Laplaceova (a Poissonova) PDR

Nechť $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω je otevřená, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a je zadaná $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Následující PDR označme

$$\text{Laplaceova rovnice:} \qquad -\Delta u = 0 \tag{1}$$

$$\text{Poissonova rovnice:} \qquad -\Delta u = f \tag{2}$$

Funkci $v \in C^2$ splňující (1) nazveme harmonická funkce. Laplaceův operátor $-\Delta u = -\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}\right)$ je invariantní k translaci a rotaci (viz 6.1).

Poznámka 1. Pojmy harmonická funkce (v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) a holomorfní funkce (v $\Omega \subset \mathbb{C}$) spolu (po obvyklém ztotožnění $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$) souvisejí: Obě složky funkce $f = u + iv$, která je holomorfní v otevřené množině $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ jsou harmonické na $\Omega_{\mathbb{R}^2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, z = x + iy \in \Omega_{\mathbb{C}}\}$. Z Cauchyho-Riemannových podmínek

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

totiž plyne

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = \partial_x(v_y) + \partial_y(-v_x) = 0$$
$$\triangle v = v_{xx} + v_{yy} = \partial_x(-u_y) + \partial_y(u_x) = 0$$

Připoměňme, že holomorfní funkce je automaticky $f \in C^\infty(\mathbb{C})$

1 Vlastnosti Laplaceova operátoru

Funkci $u \in C^2(\Omega)$ nazveme na otevřené množině Ω

$$\text{subharmonická} \Leftrightarrow -\triangle u \le 0 \ \forall x \in \Omega$$
$$\text{superharmonická} \Leftrightarrow -\triangle u \ge 0 \ \forall x \in \Omega$$

Věta 2. *Mějme subharmonickou funkci u na (otevřené) množině Ω a kouli $B(x;R)$ se středem v bodě $x \in \Omega$ a poloměrem R, která je celá uvnitř Ω. Označme dále*

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\,\mathrm{d}S(\xi), \quad 0 < r < R \tag{3}$$

Pak pro všechna $r \in (0,R)$ je $\varphi'(r) \ge 0$ a navíc

$$\lim_{r \to 0^+} \varphi(r) = u(x)\,. \tag{4}$$

Důkaz. Nejprve dokažme tvrzení $\varphi' \ge 0$. Předpis pro φ lze (viz vzorce v odstavci 5.4) upravit (pro zkrácení textu zde budeme psát B_1 místo $B(0;1)$) na

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1|} r^{n-1} \int_{\partial B_1} u(x + rz)\,\mathrm{d}S(z) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} u(x+rz)\,\mathrm{d}S(z)$$

Toho lze využít pro výpočet derivace

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \nabla u(x + rz) \cdot z\,\mathrm{d}S(z) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} \nabla u(\xi) \cdot \frac{\xi - x}{r}\,\mathrm{d}S(\xi)$$
$$= \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{B(x;r)} \mathrm{div}\,(\nabla u(y))\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{B(x;r)} \triangle u(y)\,\mathrm{d}y \ge 0$$

protože $\triangle u \ge 0$. V úpravách jsme využili Gaussovy věty a toho, že jednotkový vektor vnější normály $\nu(\xi)$ lze ve všech bodech $\xi \in \partial B(x;r)$ napsat jako $\nu(\xi) = \frac{\xi - x}{r}$. Nyní se věnujme druhému tvrzení, $\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = u(x)$. Následujícími úpravami odhadneme

$$|\varphi(r) - u(x)| = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \left| \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) - u(x)\,\mathrm{d}S(\xi) \right| \le \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)|\,\mathrm{d}S(\xi)$$
$$\le \sup_{\xi \in \partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)|$$

jelikož pro všechny $\xi \in B(x;r)$ je $\|\xi - x\| = r$, plyne ze spojitosti u (4). $\square$

Důsledek 3. *Za předpokladů z věty 2 navíc pro všechna $r \in (0, R)$ platí*

$$u(x) \le \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) \,\mathrm{d}S(\xi) \tag{5}$$

$$u(x) \le \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y) \,\mathrm{d}y \tag{6}$$

Důkaz. Platnost (5) plyne z vlastnosti $\varphi' \ge 0$, definice φ (3) a limitní vlastnosti (4). Nerovnost (6) plyne z

$$\begin{aligned} u(x)\frac{|B(x;r)|}{|B(x;r)|} &= \frac{u(x)}{|B(x;r)|} \int_0^r |\partial B(x;\rho)| \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{|B(x;r)|} \int_0^r u(x)|\partial B(x;\rho)| \,\mathrm{d}\rho \\ &\overset{(5)}{\le} \frac{1}{|B(x;r)|} \int_0^r \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) \,\mathrm{d}S(\xi) \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y) \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

