Difuzní rovnice na intervalu + homogenní Dirichetova okrajová podmínka

Úkolem je řešit Fourierovou metodou

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}\ x \in (0,l),\ t > 0,\ k > 0 & \text{PDR} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \text{okrajová podmínka (Dirichletova)} \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{počáteční podmínka} \end{cases}$$

Řešení: Předpokládejme řešení ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$ a řešme PDR + okrajovou podmínku

$$XT' = kX''T\ , \quad X(0) = X(l) = 0$$
$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Obdržíme tak soustavu dvou ODR (ta s proměnnou X je vlastně Cauchyovou úlohou)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0$$
$$T' + k\lambda T = 0$$

Řešme nejprve rovnici s X. Tato ODR má řešení $X(t) = c_1 \mathrm{e}^{\xi_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\xi_2 x}$, kde ξ_1 a ξ_2 jsou kořeny charakteristického polynomu $\xi^2 + \lambda = 0$, který muže mít dva reálné, nebo komplexně sdružené imaginární kořeny.

V prvním případě dvou reálných kořenů, $\lambda \leq 0$, $\xi \in \{-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda}\}$ je $X(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}$. Pak

$$0 = X(0) = c_1 + c_2 \ \Rightarrow\ c_2 = -c_1$$
$$0 = X(l) = c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l} - c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l} = c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda l^2}\right)$$

aby platilo $0 = X(l)$, musí být buďto $\lambda = 0$, nebo $c_1 = 0$ a oba případy vedou ke konstantnímu $X(x) \equiv c$, pokud $c_1 = 0$ je navíc $X(x) \equiv 0$. Takto ale nebudeme moci splnit počáteční podmínku pro φ.

V druhém případě (komplexně sdružené imaginární kořeny) je $\lambda > 0$, $\xi \in \{-i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}\}$ a tedy

$$X(t) = Re\left(c_1 \mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}x} + c_2 \mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda}x}\right) = k_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + k_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Pak

$$0 = X(0) = k_1$$
$$0 = X(l) = k_2 \sin(\sqrt{\lambda}l).$$

Jelikož nás nezajímá případ $k_1 = k_2 = 0$, věnujme se případu $\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$, což platí pro $\sqrt{\lambda} l \in \{n\pi, \, n \in \mathbb{N}\}$, tedy pro

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \; n \in \mathbb{N}.$$

Pak všechny $X_n(x) = K_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$ řeší Cauchyovu úlohu pro X. Věnujme se tedy druhé ODR

$$T_n' + k\lambda_n T_n = 0$$

která má řešení $T_n(t) = L_n \mathrm{e}^{\xi_n t}$, kde ξ_n je kořenem charakteristického polynomu $\xi_n + k\lambda_n = 0$, tedy $\xi_n = -k\lambda_n$ a

$$T_n(t) = L_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Všechny

$$u_n(x,t) = A_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

tedy řeší PDR + Dirichletovu okrajovou podmínku. Hledejme tedy řešení u ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

a snažme se splnit počáteční podmínku

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

tedy

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \mathrm{d}x.$$

Poznámka: Ke stejnému výsledku se samozřejmě dopracujeme taky když dáme k do ODR s proměnnou X a u λ změníme znaménko ($\mu = -\lambda$):

$$\begin{aligned} XT' &= kX''T \;, \quad X(0) = X(l) = 0 \\ \frac{T'}{T} &= \frac{kX''}{X} = \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} kX'' - \mu X &= 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \\ T' - \mu T &= 0 \end{aligned}$$

$X(t) = c_1 \mathrm{e}^{\xi_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\xi_2 x}$, kde ξ_1 a ξ_2 jsou kořeny charakteristického polynomu $k\xi^2 - \mu = 0$. Vynechme případ dvou reálných kořenů. V druhém případě je $\mu < 0$, $\xi \in \{-i\sqrt{-\frac{\mu}{k}}, i\sqrt{\frac{\mu}{k}}\}$ a tedy

$$X(t) = Re\left(c_1 \mathrm{e}^{-i\sqrt{-\frac{\mu}{k}}x} + c_2 \mathrm{e}^{i\sqrt{-\frac{\mu}{k}}x}\right) = k_1 \cos\left(\sqrt{-\frac{\mu}{k}}x\right) + k_2 \sin\left(\sqrt{-\frac{\mu}{k}}x\right).$$

