Příklad 5.6. Drábek, Holušová: Parciální diferenciální rovnice, MI21

Řešte difuzní rovnici $u_t = ku_{xx}$ s počáteční podmínkou

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Řešení zapište pomocí chybové funkce $\operatorname{erf}(x)$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \left(3 \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \,\mathrm{d}y \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \,\mathrm{d}y + 2 \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \,\mathrm{d}y \right) \end{aligned}$$

Ve výpočtu integrálů provedeme substituci

$$s = -\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}, \quad \mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{4kt}} \mathrm{d}y, \quad \begin{array}{llll} y \to & -\infty & \Rightarrow & s \to & -\infty \\ y \to & 0 & \Rightarrow & s \to & \frac{-x}{\sqrt{4kt}} \\ y \to & \infty & \Rightarrow & s \to & \infty \end{array}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \,\mathrm{d}s + 2 \int_{-\infty}^{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} \,\mathrm{d}s \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi} + 2 \int_{-\infty}^{0} e^{-s^2} \,\mathrm{d}s + 2 \int_{0}^{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} \,\mathrm{d}s \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi} + 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} \,\mathrm{d}s \right) \\ &= 2 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) \end{aligned}$$