□

Věta 4. *V2ta*

2 Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Před četbou tohoto odstavce si prostudujte pomocné poznámky 5.4 o kouli v $\mathbb{R}^n$. Řešme (1) ve hypersférických souřadnicích [wiki]. Z invariance Laplaceova operátoru k translaci a rotaci plyne, že řešení v bude záviset pouze na vzdálenosti od počátku:

$$v(x) = w(r)$$

kde $r = \|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ a platí tedy

$$\begin{aligned} r_{x_i} &= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r} \\ r_{x_i x_j} &= \frac{1}{r}\delta_{ij} + x_i\,(-1)\,r^{-2} r_{x_j} = \frac{1}{r}\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^3} \end{aligned}$$

pro nenulové x. Vyjádřeme Laplaceovu rovnici v hypersférických souřadnicích:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= w'(r)\frac{x_i}{r} \\ v_{x_i x_i} &= w''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + w'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\ 0 = \Delta v &= \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i} = w''(r)\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2} + w'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^3}\right) \\ &= w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) \end{aligned}$$

Obdrželi jsme ODR, kterou zkusíme vyřešit. Pro $r > 0$ a $w' \neq 0$ (konstantní řešení nás nezajímá) pak

$$\begin{aligned} \frac{1-n}{r} &= \frac{1}{w'} w'' = (\ln(w'))' \\ \ln(w') &= \int \frac{1-n}{r} \,\mathrm{d}r = (1-n)\ln(r) + c_1 \\ w' &= c_2 r^{1-n} = \frac{c_2}{r^{n-1}} \\ w &= \begin{cases} b\ln(r) + c & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & n \ge 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Funkci

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & n \ge 3 \end{cases}$$

kde $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha(n)$ je objem jednotkové $n-$rozměrné koule $B^n(0,1)$ nazveme fundamentální řešení Laplaceovy rovnice. Pro $\Phi(x)$ platí

$$\Phi(x) = \Phi(|x|)$$
$$\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{x_i}{|x|^n}$$
$$\Phi_{x_i x_j}(x) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^n} - n\frac{x_i x_j}{|x|^{n+2}}\right)$$

a proto se dá odhadnout (odhady platí pro nějakou konstantu $c > 0$):

$$|D\Phi(x)| = \left(\sum_{a_1+\cdots+a_d=1} \left|D^{(a_1,\ldots,a_d)}u\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-1}} \leq \frac{c}{|x|^{n-1}}$$
$$\left|D^2\Phi(x)\right| = \left(\sum_{a_1+\cdots+a_d=2} \left|D^{(a_1,\ldots,a_d)}u\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c}{|x|^n}$$

Podívejme se pro $k \in \mathbb{N}$ na integrály

$$\int_{B^2(0,r)} |\ln(|x|)| \,\mathrm{d}x \overset{\varepsilon\leq 1}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \ln(r) r \,\mathrm{d}r = 2\pi\left|\frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right| \leq 2\pi\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)|$$
$$\int_{B^n(0,r)} |x|^{-k} \,\mathrm{d}x = \int_0^r \int_{\partial B^n(0,\rho)} |\xi|^{-k} \,\mathrm{d}S(\xi)\mathrm{d}\rho = \int_0^r |\rho|^{-k} \overbrace{|\partial B^n(0,\rho)|}^{\rho^{n-1}|\partial B^n(0,1)|} \,\mathrm{d}\rho$$
$$= \kappa(n)\int_0^r \rho^{n-1-k}\,\mathrm{d}\rho = \begin{cases} \frac{\kappa(n) r^{n-k}}{n-k} < \infty & k \leq n-1 \\ \infty & k > n-1 \end{cases}$$

Funkce $|x|^{-k}$ je tedy integrovatelná na $B^n(0,r)$ právě tehdy když $k \leq n-1$, z čehož plyne $\Phi, \partial_i\Phi \in L^1(B^n(0,r))$ a $\partial_j\partial_i\Phi \notin L^1(B^n(0,r))$. Na závěr odstavce ještě několik odhadů:

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)| \,\mathrm{d}y \overset{\varepsilon\leq 1}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \ln(r) r \,\mathrm{d}r = 2\pi\left|\frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right| \leq 2\pi\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)|$$
$$\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{r^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_1)\cdots\sin(\phi_{n-2})}{r^{n-2}}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi_1\cdots\mathrm{d}\phi_{n-2}\mathrm{d}\phi_{n-1}$$
$$= 2\pi\left(\prod_{i=1}^{n-2}\int_0^{\pi}\sin^{n-1-i}(\phi_i)\,\mathrm{d}\phi_i\right)\int_0^{\varepsilon} r\,\mathrm{d}r = C\varepsilon^2$$
$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)| \,\mathrm{d}S(y) = |\ln(\varepsilon)|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \mathrm{d}S(y) = |\ln(\varepsilon)| 2\pi\varepsilon$$
$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}}\,\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \mathrm{d}S(y) = \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}} n\alpha(n) = n\alpha(n)\varepsilon$$

a proto

$$\int_{B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\,\mathrm{d}y \leq \begin{cases} C\varepsilon^2|\ln(\varepsilon)| & n=2 \\ C\varepsilon^2 & n\geq 3 \end{cases} \tag{7}$$
$$\int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\,\mathrm{d}S(y) = \begin{cases} \varepsilon|\ln(\varepsilon)| & n=2 \\ \frac{\varepsilon}{n-2} & n\geq 3 \end{cases} \tag{8}$$

3 Věta o třech potenciálech

Dokažme, že pro omezenou oblast $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s dostatečně hladkou hranicí (takovou aby platila Gaussova-Ostrogradského věta) a funkci $u \in C^2(\overline{\Omega})$ platí (tzv. věta o třech potenciálech) pro všechna $x \in \Omega$:

$$u(x) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Phi(y-x)u_\nu(y)\,\mathrm{d}S(y)}_{v_u(x) \text{ potenciál jednoduché vrstvy}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Phi_\nu(y-x)u(y)\,\mathrm{d}S(y)}_{w_u(x) \text{ potenciál dvojvrstvy}} - \underbrace{\int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y}_{\varphi_u(x) \text{ objemový potenciál}} \tag{9}$$

Důkaz Předně si uvědomíme, že pro $\varepsilon > 0$ jsou $\Phi(y-x)$ a $\Phi_\nu(y-x)$ integrovatelné na $\Omega \setminus B^n(x,\varepsilon)$. Vzpomeneme si na druhou Greenovu formuli (13) a aplikujme ji na oblast $\Omega \setminus B^n_0(x,\varepsilon)$

$$\int_{\Omega \setminus B_0^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega \setminus B_0^n(x,\varepsilon)} \overbrace{\Delta_y \Phi(y-x)}^{=0} u(y)\,\mathrm{d}y + \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \right) \left(\Phi(y-x)u_\nu - u\Phi_\nu(y-x) \right) \mathrm{d}S(x)$$

V objemovém potenciálu na pravé straně (9) rozdělíme $\Omega = (\Omega \setminus B_0^n(x,\varepsilon)) \cup B_0^n(x,\varepsilon)$ a využijeme právě odvozeného vztahu:

$$\begin{aligned} & v_u(x) - w_u(x) - \int_{\Omega \setminus B_0^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y - \int_{B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} u\Phi_\nu(y-x)\,\mathrm{d}y \\ &\quad - \underbrace{\int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)u_\nu\,\mathrm{d}y}_{\to 0} - \underbrace{\int_{B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y}_{\to 0} \end{aligned}$$

protože $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $\Phi \in L^1(\Omega)$ lze tedy s použitím (7) a (8) prokázat, že opravdu

$$\int_{B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y \leq \|D^2 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\,\mathrm{d}y \to 0$$

$$\int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)u_\nu\,\mathrm{d}(y) \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\,\mathrm{d}S(y) \to 0$$

Ve zbývajícím integrálu na chvíli zapomeňme na u a získáme tak rovnost

$$\begin{aligned} \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \Phi_\nu(y-x)\,\mathrm{d}y &= \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \nabla\Phi(y-x) \cdot \underbrace{\left(-\frac{y-x}{|y-x|} \right)}_{\nu} \mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \frac{1}{\kappa(n)\varepsilon^{n-1}}\,\mathrm{d}y = 1 \end{aligned}$$

kterou dále využijeme v odhadu

$$\begin{aligned} \left| u(x) - \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} u\Phi_\nu(y-x)\,\mathrm{d}y \right| &= \left| \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} (u(x) - u(y))\,\Phi_\nu(y-x)\,\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \sup_{y \in \partial B^n(x,\varepsilon)} |u(x) - u(y)| \left| \int_{\partial B^n(x,\varepsilon)} \Phi_\nu(y-x)\,\mathrm{d}y \right| \to 0 \end{aligned}$$

Tímto je dokázána věta o třech potenciálech a dále se zmíníme několik důsledků:

- Je-li $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, tedy $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a $\operatorname{supp}(u)$ je kompaktní, pak

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y$$

což plyne z věty o třech potenciálech v případě, že použijeme dostatečně velkou oblast $\Omega \supset \operatorname{supp}(u)$ a vypadnou tedy potenciály jednoduché vrstvy a dvojvrstvy, jelikož $u = u_\nu = 0$.

- Pokud je u harmonická ($\Delta u = 0$), pak vypadne objemový potenciál

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(y-x) u_\nu(y) \, \mathrm{d}S(y) - \Phi_\nu(y-x) u(y) \, \mathrm{d}S(y)$$

- Pokud je Ω otevřená a u harmonická, pak $u \in C^\infty(\Omega)$ a ke každému $y \in \Omega$ existuje okolí, na kterém lze u vyjádřit pomocí Taylorovy řady.

Poslední tvrzení je nutné dokázat. Nechť tedy $y \in \Omega$ a r je takový poloměr otevřené koule $B(y,r)$ se středem v y, že $\overline{B(y,r)} \subset \Omega$. Pro všechny $x \in B(y,r)$ pak platí

$$u(x) = \int_{\partial B} \Phi(z-x) u_\nu(z) \, \mathrm{d}S(z) - \Phi_\nu(z-x) u(z) \, \mathrm{d}S(z)$$

DOKONCIT

4 Řešení Poissonovy rovnice

Dokažme, že pro $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, (tj. $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a f má kompaktní support), pro funkci v danou vzorcem

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) f(y) \, \mathrm{d}y & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x|^{n-2}} \, \mathrm{d}y & n \geq 3 \end{cases} \tag{10}$$

platí $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a je řešením Poissonovy rovnice (2). Toto tvrzení si dokážeme:

Důkaz $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ Předně ukážeme, že integrální vztah v (10) je konvoluce:

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$$

použijeme substituci $i \in \{1, \ldots, n\}$: $z_i = x_i - y_i$,

$$\mathrm{d}z_i = -\mathrm{d}y_i, \qquad \begin{array}{lll} y_i \to \infty & \Rightarrow z_i & \to -\infty \\ y_i \to -\infty & \Rightarrow z_i & \to \infty \end{array}$$

a tedy:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\infty}^{-\infty} \cdots \int_{\infty}^{-\infty} \Phi(z) f(x-z) (-1)^n \, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) f(x-z) \, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \qquad \text{přeznačení } y = z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Pro

$$\frac{v(x+he_i) - v(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \, \mathrm{d}y$$

konverguje $\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} \to f_{x_i}$ stejnoměrně a f má kompaktní support, a proto [wiki]:

$$\begin{aligned} v_{x_i}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{v(x+he_i) - v(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \right] \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i}(x-y) \, \mathrm{d}y \qquad \text{a podobně} \\ v_{x_i x_j}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i x_j}(x-y) \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Pravá strana je spojitá vzhledem k proměnné x a tedy (pokud integrál existuje) je $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz $-\Delta v = f$ Podívejme se tedy (bez podvádění) na

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y}_{I_1(\varepsilon)} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= I_1(\varepsilon) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= I_1(\varepsilon) + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) f_\nu(x-y)\,\mathrm{d}S(y)}_{I_2(\varepsilon)} - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) \underbrace{- \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi_\nu(y) f(x-y)\,\mathrm{d}S(y) +}_{I_3(\varepsilon)} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta\Phi(y)\cdot f(x-y)\,\mathrm{d}y}_{0}
\end{aligned}$$

kde jsme využili skutečnosti, že

$$\begin{aligned}
\Delta_x f(x-y) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_i}\left(f(x-y)\right) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(f_i(x-y)\cdot 1\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{ii}(x-y)}_{\parallel} \\
\Delta_y f(x-y) &= \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\partial_{y_i}\left(f(x-y)\right) = \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\left(f_i(x-y)\cdot(-1)\right) = \overbrace{\sum_{i=1}^n f_{ii}(x-y)}
\end{aligned}$$

Pro $I_1(\varepsilon)$ s použitím (7) platí

$$\begin{aligned}
|I_1(\varepsilon)| &\le C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\le \begin{cases} \frac{1}{2\pi} C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)|\,\mathrm{d}y \le C\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)| & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y \le C\varepsilon^2 & n\ge 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

a dále z (8)

$$\begin{aligned}
|I_2(\varepsilon)| &\le \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\,\mathrm{d}S(y) \\
&\le \begin{cases} \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)|\,\mathrm{d}S(y) \le C\varepsilon|\ln(\varepsilon)| & n=2 \\ \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}}\,\mathrm{d}S(y) \le C\varepsilon & n\ge 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

V poslední části $I_3(\varepsilon)$ si všimneme, že

$$\begin{aligned}
D\Phi(y) &= \left\{\partial_{y_i} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|y|^{n-2}}\right\}_{i=1}^n = \left\{\frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{2y_i}{|y|^{n-1}\cdot 2|y|}\right\}_{i=1}^n \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n}, \qquad \nu = \frac{-y}{|y|} \\
\Phi_\nu(y) &= \nu^\top D\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^n} \frac{-1}{\varepsilon} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \quad \text{na } \partial B(0,\varepsilon)
\end{aligned}$$

a proto

$$
\begin{aligned}
I_3(\varepsilon) &= -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi_\nu(y) f(x-y)\,\mathrm{d}S(y) = -\frac{1}{\underbrace{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}_{|\partial B(0,\varepsilon)|}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\,\mathrm{d}S(y) \\
&= -\frac{1}{|\partial B(0,\varepsilon)|} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)\,\mathrm{d}S(y) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f(x)
\end{aligned}
$$

jelikož poslední výraz je průměrná hodnota na povrchu koule se středem v bodě x a poloměrem $\varepsilon \to 0$.

5 Pomocné poznámky

5.1 Substituce ve vícenásobném integrálu

Mějme otevřenou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, prosté regulární (tj. s nenulovým Jakobiánem J_G na Ω) zobrazení $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$, uzavřenou měřitelnou množinu $A \subseteq \Omega$ a spojité zobrazení $f : B \to \mathbb{R}^n$, kde $B = G(A)$. Pak platí

$$
\int_B f(y)\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n = \int_A f\left(g_1(x), \dots, g_n(x)\right) |J_G(x)|\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n
$$

5.2 Integrální věty

5.2.1 Gaussova věta (Gauss-Green theorem, Divergence theorem) [wiki]

pro $u \in C^1(\overline{\Omega})$ a $F \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^n$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} u\nu_i\,\mathrm{d}S(x) \quad i = 1, \dots, n \\
\int_\Omega \nabla \cdot F\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\,\mathrm{d}S(x) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

5.2.2 První Greenova věta (Integration-by-parts formula, Green's first identity) [wiki]

Dosazením $F = v\nabla u$ do Gaussovy věty dostaneme

$$
\int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\,\overbrace{(\nabla u \cdot \nu)}^{u_\nu}\,\mathrm{d}S(x) \qquad (12)
$$

5.2.3 Druhá Greenova věta (Green's second identity) [wiki]

Dosazením $F = v\nabla u - u\nabla v$ do Gaussovy věty dostaneme

$$
\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \overbrace{(v(\nabla u \cdot \nu) - u(\nabla v \cdot \nu))}^{vu_\nu - uv_\nu}\,\mathrm{d}S(x) \qquad (13)
$$

5.3 Zobecněné sférické souřadnice [wiki]

Zde si popíšeme transformaci

$$
H^n\ : \langle 0, \infty) \times < 0, 2\pi) \times \overbrace{< 0, \pi) \times \dots \times < 0, \pi)}^{n-2 \text{ krát}} \to \mathbb{R}^n\,, \quad n \geq 2
$$

do souřadnic $r, \varphi, \phi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$, kterým se říká zobecněné sférické souřadnice (pro $n = 2$ se používá název polární a pro $n = 3$ sférické). Ta je dána vztahy

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos(\varphi)\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})\\
x_2 &= r\sin(\varphi)\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})\\
x_3 &= r\qquad\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})\\
x_4 &= r\qquad\qquad\cos(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= r\qquad\qquad\qquad\cos(\phi_{n-4})\sin(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})\\
x_{n-1} &= r\qquad\qquad\qquad\qquad\cos(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})\\
x_n &= r\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cos(\phi_{n-2})\\
\varphi &\in \langle 0, 2\pi), \ \left(\forall i \in \langle 1, n-2\rangle_{|\mathbb{N}}\right) : \ \phi_i \in \langle 0, \pi)
\end{aligned}
$$

Jakobián této transformace je

$$J_n = (-1)^n r^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_{n-2})\sin^{n-3}(\phi_{n-3})\ldots\sin(\phi_1)\,.$$

5.4 Koule v $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
\text{otevřená koule :}&\quad B_0^n(x;r) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y-x| < r\} \ \text{ v } \mathbb{R}^n \text{ se středem v bodě } x\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{a poloměrem } r > 0\\
\text{uzavřená koule :}&\quad B^n(x;r)\\
\text{jednotková sféra :}&\quad \partial B^n(x;r)\ \ldots\ \text{povrch jednotkové koule}\\
\text{objem jednotkové koule :}&\quad \alpha(n) = |B^n(0;1)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\\
\text{plocha jednotkové sféry :}&\quad \kappa(n) = |\partial B^n(0;1)| = n\,|B^n(0;1)| = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\\
\text{platí :}&\quad |B(x;r)| = r^n\,|B(0;1)|\,, \quad |\partial B(x;r)| = r^{n-1}\,|\partial B(0;1)|
\end{aligned}
$$

budeme navíc zkráceně značit $B_r \equiv B(0;r)$.

6 Některé důkazy

6.1 Důkaz invariance Laplaceova operátoru vůdči translaci a rotaci

Důkaz provedeme ve 2D, obecný případ n nD si lze představit jako posloupnost operací rotace kolem jedné osy a translace. Změnu souřadnic ve 2D si lze napsat jako

$$
\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix}
$$

V nových souřadnicích pak lze psát

$$u(x_1,x_2) = u^\star(\overline{x}_1,\overline{x}_2) = u^\star(x_1\cos(\alpha) + x_2\sin(\alpha) + t_1, -x_1\sin(\alpha) + x_2\cos(\alpha) + t_1)$$

tedy

$$
\begin{aligned}
u_{x_1} &= u^\star_{\overline{x}_1}\cos(\alpha) - u^\star_{\overline{x}_2}\sin(\alpha)\\
u_{x_2} &= u^\star_{\overline{x}_1}\sin(\alpha) + u^\star_{\overline{x}_2}\cos(\alpha)\\
u_{x_1x_1} &= u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_1}\cos^2(\alpha) - 2u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + u^\star_{\overline{x}_2\overline{x}_2}\sin^2(\alpha)\\
u_{x_2x_2} &= u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_1}\sin^2(\alpha) + 2u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) + u^\star_{\overline{x}_2\overline{x}_2}\cos^2(\alpha)\\
0 &= u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = u^\star_{\overline{x}_1\overline{x}_1} + u^\star_{\overline{x}_2\overline{x}_2}
\end{aligned}
$$

6.2 Odvození vzorece pro Jakobián transformace do zobecněných sférických souřadnic

Spočítejme Jakobián (pravé strany vydělené r označme g_i^n, $i \in \langle 1, n\rangle_{|\mathbb{N}}$)

$$J_n = \begin{vmatrix} g_1^n & r\partial_\varphi g_1^n & r\partial_{\phi_1} g_1^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_1^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_1^n \\ g_2^n & r\partial_\varphi g_2^n & r\partial_{\phi_1} g_2^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_2^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1}^n & r\partial_\varphi g_{n-1}^n & r\partial_{\phi_1} g_{n-1}^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_{n-1}^n \\ g_n^n & r\partial_\varphi g_n^n & r\partial_{\phi_1} g_n^n & \cdots & r\partial_{\phi_{n-3}} g_n^n & r\partial_{\phi_{n-2}} g_n^n \end{vmatrix}$$
$$= r^{n-1} \begin{vmatrix} g_1^n & \partial_\varphi g_1^n & \partial_{\phi_1} g_1^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_1^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_1^n \\ g_2^n & \partial_\varphi g_2^n & \partial_{\phi_1} g_2^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_2^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1}^n & \partial_\varphi g_{n-1}^n & \partial_{\phi_1} g_{n-1}^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_{n-1}^n \\ g_n^n & \partial_\varphi g_n^n & \partial_{\phi_1} g_n^n & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_n^n & \partial_{\phi_{n-2}} g_n^n \end{vmatrix}$$

zobrazení z odstavce 5.3. Pokusme se odvodit rekurzivní vztah pro J_n a to tak, že matici v předchozím determinantu vyjádříme pomocí J_n. Snadno lze ukázat, že pro $n = 2$ je

$$J_2 = r \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\phi_1) \\ \sin(\varphi) & \cos(\phi_1) \end{vmatrix} = r\,.$$

Dále pak

$$J_n = r^{n-1} \begin{vmatrix} \sin(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} & \sin(\phi_{n-2})\partial_\varphi g_1^{n-1} & \sin(\phi_{n-2})\partial_{\phi_1} g_1^{n-1} & \cdots & \sin(\phi_{n-2})\partial_{\phi_{n-3}} g_1^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} \\ \sin(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} & \sin(\phi_{n-2})\partial_\varphi g_2^{n-1} & \sin(\phi_{n-2})\partial_{\phi_1} g_2^{n-1} & \cdots & \sin(\phi_{n-2})\partial_{\phi_{n-3}} g_2^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} & \sin(\phi_{n-2})\partial_\varphi g_{n-1}^{n-1} & \sin(\phi_{n-2})\partial_{\phi_1} g_{n-1}^{n-1} & \cdots & \sin(\phi_{n-2})\partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} \\ \cos(\phi_{n-2}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin(\phi_{n-2}) \end{vmatrix}$$
$$= r\sin^{n-3}(\phi_{n-2}) r^{n-2} \begin{vmatrix} \sin^2(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} & \partial_\varphi g_1^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_1^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_1^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} \\ \sin^2(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} & \partial_\varphi g_2^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_2^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_2^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin^2(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} & \partial_\varphi g_{n-1}^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_{n-1}^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} \\ \cos(\phi_{n-2})\sin(\phi_{n-2}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin(\phi_{n-2}) \end{vmatrix}$$
$$= r\sin^{n-3}(\phi_{n-2}) r^{n-2} \begin{vmatrix} g_1^{n-1} & \partial_\varphi g_1^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_1^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_1^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_1^{n-1} \\ g_2^{n-1} & \partial_\varphi g_2^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_2^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_2^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1}^{n-1} & \partial_\varphi g_{n-1}^{n-1} & \partial_{\phi_1} g_{n-1}^{n-1} & \cdots & \partial_{\phi_{n-3}} g_{n-1}^{n-1} & \cos(\phi_{n-2}) g_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin(\phi_{n-2}) \end{vmatrix} = (-1) r \sin^{n-3}(\phi_{n-2}) \cdot J_{n-1}$$

kde v poslední úpravě matice jsme k prvnímu sloupci přičetli $\cos(\phi_{n-2})$ násobek posledního. Pomocí tohoto rekurentního vztahu již obdržíme

$$\begin{aligned} J_n &= (-1)^{n-2} r^{n-2} \sin^{n-2}(\phi_{n-2}) \sin^{n-3}(\phi_{n-3}) \ldots \sin(\phi_1)\, J_2 \\ &= (-1)^n r^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_{n-2}) \sin^{n-3}(\phi_{n-3}) \ldots \sin(\phi_1)\,. \end{aligned}$$

6.3 Důkaz $\alpha(n) = |B^n(0,1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, $\kappa(n) = |\partial B^n(0,1)| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

Spočtěme obecnější integrály (značení viz 5.4)

$$\int\limits_{B^n(0,R)} |x|^{2\alpha} \, \mathrm{d}x\,, \qquad \int\limits_{\partial B^n(0,R)} |x|^{2\alpha} \, \mathrm{d}x$$

požadované důkazy pak získáme dosazením $\alpha = 0$, $R = 1$. Pomocí substituce do zobecněných sférických souřadnic (viz 5.3) získáme

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B^n(0,R)} |x|^{2\alpha} \, \mathrm{d}x &= \int\limits_0^R \rho^{2\alpha+n-1} \, \mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\rho \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \int\limits_0^{2\pi} \sin^i(\phi_i) \, \mathrm{d}\phi_i \\
&= \left[\frac{\rho^{2\alpha+n}}{2\alpha+n} \right]_0^R \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} I_i = \frac{2\pi R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} I_i \\
\int\limits_{\partial B^n(0,R)} |x|^{2\alpha} \, \mathrm{d}x &= R^{2\alpha+n-1} \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\rho \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \int\limits_0^{2\pi} \sin^i(\phi_i) \, \mathrm{d}\phi_i \\
&= 2\pi R^{2\alpha+n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} I_i = \frac{2\alpha+n}{R} \int\limits_{B^n(0,R)} |x|^{2\alpha} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

kde jsme využili

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^{\pi} \sin(\phi) \, \mathrm{d}\phi = \Big[-\cos(\phi) \Big]_0^{\pi} = 2 \\
I_2 &= \int\limits_0^{\pi} \sin^2(\phi) \, \mathrm{d}\phi = \int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos(2\phi)}{2} \, \mathrm{d}\phi = \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

a rekurzivního vztahu

$$\begin{aligned}
I_k &= \int\limits_0^{\pi} \sin^k(\phi) \, \mathrm{d}\phi = \int\limits_0^{\pi} \sin^{k-1}(\phi) \sin(\phi) \, \mathrm{d}\phi \\
&= \Big[-\sin^{k-1}(\phi) \cos(\phi) \Big]_0^{\pi} + (k-1) \int\limits_0^{\pi} \sin^{k-2}(\phi) \cos^2(\phi) \, \mathrm{d}\phi \\
&= (k-1) \int\limits_0^{\pi} \sin^{k-2}(\phi) \left(1 - \sin^2(\phi)\right) \, \mathrm{d}\phi = (k-1)\left(I_{k-2} - I_k\right) = \frac{k-1}{k} I_{k-2} \\
&= \begin{cases} 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2l}{2l+1} = 2\frac{(k-1)!!}{k!!} & k = 2l+1 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2l-1}{2l} = \pi\frac{(k-1)!!}{k!!} & k = 2l \end{cases}, \; l \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

kde symbolem $(\cdot)!!$ (dvojitý faktoriál) jsme označili

$$n!! = \prod_{i=1}^{k} (2i+m), \; n = 2k+m, \; k \in \mathbb{N}, \; m \in \{0,1\} \text{ a } 0!! = 1!! = 1$$

Pro zajímavost

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I_k	2	$\frac{1\pi}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{32}{35}$	$\frac{35\pi}{128}$	$\frac{256}{315}$	$\frac{63\pi}{256}$	$\frac{512}{693}$	$\frac{231\pi}{1024}$	$\frac{2048}{3003}$
$\prod_{i=1}^{k} I_i$	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{1\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{1\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{1\pi^4}{24}$	$\frac{32\pi^4}{945}$	$\frac{1\pi^5}{120}$	$\frac{64\pi^5}{10395}$	$\frac{1\pi^6}{720}$	$\frac{128\pi^6}{135135}$

Dále

$$I_k I_{k+1} = 2\frac{(k-1)!!}{k!!} \pi \frac{(k)!!}{(k+1)!!} = 2\pi \frac{(k-1)!!}{(k+1)[(k-1)!!]} = \frac{2\pi}{k+1}$$

a proto

$$\prod_{i=1}^{n-2} I_i = \begin{cases} I_1 \prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} I_{2j} I_{2j+1} = 2 \prod_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{2\pi}{2j+1} = 2 \frac{(2\pi)^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!!} = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!!} & n = 2k+1 \\ \prod_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} I_{2j-1} I_{2j} = \prod_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{\pi}{j} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} & n = 2k+2 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \pi^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}}{(n-2)!!} = \frac{\pi^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Využijeme toho k dopočtení

$$\int\limits_{B^n(0,R)} |x|^{2\alpha} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2\pi R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n} \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-3}{2}}}{(n-2)!!} = \frac{2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \pi^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} R^{2\alpha+n}}{(2\alpha+n)\cdot(n-2)!!} & n = 2k+1 \\ \frac{2\pi R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n} \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^{2\alpha+n}}{(2\alpha+n)\cdot(n-2)!!} & n = 2k+2 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}$$

Speciálně pro $\alpha = 0$ je

$$|B^n(0,R)| = \begin{cases} \frac{2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \pi^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} R^n}{n\cdot(n-2)!!} = \frac{2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \pi^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} R^n}{n!!} & n = 2k+1 \\ \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{n\cdot(\frac{n-2}{2})!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{n\cdot(\frac{n-2}{2})!} & n = 2k+2 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}$$

a další volbou $R = 1$ obdržíme pro $|B^n(0,1)| = \int_{B^n(0,1)} 1 \, \mathrm{d}x$ a $|\partial B^n(0,1)| = n|B^n(0,1)|$ vztahy (viz také [wiki])

$$|\partial B^n(0,1)| = n\,|B^n(0,1)| = \begin{cases} \frac{n 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \pi^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{n!!} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}} & n = 2k+1 \\ \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n-2}{2})!} & n = 2k+2 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$$

kde jsme využili vlastností

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+k) = \frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k} = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-1}{2}}} \qquad \forall n = 2k+1, \ k \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = \Gamma(k) = (k-1)! = (\frac{n-2}{2})! \qquad \forall n = 2k+2, \ k \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$$

funkce Γ, viz [wiki]. Pro počáteční hodnoty hodnoty n můžeme sestavit tabulku

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lvert B^n(0,1)\rvert$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{\pi^4}{24}$	$\frac{32\pi^4}{945}$	$\frac{\pi^5}{120}$
$\lvert\partial B^n(0,1)\rvert$	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$	π^3	$\frac{16\pi^3}{15}$	$\frac{\pi^4}{3}$	$\frac{32\pi^4}{105}$	$\frac{\pi^5}{12}$

Reference

[Rok11] Mirko Rokyta: Parciální diferenciální rovnice I, Klasická teorie,
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

[KalKub09] Josef Kalas, Jaromír Kuben: Integrální počet funkcí více proměnných,
`http://is.muni.cz/el/1431/podzim2011/M3100/IP_II.pdf`

[Bro12] Martin Brokate: Partielle Differentialgleichungen,
`http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/pde_ws11.pdf`

[Ewa10] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations