}{|\underline{y}|}\right)\right) f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}S(\underline{y}) \overset{(11)}{=} -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B^n(\underline{0};\varepsilon)} f(\underline{x}-\underline{y}) \,\mathrm{d}S(\underline{y}) \\
&= -\frac{1}{|\partial B^n(\underline{0};1)|} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} f(\underline{y}) \,\mathrm{d}S(\underline{y}) = -\frac{1}{|\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)|} \int_{\partial B^n(\underline{x};\varepsilon)} f(\underline{y}) \,\mathrm{d}S(\underline{y}) \ \ldots \text{ integrální průměr } f \text{ na sféře } \partial B^n(\underline{x};\varepsilon).
\end{aligned}$$

Snadno pak ukážeme, že první dva výrazy $I_1(\varepsilon)$, $I_2(\varepsilon)$ jsou k nule pro $\varepsilon \to 0+$. Limita $I_3(\varepsilon)$ je $f(\underline{x})$, jelikož $f$ je spojitá. Ukázali jsme tedy, že $\Delta v(\underline{x}) = f(\underline{x})$.

# 5 Pomocné poznámky

## 5.1 Substituce ve vícenásobném integrálu

Mějme otevřenou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, prosté regulární (tj. s nenulovým Jakobiánem $J_G$ na $\Omega$) zobrazení $\underline{G} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, uzavřenou měřitelnou množinu $A \subseteq \Omega$ a spojité zobrazení $f : B \to \mathbb{R}^n$, kde $B = G(A)$. Pak platí

$$\int_B f(\underline{y}) \,\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = \int_A f\left(g_1(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x})\right) |J_G(\underline{x})| \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

## 5.2 Integrální věty

### 5.2.1 Gaussova věta (Gauss-Green theorem, Divergence theorem) [wiki]

pro $u \in C^1(\overline{\Omega})$ a $\underline{F} \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^n$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} u n_i\,\mathrm{d}S(\underline{x}) \quad i = 1,\dots,n \\
\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot\underline{F}\,\mathrm{d}\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} \underline{F}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S(\underline{x})
\end{aligned}
\tag{18}
$$

### 5.2.2 První Greenova věta (Integration-by-parts formula, Green's first identity) [wiki]

Dosazením $\underline{F} = v\underline{\nabla}u$ do Gaussovy věty dostaneme

$$
\int_\Omega (v\Delta u + \underline{\nabla}v\cdot\underline{\nabla}u)\;\mathrm{d}\underline{x} = \int_{\partial\Omega} v\,\overbrace{(\underline{\nabla}u\cdot\underline{n})}^{u_{\underline{n}}}\,\mathrm{d}S(\underline{x})
\tag{19}
$$

### 5.2.3 Druhá Greenova věta (Green's second identity) [wiki]

Dosazením $\underline{F} = v\underline{\nabla}u - u\underline{\nabla}v$ do Gaussovy věty dostaneme

$$
\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\;\mathrm{d}\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \overbrace{(v(\underline{\nabla}u\cdot\underline{n}) - u(\underline{\nabla}v\cdot\underline{n}))}^{vu_{\underline{n}} - uv_{\underline{n}}}\,\mathrm{d}S(\underline{x})
\tag{20}
$$

## 5.3 Zobecněné sférické souřadnice [wiki]

Zde si popíšeme transformaci

$$
H^n\;:\langle 0,\infty)\times <0,2\pi)\times\overbrace{<0,\pi)\times\cdots\times<0,\pi)}^{n-2\text{ krát}}\to\mathbb{R}^n\,,\quad n\geq 2
$$

na souřadnice $r,\varphi,\phi_1,\dots,\varphi_{n-2}$, kterým se říká zobecněné sférické souřadnice (pro $n=2$ se používá název polární a pro $n=3$ sférické). Ta je dána vztahy

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos(\varphi)\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2}) \\
x_2 &= r\sin(\varphi)\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2}) \\
x_3 &= r\qquad\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2}) \\
x_4 &= r\qquad\qquad\cos(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2}) \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= r\qquad\qquad\qquad\cos(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2}) \\
x_{n-1} &= r\qquad\qquad\qquad\qquad\cos(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2}) \\
x_n &= r\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cos(\phi_{n-2}) \\
\varphi \in \langle 0,2\pi),\ &\left(\forall i\in\langle 1,n-2\rangle_{|\mathbb{N}}\right)\,:\ \phi_i\in\langle 0,\pi)
\end{aligned}
$$

Jakobián této transformace je

$$
J_n = (-1)^n r^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_{n-2})\sin^{n-3}(\phi_{n-3})\dots\sin(\phi_1)\,.
$$

### 5.4 Koule v $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\text{otevřená koule :} \quad & B^n(\underline{x};r) = \left\{\underline{y} \in \mathbb{R}^n \middle| \, |\underline{y} - \underline{x}| < r\right\} \text{ v } \mathbb{R}^n \text{ se středem v bodě } \underline{x} \\
& \text{a poloměrem } r > 0 \\
\text{uzavřená koule :} \quad & \overline{B^n(\underline{x};r)} \\
\text{jednotková sféra :} \quad & \partial B^n(\underline{x};r) \ \ldots \text{ povrch jednotkové koule} \\
\text{objem jednotkové koule :} \quad & \alpha(n) = |B^n(\underline{0};1)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
\text{plocha jednotkové sféry :} \quad & \kappa(n) = |\partial B^n(\underline{0};1)| = n\,|B^n(\underline{0};1)| = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
\text{platí :} \quad & |B^n(\underline{x};r)| = r^n\,|B^n(\underline{0};1)|, \quad |\partial B^n(\underline{x};r)| = r^{n-1}\,|\partial B^n(\underline{0};1)|
\end{aligned}$$

# 6 Některé důkazy

## 6.1 Důkaz invariance Laplaceova operátoru vůdči translaci a rotaci

Důkaz provedeme ve 2D, obecný případ n $n$D si lze představit jako posloupnost operací rotace kolem jedné osy a translace. Změnu souřadnic ve 2D si lze napsat jako

$$\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix}$$

V nových souřadnicích pak lze psát

$$u(x_1,x_2) = u^\star(\overline{x}_1,\overline{x}_2) = u^\star(x_1\cos(\alpha) + x_2\sin(\alpha) + t_1, -x_1\sin(\alpha) + x_2\cos(\alpha) + t_1)$$

tedy

$$\begin{aligned}
u_{x_1} &= u^\star_{\overline{x}_1}\cos(\alpha) - u^\star_{\overline{x}_2}\sin(\alpha)\\
u_{x_2} &= u^\star_{\overline{x}_1}\sin(\alpha) + u^\star_{\overline{x}_2}\cos(\alpha)\\
u_{x_1x_1} &= u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_1}\cos^2(\alpha) - 2u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + u^\star_{\overline{x}_2\overline{x}_2}\sin^2(\alpha)\\
u_{x_2x_2} &= u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_1}\sin^2(\alpha) + 2u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + u^\star_{\overline{x}_2\overline{x}_2}\cos^2(\alpha)\\
0 &= u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_1} + u^\star_{\overline{x}_2\overline{x}_2}
\end{aligned}$$

## 6.2 Odvození vzorece pro Jakobián transformace do zobecněných sférických souřadnic

Spočítejme Jakobián (pravé strany vydělené $r$ označme $g_i^n$, $i \in \langle 1,n\rangle_{|\mathbb{N}}$)

$$\begin{aligned}
J_n &= \begin{vmatrix}
g_1^n & r\partial_\varphi g_1^n & r\partial_{\phi_1} g_1^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_1^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_1^n\\
g_2^n & r\partial_\varphi g_2^n & r\partial_{\phi_1} g_2^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_2^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_2^n\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
g_{n-1}^n & r\partial_\varphi g_{n-1}^n & r\partial_{\phi_1} g_{n-1}^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_{n-1}^n\\
g_n^n & r\partial_\varphi g_n^n & r\partial_{\phi_1} g_n^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_n^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_n^n
\end{vmatrix}\\
&= r^{n-1}\begin{vmatrix}
g_1^n & \partial_\varphi g_1^n & \partial_{\phi_1} g_1^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_1^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_1^n\\
g_2^n & \partial_\varphi g_2^n & \partial_{\phi_1} g_2^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_2^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_2^n\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
g_{n-1}^n & \partial_\varphi g_{n-1}^n & \partial_{\phi_1} g_{n-1}^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_{n-1}^n\\
g_n^n & \partial_\varphi g_n^n & \partial_{\phi_1} g_n^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_n^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_n^n
\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

zobrazení z odstavce 5.3. Pokusme se odvodit rekurzivní vztah pro $J_n$ a to tak, že matici v předchozím determinantu vyjádříme pomocí $J_n$. Snadno lze ukázat, že pro $n = 2$ je

$$J_2 = r \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\phi_1) \\ \sin(\varphi) & \cos(\phi_1) \end{vmatrix} = r\,.$$

Dále pak

$$\begin{aligned}
J_n &= r^{n-1} \begin{vmatrix} \sin(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} & \sin(\phi_{n-2}) \partial_\varphi g_1^{n-1} & \sin(\phi_{n-2}) \partial_{\phi_1} g_1^{n-1} & \cdots & \sin(\phi_{n-2}) \partial_{\phi_{n-3}} g_1^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} \\ \sin(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} & \sin(\phi_{n-2}) \partial_\varphi g_2^{n-1} & \sin(\phi_{n-2}) \partial_{\phi_1} g_2^{n-1} & \cdots & \sin(\phi_{n-2}) \partial_{\phi_{n-3}} g_2^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} & \sin(\phi_{n-2}) \partial_\varphi g_{n-1}^{n-1} & \sin(\phi_{n-2}) \partial_{\phi_1} g_{n-1}^{n-1} & \cdots & \sin(\phi_{n-2}) \partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} \\ \cos(\phi_{n-2}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin(\phi_{n-2}) \end{vmatrix} \\
&= r \sin^{n-3}(\phi_{n-2}) r^{n-2} \begin{vmatrix} \sin^2(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} & \partial_\varphi g_1^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_1^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_1^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} \\ \sin^2(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} & \partial_\varphi g_2^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_2^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_2^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin^2(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} & \partial_\varphi g_{n-1}^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_{n-1}^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} \\ \cos(\phi_{n-2}) \sin(\phi_{n-2}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin(\phi_{n-2}) \end{vmatrix} \\
&= r \sin^{n-3}(\phi_{n-2}) r^{n-2} \begin{vmatrix} g_1^{n-1} & \partial_\varphi g_1^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_1^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_1^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} \\ g_2^{n-1} & \partial_\varphi g_2^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_2^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_2^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1}^{n-1} & \partial_\varphi g_{n-1}^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_{n-1}^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin(\phi_{n-2}) \end{vmatrix} = (-1) r \sin^{n-3}(\phi_{n-2}) \cdot J_{n-1}
\end{aligned}$$

kde v poslední úpravě matice jsme k prvnímu sloupci přičetli $\cos(\phi_{n-2})$ násobek posledního. Pomocí tohoto rekurentního vztahu již obdržíme

$$\begin{aligned}
J_n &= (-1)^{n-2} r^{n-2} \sin^{n-2}(\phi_{n-2}) \sin^{n-3}(\phi_{n-3}) \dots \sin(\phi_1)\, J_2 \\
&= (-1)^n r^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_{n-2}) \sin^{n-3}(\phi_{n-3}) \dots \sin(\phi_1)\,.
\end{aligned}$$

## 6.3 Důkaz $\alpha(n) = |B^n(\underline{0};1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, $\kappa(n) = |\partial B^n(\underline{0};1)| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

Spočtěme obecnější integrály (značení viz 5.4)

$$\int\limits_{B^n(\underline{0};R)} |\underline{x}|^{2\alpha}\, \mathrm{d}\underline{x}\,, \qquad \int\limits_{\partial B^n(\underline{0};1R)} |\underline{x}|^{2\alpha}\, \mathrm{d}\underline{x}$$

požadované důkazy pak získáme dosazením $\alpha = 0$, $R = 1$. Pomocí substituce do zobecněných sférických souřadnic (viz 5.3) získáme

$$\int\limits_{B^n(\underline{0};R)} |\underline{x}|^{2\alpha}\, \mathrm{d}\underline{x} = \int\limits_0^R \rho^{2\alpha+n-1}\, \mathrm{d}\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\rho \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \int\limits_0^{2\pi} \sin^i(\phi_i)\, \mathrm{d}\phi_i = \left[\frac{\rho^{2\alpha+n}}{2\alpha+n}\right]_0^R \cdot \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} I_i = \frac{2\pi R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} I_i$$

$$\int\limits_{\partial B^n(\underline{0};R)} |\underline{x}|^{2\alpha}\, \mathrm{d}\underline{x} = R^{2\alpha+n-1} \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\rho \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \int\limits_0^{2\pi} \sin^i(\phi_i)\, \mathrm{d}\phi_i = 2\pi R^{2\alpha+n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} I_i = \frac{2\alpha+n}{R} \int\limits_{B^n(\underline{0};R)} |\underline{x}|^{2\alpha}\, \mathrm{d}\underline{x}$$

kde jsme využili

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^\pi \sin(\phi)\, \mathrm{d}\phi = \Big[-\cos(\phi)\Big]_0^\pi = 2 \\
I_2 &= \int\limits_0^\pi \sin^2(\phi)\, \mathrm{d}\phi = \int\limits_0^\pi \frac{1+\cos(2\phi)}{2}\, \mathrm{d}\phi = \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

a rekurzivního vztahu

$$
\begin{aligned}
I_k &= \int\limits_0^\pi \sin^k(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int\limits_0^\pi \sin^{k-1}(\phi)\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \Big[-\sin^{k-1}(\phi)\cos(\phi)\Big]_0^\pi + (k-1)\int\limits_0^\pi \sin^{k-2}(\phi)\cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= (k-1)\int\limits_0^\pi \sin^{k-2}(\phi)\left(1-\sin^2(\phi)\right)\,\mathrm{d}\phi = (k-1)\left(I_{k-2}-I_k\right) = \frac{k-1}{k} I_{k-2} \\
&= \begin{cases} 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2l}{2l+1} = 2\frac{(k-1)!!}{k!!} & k=2l+1 \\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2l-1}{2l} = \pi\frac{(k-1)!!}{k!!} & k=2l \end{cases},\ l\in\mathbb{N}
\end{aligned}
$$

kde symbolem $(\cdot)!!$ (dvojitý faktoriál) jsme označili

$$
n!! = \prod_{i=1}^{k}(2i+m),\ n=2k+m,\ k\in\mathbb{N},\ m\in\{0,1\} \text{ a } 0!!=1!!=1
$$

Pro zajímavost

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_k$ | 2 | $\frac{1\pi}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{5\pi}{16}$ | $\frac{32}{35}$ | $\frac{35\pi}{128}$ | $\frac{256}{315}$ | $\frac{63\pi}{256}$ | $\frac{512}{693}$ | $\frac{231\pi}{1024}$ | $\frac{2048}{3003}$ |
| $\prod_{i=1}^k I_i$ | 2 | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{1\pi^2}{2}$ | $\frac{8\pi^2}{15}$ | $\frac{1\pi^3}{6}$ | $\frac{16\pi^3}{105}$ | $\frac{1\pi^4}{24}$ | $\frac{32\pi^4}{945}$ | $\frac{1\pi^5}{120}$ | $\frac{64\pi^5}{10395}$ | $\frac{1\pi^6}{720}$ | $\frac{128\pi^6}{135135}$ |

Dále

$$
I_k I_{k+1} = 2\frac{(k-1)!!}{k!!}\pi\frac{(k)!!}{(k+1)!!} = 2\pi\frac{(k-1)!!}{(k+1)[(k-1)!!]} = \frac{2\pi}{k+1}
$$

a proto

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n-2} I_i &= \begin{cases} I_1\prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} I_{2j}I_{2j+1} = 2\prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}}\frac{2\pi}{2j+1} = 2\frac{(2\pi)^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!!} = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!!} & n=2k+1 \\ \prod_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} I_{2j-1}I_{2j} = \prod_{j=1}^{\frac{n-2}{2}}\frac{\pi}{j} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} \overset{\left[l!=\frac{(2l)!!}{2^l}\right]}{=} \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\pi^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!} & n=2k+2 \end{cases},\ k\in\mathbb{N} \\
&= \frac{2^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\pi^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}}{(n-2)!!} = \frac{\pi^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.
\end{aligned}
$$

Využijeme toho k dopočtení

$$
\int\limits_{B^n(\underline{0};R)} |\underline{x}|^{2\alpha}\,\mathrm{d}\underline{x} = \begin{cases} \frac{2\pi R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n}\frac{2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!!} = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}R^{2\alpha+n}}{(2\alpha+n)\cdot(n-2)!!} & n=2k+1 \\ \frac{2\pi R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n}\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} = \frac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}R^{2\alpha+n}}{(2\alpha+n)\cdot(n-2)!!} & n=2k+2 \end{cases} = \frac{2^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\pi^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}R^{2\alpha+n}}{(2\alpha+n)\cdot(n-2)!!},\ k\in\mathbb{N}
$$

Speciálně pro $\alpha=0$ je

$$
|B^n(\underline{0};R)| = \frac{2^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\pi^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}R^n}{n\cdot(n-2)!!} = \begin{cases} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}R^n}{n!!} & n=2k+1 \\ \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{n\cdot(\frac{n-2}{2})!} & n=2k+2 \end{cases},\ k\in\mathbb{N}
$$

a další volbou $R=1$ obdržíme pro $|B^n(\underline{0};1)| = \int_{B^n(\underline{0};1)} 1\,\mathrm{d}\underline{x}$ a $|\partial B^n(\underline{0};1)| = n|B^n(\underline{0};1)|$ vztahy (viz také [wiki])

$$
\begin{aligned}
|\partial B^n(\underline{0};1)| = n\,|B^n(\underline{0};1)| &= \begin{cases} \frac{n2^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\pi^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{n!!} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}} & n=2k+1 \\ \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n-2}{2})!} & n=2k+2 \end{cases},\ k\in\mathbb{N} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}
\end{aligned}
$$

kde jsme využili vlastností

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{n}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+k) = \frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k} = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-1}{2}}} \quad &\forall n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ \Gamma(\frac{n}{2}) = \Gamma(k) = (k-1)! = (\frac{n-2}{2})! \quad &\forall n = 2k+2,\ k \in \mathbb{N} \\ \Gamma(1+x) = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

funkce $\Gamma$, viz [wiki]. Pro počáteční hodnoty hodnoty $n$ můžeme sestavit tabulku

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert B^n(\underline{0};1)\rvert$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{\pi^2}{2}$ | $\frac{8\pi^2}{15}$ | $\frac{\pi^3}{6}$ | $\frac{16\pi^3}{105}$ | $\frac{\pi^4}{24}$ | $\frac{32\pi^4}{945}$ | $\frac{\pi^5}{120}$ |
| $\lvert\partial B^n(\underline{0};1)\rvert$ | $2\pi$ | $4\pi$ | $2\pi^2$ | $\frac{8\pi^2}{3}$ | $\pi^3$ | $\frac{16\pi^3}{15}$ | $\frac{\pi^4}{3}$ | $\frac{32\pi^4}{105}$ | $\frac{\pi^5}{12}$ |

# Reference


[Rok11] Mirko Rokyta: Parciální diferenciální rovnice I, Klasická teorie, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

[KalKub09] Josef Kalas, Jaromír Kuben: Integrální počet funkcí více proměnných, `http://is.muni.cz/el/1431/podzim2011/M3100/IP_II.pdf`

[Bro12] Martin Brokate: Partielle Differentialgleichungen, `http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/pde_ws11.pdf`

[Ewa10] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations