[1], příklad 5.6: Řešme úlohu

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & , \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

Řešení: Dosazením do vzorce pro řešení difuzní rovnice v $\mathbb{R}^1$ s počáteční podmínkou $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$ obdržíme

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2-2xy+4kty}{4kt}} \,\mathrm{d}y$$

výraz v čitateli zlomku, který je v exponentu doplníme na čtverec vzhledem k y,

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4kty = y^2 + 2(2kt - x)y + x^2 = (y + 2kt - x)^2 + 4kt(x - kt)$$

tedy

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \mathrm{e}^{-\frac{4kt(x-kt)}{4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(y+2kt-x)^2}{4kt}} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \mathrm{e}^{kt-x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(y+2kt-x)^2}{4kt}} \,\mathrm{d}y$$

abychom mohli použít substituci

$$s = \frac{y + 2kt - x}{\sqrt{4kt}}, \; \mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{4kt}} \mathrm{d}y, \quad \begin{matrix} y \to -\infty & \Rightarrow & s \to -\infty \\ y \to \;\;\infty & \Rightarrow & s \to \;\;\infty \end{matrix}$$

a obdržet

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{4kt}}{\sqrt{4\pi k t}} \mathrm{e}^{kt-x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{kt-x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2} \,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{kt-x}$$

Opravdu

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \mathrm{e}^{-x} \\ u_t - k u_{xx} &= \mathrm{e}^{kt-x} \cdot k - k \left(-\mathrm{e}^{kt-x}\right)_x = \mathrm{e}^{kt-x} \cdot k - k \mathrm{e}^{kt-x} = 0 \end{aligned}$$

[1], kapitola 5.3, příklad 13: Nalezněte řešení úlohy

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = \sin(x) & , \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Řešení: Dosazením do vzorce pro řešení nehomogenní difuzní rovnice v $\mathbb{R}^1$ dosadíme za počáteční podmínku $\varphi(x) = 0$ a obdržíme po substituci

$$z = \frac{y - x}{\sqrt{4k(t-s)}}, \; \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{4k(t-s)}} \mathrm{d}y, \quad \begin{matrix} y \to -\infty & \Rightarrow & z \to -\infty \\ y \to \;\;\infty & \Rightarrow & z \to \;\;\infty \end{matrix}$$

úpravu

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y,s) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}} \sin(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2} \sin(x + z\sqrt{4k(t-s)}) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2} \left[\sin(x) \cos(z\sqrt{4k(t-s)}) + \sin(z\sqrt{4k(t-s)}) \cos(x) \right] \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\sin(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2} \cos(z\sqrt{4k(t-s)}) \,\mathrm{d}z + \cos(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2} \sin(z\sqrt{4k(t-s)}) \,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}s \\ &= \frac{2\sin(x)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2} \cos(z\sqrt{4k(t-s)}) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}s \\ &= \sin(x) \int_0^t \mathrm{e}^{-k(t-s)} \,\mathrm{d}s = \sin(x) \left[\frac{\mathrm{e}^{-k(t-s)}}{k} \right]_0^t = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \sin(x)}{k} \end{aligned}$$

kde jsme použili vzorec pro sinus součtu $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$ a vlastností určitého integrálu přes symetrický interval z liché a sudé funkce a integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\cos(\alpha z)\,\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

který plyne ze vzorce (viz [2], příklad 17.13)

$$I(\lambda,\xi)=\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{e}^{i2\pi\xi x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}},\ \lambda>0,\ \xi\in\mathbb{R}$$

volbou $\lambda=1$, $\xi=\frac{\alpha}{2\pi}$.

References

[1] P. Drábek, G. Holubová: Parciální diferenciální rovnice, Matematika pro inženýry 21. století, 2011
`http://mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice`

[2] J. Kopáček: Matematická analýza pro fyziky (IV), Matfyzpress, 2003