Pak

$$0 = X(0) = k_1$$
$$0 = X(l) = k_2 \sin\left(\sqrt{-\frac{\mu}{k}}l\right),$$

tedy

$$\mu_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k,\ X_n(x) = K_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Druhá ODR

$$T_n' - \mu_n T_n = 0$$

má řešení $T_n(t) = L_n \mathrm{e}^{\xi_n t}$, kde ξ_n je kořenem charakteristického polynomu $\xi_n - \mu_n = 0$, tedy $\xi_n = \mu_n$ a

$$T_n(t) = L_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t},\ u_n(x,t) = A_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Difuzní rovnice na intervalu + homogenní Neumannova okrajová podmínka

Úkolem je řešit Fourierovou metodou

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}\ x \in (0,l),\ t > 0,\ k > 0 & \text{PDR} \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 & \text{okrajová podmínka (Neumannova)} \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{počáteční podmínka} \end{cases}$$

Řešení: Opět předpokládejme řešení ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$ a řešme PDR + okrajovou podmínku

$$XT' = kX''T\ , \quad X'(0) = X'(l) = 0$$
$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(l) = 0$$
$$T' + k\lambda T = 0$$

ODR pro X má řešení $X(t) = c_1 \mathrm{e}^{\xi_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\xi_2 x}$, kde ξ_1 a ξ_2 jsou buďto dva reálné, nebo komplexně sdružené imaginární kořeny charakteristického polynomu $\xi^2 + \lambda = 0$. Případ, kdy vyjde kořen dvojnásobný a nulový probereme tentokrát spolu s imaginárními kořeny.

V prvním případě $\lambda < 0$, $\xi \in \{-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda}\}$ je $X(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}$. Pak

$$0 = X'(0) = -\sqrt{-\lambda}c_1 + \sqrt{-\lambda}c_2 \ \Rightarrow\ c_2 = c_1$$
$$0 = X'(l) = -\sqrt{-\lambda}c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l} + \sqrt{-\lambda}c_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l} = c_1\sqrt{-\lambda}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l}\left(\mathrm{e}^{-\lambda l^2} - 1\right) \ \Rightarrow\ c_1 = 0$$

tedy opět $X(x) \equiv 0$, což nám nepomůže.

V druhém případě (komplexně sdružené imaginární kořeny) je $\lambda \geq 0$, $\xi \in \{-i\sqrt{\lambda}, i\sqrt{\lambda}\}$ a tedy

$$X(t) = Re\left(c_1 \mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}x} + c_2 \mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda}x}\right) = k_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + k_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Pak

$$\begin{aligned} 0 = X'(0) &= \sqrt{\lambda}\left(-k_1 \sin(x) + k_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)\right)_{|x=0} \quad \Rightarrow \quad k_2 = 0 \\ 0 = X'(l) &= -k_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l). \end{aligned}$$

Jelikož nás nezajímá případ $k_1 = k_2 = 0$, věnujme se případu $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$, což platí pro $\sqrt{\lambda}l \in \{n\pi,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, tedy pro

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Pak všechny $X_n(x) = K_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ řeší Cauchyovu úlohu pro X. Věnujme se tedy druhé ODR

$$T_n' + k\lambda_n T_n = 0$$

která má řešení $T_n(t) = L_n \mathrm{e}^{\xi_n t}$, kde ξ_n je kořenem charakteristického polynomu $\xi_n + k\lambda_n = 0$, tedy $\xi_n = -k\lambda_n$ a

$$T_n(t) = L_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Všechny

$$u_n(x,t) = A_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

tedy řeší PDR + Neumannovu okrajovou podmínku. Hledejme tedy řešení u ve tvaru

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

a snažme se splnit počáteční podmínku

$$\varphi(x) = u(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

tedy

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\, \mathrm{d}x.$$