Laplaceova (a Poissonova) PDR

Nechť $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω je otevřená, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a je zadaná $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Následující PDR označme

$$\text{Laplaceova rovnice:} \qquad -\Delta u = 0 \tag{1}$$
$$\text{Poissonova rovnice:} \qquad -\Delta u = f \tag{2}$$

Funkci $v \in C^2$ splňující (1) nazveme harmonická funkce. Laplaceův operátor $-\Delta u = -\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}\right)$ je invariantní k translaci a rotaci.

Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Řešme (1) ve hypersférických souřadnicích [wiki]. Z invariance Laplaceova operátoru k translaci a rotaci plyne, že řešení v bude záviset pouze na vzdálenosti od počátku:

$$v(x) = w(r)$$

kde $r = \|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ a platí tedy $r_{x_i} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r}$ pro nenulové x. Vyjádřeme Laplaceovu rovnici v hypersférických souřadnicích:

$$\begin{aligned}
v_{x_i} &= w'(r)\frac{x_i}{r} \\
v_{x_i x_i} &= w''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + w'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
0 = \Delta v = \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i} &= w''(r)\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2} + w'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^3}\right) \\
&= w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r)
\end{aligned}$$

a zkusme ji vyřešit. Pro $r > 0$ a $w' \neq 0$ (konstantní řešení nás nezajímá) pak

$$\begin{aligned}
\frac{1-n}{r} &= \frac{1}{w'} w'' = (\ln(w'))' \\
\ln(w') &= \int \frac{1-n}{r}\,\mathrm{d}r = (1-n)\ln(r) + c_1 \\
w' &= c_2 r^{1-n} = \frac{c_2}{r^{n-1}} \\
w &= \begin{cases} b\ln(r) + c & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & n \geq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Funkci

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

kde $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha(n)$ je objem jednotkové $n-$rozměrné koule $B^n(0,1)$ nazveme fundamentální řešení Laplaceovy rovnice. Pro $\Phi(x)$ platí

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \Phi(|x|) \\
|D\Phi(x)| &= \left(\sum_{a_1+\cdots+a_d=1} \left| D^{(a_1,\ldots,a_d)} u \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c}{|x|^{n-1}} \\
\left| D^2\Phi(x) \right| &= \left(\sum_{a_1+\cdots+a_d=2} \left| D^{(a_1,\ldots,a_d)} u \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c}{|x|^{n}}
\end{aligned}$$

kde odhady platí pro nějakou konstantu $c > 0$.

Řešení Poissonovy rovnice

Dokažme, že pro $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a f má kompaktní support, pro funkci v danou vzorcem

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) f(y)\,\mathrm{d}y & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x|^{n-2}}\,\mathrm{d}y & n \geq 3 \end{cases} \tag{3}$$

platí $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ a je řešením Poissonovy rovnice (2). Toto tvrzení si dokážeme:

Důkaz $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ Předně ukážeme, že integrální vztah v (3) je konvoluce:

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$$

použijeme substituci $i \in \{1,\ldots,n\}$: $z_i = x_i - y_i$,

$$\mathrm{d}z_i = -\mathrm{d}y_i, \qquad \begin{array}{lll} y_i \to \infty & \Rightarrow z_i & \to -\infty \\ y_i \to -\infty & \Rightarrow z_i & \to \infty \end{array}$$

a tedy:

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int_{\infty}^{-\infty} \cdots \int_{\infty}^{-\infty} \Phi(z) f(x-z) (-1)^n \,\mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) f(x-z)\,\mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \qquad \text{přeznačení } y = z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Pro

$$\frac{v(x+he_i) - v(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\,\mathrm{d}y$$

konverguje $\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} \to f_{x_i}$ stejnoměrně a f má kompaktní support, a proto [wiki]:

$$
\begin{aligned}
v_{x_i}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x+he_i)-v(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i}(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{a podobně} \\
v_{x_i x_j}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i x_j}(x-y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Pravá strana je spojitá vzhledem k proměnné x a tedy (pokud integrál existuje) je $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz $-\Delta v = f$ Podívejme se tedy (bez podvádění) na

$$
\begin{aligned}
\Delta v(x) &= \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y}_{I_1(\varepsilon)} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,\mathrm{d}y + \underbrace{d}_{I_2(\varepsilon)} \\
&= I_1(\varepsilon) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= I_1(\varepsilon) + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) f_\nu(x-y)\,\mathrm{d}S(y)}_{I_2(\varepsilon)} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) \underbrace{- \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi_\nu(y) f(x-y)\,\mathrm{d}S(y)}_{I_3(\varepsilon)} + \\
&\qquad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta\Phi(y)\cdot f(x-y)\,\mathrm{d}y}_{0}
\end{aligned}
$$

kde jsme využili skutečnosti, že

$$
\begin{aligned}
\Delta_x f(x-y) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_i}\left(f(x-y)\right) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(f_i(x-y)\cdot 1\right) \qquad = \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{ii}(x-y)} \\
&\hphantom{= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_i}\left(f(x-y)\right) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(f_i(x-y)\cdot 1\right) \qquad =} \quad \| \\
\Delta_y f(x-y) &= \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\partial_{y_i}\left(f(x-y)\right) = \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\left(f_i(x-y)\cdot(-1)\right) = \overbrace{\sum_{i=1}^n f_{ii}(x-y)}
\end{aligned}
$$

Pro $I_1(\varepsilon)$ platí

$$
\begin{aligned}
|I_1(\varepsilon)| &\le C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \,\mathrm{d}y \\
&\le \begin{cases} \frac{1}{2\pi} C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)| \,\mathrm{d}y \le C\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)| & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}} \,\mathrm{d}y \le C\varepsilon^2 & n \ge 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

jelikož [wiki]

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)| \,\mathrm{d}y \overset{\varepsilon \le 1}{=} -\int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \ln(r) r \,\mathrm{d}r = 2\pi \left| \frac{\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \right| \le 2\pi\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)| \\
&\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}} \,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2})}{r^{n-2}} \,\mathrm{d}r \mathrm{d}\phi_1 \cdots \mathrm{d}\phi_{n-2} \mathrm{d}\phi_{n-1} \\
&= 2\pi \left(\prod_{i=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^{n-1-i}(\phi_i) \,\mathrm{d}\phi_i \right) \int_0^\varepsilon r \,\mathrm{d}r = C\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Dále

$$
\begin{aligned}
|I_2(\varepsilon)| &\le \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \,\mathrm{d}S(y) \\
&\le \begin{cases} \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)| \,\mathrm{d}S(y) \le C\varepsilon |\ln(\varepsilon)| & n = 2 \\ \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}} \,\mathrm{d}S(y) \le C\varepsilon & n \ge 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

jelikož

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\ln(|y|)| \,\mathrm{d}S(y) = |\ln(\varepsilon)| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \mathrm{d}S(y) = |\ln(\varepsilon)| 2\pi\varepsilon \\
&\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|^{n-2}} \,\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \mathrm{d}S(y) = \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}} n(n-2)\alpha(n) = C\varepsilon
\end{aligned}
$$

V poslední části $I_3(\varepsilon)$ si všimneme, že

$$
\begin{aligned}
D\Phi(y) &= \left\{ \partial_{y_i} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|y|^{n-2}} \right\}_{i=1}^n = \left\{ \frac{2-n}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{2y_i}{|y|^{n-1} \cdot 2|y|} \right\}_{i=1}^n \\
&= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n}, \qquad \nu = \frac{-y}{|y|} \\
\Phi_\nu(y) &= \nu^\top D\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^n} \frac{-1}{\varepsilon} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \quad \text{na } \partial B(0,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

a proto

$$I_3(\varepsilon) = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi_\nu(y) f(x-y)\,\mathrm{d}S(y) = -\underbrace{\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}}_{|\partial B(0,\varepsilon)|} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\,\mathrm{d}S(y)$$

$$= -\frac{1}{|\partial B(0,\varepsilon)|} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)\,\mathrm{d}S(y) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(x)$$

jelikož poslední výraz je průměrná hodnota na povrchu koule se středem v bodě x a poloměrem $\varepsilon \to 0$.

Pomocné

Hypersférické souřadnice [wiki]

$$\begin{aligned}
n\text{-koule}: &\qquad B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \; \|x\| \le r\} \\
n\text{-sféra}: &\qquad S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \; \|x\| = r\} \\
\text{objem jednotkové } n\text{-sféry}: &\qquad \alpha(n) = |B^n(1)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \\
\text{povrch jednotkové } n\text{-sféry}: &\qquad n\alpha(n) = |\partial B^n(1)| = |S^{n+1}(1)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sférické souřadnice}: \qquad x_1 &= r\cos(\phi_1) \\
x_2 &= r\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\
x_3 &= r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3) \\
&\dots \\
x_{n-1} &= r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\dots\sin(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1}) \\
x_n &= r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\dots\sin(\phi_{n-2})\sin(\phi_{n-1}) \\
\phi_{n-1} \in \langle 0, 2\pi), \; \phi_1, \dots, \phi_{n-2} &\in \langle 0, \pi)
\end{aligned}$$