Katedra fyziky
Vysoká škola báňská - Technická Univerzita Ostrava

VEKTOROVÝ POČET PRO ZÁKLADNÍ KURZ FYZIKY

(Určeno pro studenty FBI, kombinované studium Ostrava a Lázně Bohdaneč)

Radim UHLÁŘ
radim.uhlar@vsb.cz

Kapitola 1

Úvod

Ve fyzice používáme pro popis obecných zákonitostí přírody fyzikální veličiny, které vystupují v matematických formulacích fyzikálních zákonů. Rozlišujeme veličiny skalární a vektorové. Skalární veličina poskytuje informaci o míře výskytu sledované fyzikální vlastnosti objektu nebo jevu, která je dána hodnotou s jednotkou, nezávislou na volbě souřadného systému. Skalárními veličinami jsou například hmotnost tělesa, hustota látky, objem, délka, energie, elektrický náboj, teplota, čas, tlak. Z hlediska matematiky "zacházíme"se skalárními veličinami jako s reálnými čísly pouze s tím rozdílem, že zpravidla mají jednotku. Používáme klasické matematické operace jako je sčítání, násobení, umocňování apod.

Vektorová veličina navíc poskytuje informaci o směru a orientaci. Vektorovými veličinami jsou například posunutí, polohový vektor, rychlost, zrychlení, síla, moment síly, hybnost, intenzita elektrického pole, spin. V jednorozměrném prostoru (na přímce) je vektorová veličina určena jedním číslem s jednotkou, ve dvojrozměrném prostoru (v rovině) dvěma čísly s jednotkou a v prostoru třemi čísly s jednotkou. Tato čísla jsou složky vektorové veličiny a jsou závislá na volbě souřadného systému. Pomocí vektorových veličin můžeme účinně a elegantně popsat chování nejsložitějších fyzikálních soustav. Navíc použití vektorových veličin ve fyzikálních zákonech zajišťuje, že výsledky, které takto získáme, nejsou závislé na volbě souřadného systému. Vektory byly poprvé použity v matematice a do fyziky byly převzaty v podobě vektorových veličin, což jsou vektory doplněné o jednotku příslušné veličiny. Vektorové veličiny byly nepostradatelným nástrojem rozvoje například klasické mechaniky a teorie elektromagnetického pole.

V psaném textu jsou vektorové veličiny respektive vektory značeny šipkou nad písmenem, které pojmenovává vektor nebo vektorovou veličinu, např. $\vec{F}$. V tištěném textu se značí zpravidla tučnou kurzívou ($\boldsymbol{F}$). Skalární veličiny se v tištěném textu značí kurzívou.

V tomto studijním materiálu jsou předloženy čtenáři základy vektorového počtu, které se ve fyzice aplikují na vektorové veličiny.

Kapitola 2

Vektory

2.1 Základní definice

Aritmetickým vektorem je uspořádaná n-tice reálných čísel, tzn. n-prvková množina reálných čísel, ve které záleží na pořadí prvků. n je dimenze vektoru. Jestliže zavedeme velikost vektoru, můžeme definovat jeho geometrickou interpretaci pro dimenzi 1, 2 nebo 3, která je nezávislá na volbě souřadného systému. Vázaný vektor $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pak chápeme jako uspořádanou dvojici bodů [A,B], kde A je počáteční bod vektoru a B je koncový bod vektoru nebo jako orientovanou úsečku v euklidovském prostoru (obr. 2.1). Přímka, která spojuje počáteční a koncový bod vektoru (počáteční a koncový bod nejsou stejné), se nazývá vektorová přímka tohoto vektoru. Vektorová přímka určuje směr vektoru, orientace vektoru je dána pořadím bodů v uspořádané dvojici [A,B]. Jestliže pořadí těchto bodů změníme, získáme opačně orientovaný vektor k původnímu vektoru.

Umístěním soustavy vázaných vektorů ve společném bodě P nazýváme taková jejich rovnoběžná posunutí (translace), že počáteční body všech vázaných vektorů soustavy splynou v bodě P. Umísťování vektorů se ve fyzice využívá například při hledání výslednice různoběžných sil. Dva vázané vektory se nazývají sobě rovné, právě když po umístění v jednom bodě splynou.

Volným vektorem (geometrickým vektorem) nazýváme množinu všech vzájemně rovných vázaných vektorů.

Velikostí (délkou, absolutní hodnotou, modulem, normou) vektoru $\mid \boldsymbol{w} \mid = \mid \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mid$ nazýváme délku úsečky AB a značíme ji

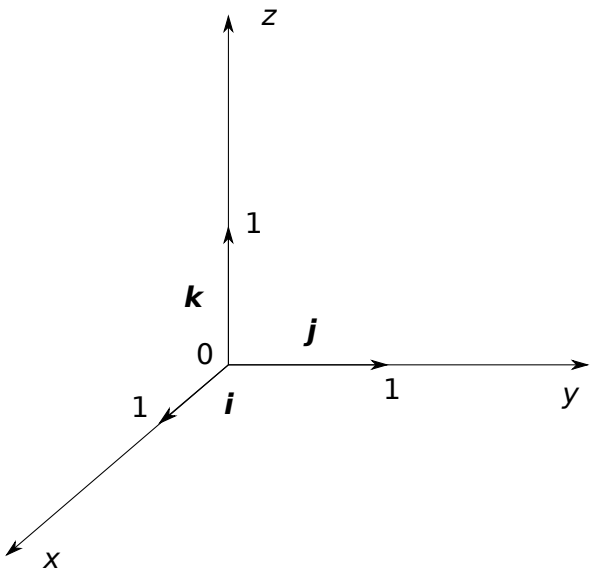
$$\boldsymbol{w} = w. \tag{2.2.1}$$

Nulovým vektorem nazýváme vektor, který je reprezentován orientovanou úsečkou nulové délky, tzn. její počáteční bod splývá s koncovým bodem. Nulový vektor se značí symbolem $\boldsymbol{o}$ a platí $\mid \boldsymbol{o} \mid = 0$.

Jednotkovým vektorem nazýváme každý vektor o velikosti rovné číslu 1. Jednotkové vektory označujeme symboly $\boldsymbol{w}^0$, $\boldsymbol{b}^0$ apod.

Jednotkové vektory se společným počátečním bodem 0, který je počátkem kartézské souřadnicové soustavy, jejichž směry a orientace jsou dány souřadnicovými osami kartézské souřad-

Obrázek 2.1: Vázaný vektor $\boldsymbol{w}$.



Obrázek 2.2: Základní vektory kartézského souřadného systému v prostoru. Podobně se definují základní vektory pro dvojrozměrný prostor (vektory $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$) a jednorozměrný prostor (vektor $\boldsymbol{i}$).

nicové soustavy, se nazývají základní vektory a značí se $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (obr. 2.2).

Vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ se nazývají rovnoběžné, právě když po umístění v společném bodě mají společnou vektorovou přímku. Rovnoběžné vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ se nazývají souhlasně rovnoběžné, jestliže po umístění do bodu A leží v téže polopřímce s počátečním bodem A (značíme $\boldsymbol{u} \uparrow\uparrow \boldsymbol{v}$). Rovnoběžné vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ se nazývají nesouhlasně rovnoběžné, jestliže po umístění do bodu A leží ve vzájemně opačných polopřímkách s počátečním bodem A (značíme $\boldsymbol{u} \uparrow\downarrow \boldsymbol{v}$).

Vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ se nazývají komplanární, právě když po umístění ve společném bodě leží právě v jedné rovině.

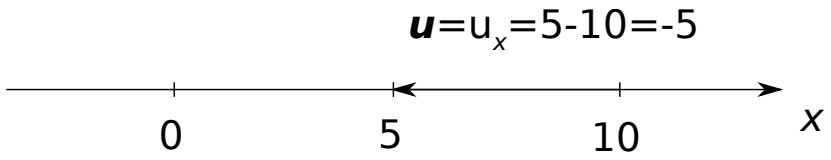
2.2 Vyjádření vektoru pomocí jeho souřadnic

Je dán vektor $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ v jednorozměrném prostoru a souřadnice jeho počátečního bodu A_x a souřadnice jeho koncového bodu B_x. Píšeme $\mathrm{A} = [\mathrm{A}_x]$ a $\mathrm{B} = [\mathrm{B}_x]$. Pak jedinou souřadnicí vektoru $\boldsymbol{w}$ je číslo (obr. 2.3)

$$w_x = \mathrm{B}_x - \mathrm{A}_x. \tag{2.2.2}$$

Píšeme $\boldsymbol{w} = w_x$. Základní vektor je jeden a můžeme jej vyjádřit pomocí souřadnic takto:

$$\boldsymbol{i} = 1 \tag{2.2.3}$$



Obrázek 2.3: Vyjádření vektoru pomocí souřadnic v jednorozměrném prostoru.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{w} = w_x$ platí:

$$w = \mid w_x \mid . \tag{2.2.4}$$

Je dán vektor $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ve dvojrozměrném prostoru a souřadnice jeho počátečního bodu $\mathrm{A}_x,\ \mathrm{A}_y$, a souřadnice jeho koncového bodu $\mathrm{B}_x,\ \mathrm{B}_y$. Píšeme $\mathrm{A} = [\mathrm{A}_x,\ \mathrm{A}_y]$ a $\mathrm{B} = [\mathrm{B}_x,\ \mathrm{B}_y]$. Pak souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{w}$ jsou čísla

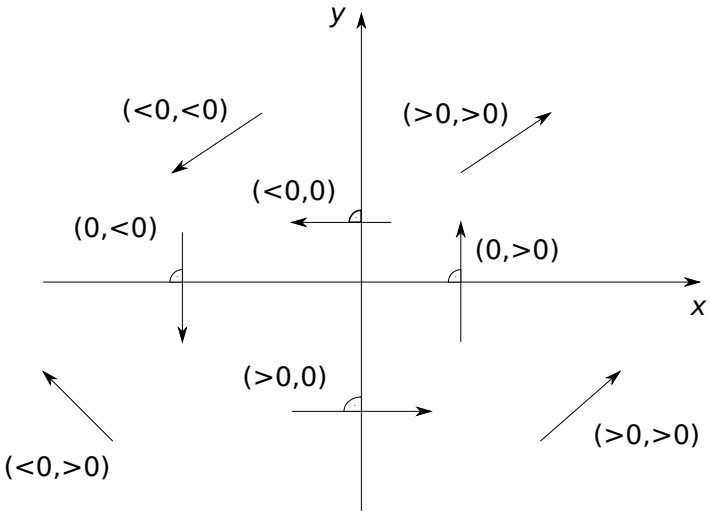
$$w_x = \mathrm{B}_x - \mathrm{A}_x,\ w_y = \mathrm{B}_y - \mathrm{A}_y. \tag{2.2.5}$$

Píšeme $\boldsymbol{w} = (w_x,\ w_y)$. Základní vektory můžeme vyjádřit pomocí souřadnic takto:

$$\boldsymbol{i} = (1,\ 0), \quad \boldsymbol{j} = (0,\ 1). \tag{2.2.6}$$

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{w} = (w_x,\ w_y)$ platí:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}. \tag{2.2.7}$$



Obrázek 2.4: Znaménka souřadnic vektoru souvisí s jeho směrem a orientací vzhledem k souřadnému systému.

Je možné volit všechny přípustné kombinace souřadnic podle toho, jaké osy k popisu polohy bodů v daném prostoru použijeme. Například v jednorozměrném prostoru místo osy x použijeme osu y nebo osu z, ve dvojrozměrném prostoru zbývající kombinace os (x a z, y a z).

Obr. 2.4 znázorňuje souvislost mezi směrem a orientací vektoru se znaménky jeho souřadnic v rovině. I v trojrozměrném prostoru platí: Je-li vektor kolmý na souřadnou osu, souřadnice této ose odpovídající je rovna nule.

Je dán vektor $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ v trojrozměrném prostoru a souřadnice jeho počátečního bodu $\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z$ a souřadnice jeho koncového bodu $\mathrm{B}_x, \mathrm{B}_y, \mathrm{B}_z$. Píšeme $\mathrm{A} = [\mathrm{A}_x,\ \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z]$ a $\mathrm{B} = [\mathrm{B}_x,\ \mathrm{B}_y, \mathrm{B}_z]$. Pak souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{w}$ jsou čísla

$$w_x = \mathrm{B}_x - \mathrm{A}_x,\ w_y = \mathrm{B}_y - \mathrm{A}_y,\ w_z = \mathrm{B}_z - \mathrm{A}_z. \tag{2.2.8}$$

Píšeme $\boldsymbol{w} = (w_x,\ w_y,\ w_z)$. Základní vektory můžeme vyjádřit pomocí souřadnic takto:

$$\boldsymbol{i} = (1,\ 0,\ 0), \quad \boldsymbol{i} = (0,\ 1,\ 0), \quad \boldsymbol{k} = (0,\ 0,\ 1) \tag{2.2.9}$$

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{w} = (w_x,\ w_y,\ w_z)$ platí:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \tag{2.2.10}$$

Analogicky vyjadřujeme vektory pomocí souřadnic v n-dimenzionálních prostorech, kde n je přirozené číslo.

Kapitola 3

Vektorová algebra

3.1 Sčítání a odčítání vektorů

Jestliže $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ jsou dva vektory, pak součtem $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nazýváme vektor $\boldsymbol{w}$, jehož umístěním do bodu A je vektor $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (obr. 3.1).

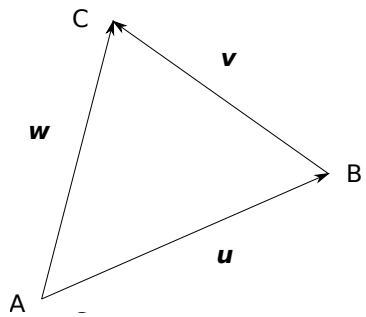
Jestliže umístíme dva různoběžné vektory do téhož bodu, součet obou vektorů získáme sestrojením vektorového rovnoběžníku (obr. 3.2).

Vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ se nazývají vzájemně opačné, právě když platí

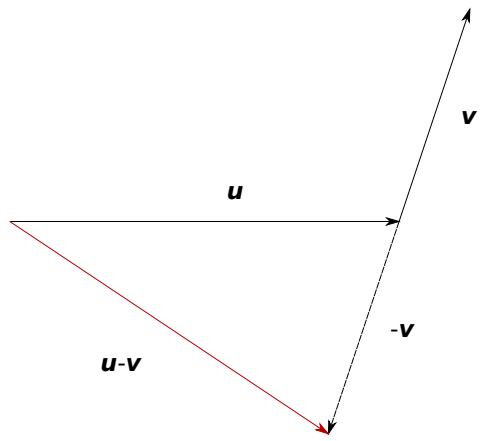
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}. \tag{3.3.1}$$

Odčítání vektorů je ve skutečnosti přičtení opačného vektoru (obr. 3.3):

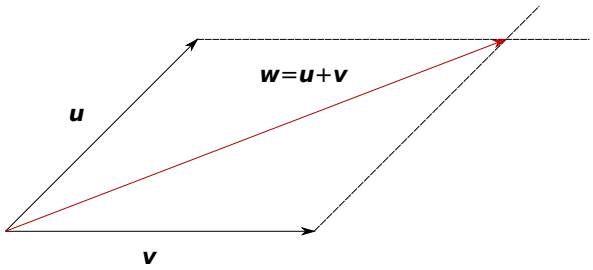
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$



Obrázek 3.1: Součet vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.



Obrázek 3.3: Odčítání vektorů.



Obrázek 3.2: Vektorový rovnoběžník pro součet dvou různoběžných vektorů se společným počátkem.

Platí komutativní zákon pro sčítání vektorů

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \tag{3.3.2}$$

a asociativní zákon pro sčítání vektorů

$$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}. \tag{3.3.3}$$

Jestliže $\boldsymbol{u} = (u_x,\ u_y,\ u_z)$ a $\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$, pak platí

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_x + v_x,\ u_y + v_y,\ u_z + v_z). \tag{3.3.4}$$

3.2 Násobení vektoru reálným číslem

Nechť $k \in R$ $(k \neq 0)$ a $\boldsymbol{u}$ je nenulový vektor, pak k-násobkem vektoru $\boldsymbol{u} = (u_x,\ u_y,\ u_z)$ je vektor $\boldsymbol{w}$, pro který platí:

$$\boldsymbol{w} = k\boldsymbol{u} = k(u_x,\ u_y,\ u_z) = (ku_x,\ ku_y,\ ku_z) \tag{3.3.5}$$

a má velikost $\mid w \mid = \mid k \mid u$. Rovněž platí $\boldsymbol{w} \uparrow\uparrow \boldsymbol{u}$, je-li $k > 0$ a $\boldsymbol{w} \uparrow\downarrow \boldsymbol{u}$, je -li $k < 0$. Jestliže je vektor u nulový nebo $k = 0$, pak k-násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$ je nulový vektor.

Vektor $\boldsymbol{u} = (u_x,\ u_y,\ u_z)$ lze vyjádřit pomocí základních vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ takto:

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}, \tag{3.3.6}$$

protože

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k} &= u_x(1,\ 0,\ 0) + u_y(0,\ 1,\ 0) + u_z(0,\ 0,\ 1) = \\ &= (u_x,\ 0,\ 0) + (0,\ u_y,\ 0) + (0,\ 0,\ u_z) = (u_x,\ u_y,\ u_z).\end{aligned}$$

Příklad

Určete součet dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (1,\ 0,\ 2)$, $\boldsymbol{v} = (0,\ 1,\ 1)$ a jeho velikost.

Řešení

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (1,\ 0,\ 2) + (0,\ 1,\ 1) = (1,\ 1,\ 3) \\ \mid \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \mid &= \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}\end{aligned}$$

Příklad

Vyjádřete rozdíl vektorů $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ pomocí základních vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{u} = (1,\ 0,\ 2)$ a $\boldsymbol{v} = (0,\ 1,\ 1)$.

Řešení

Odečtením odpovídajících si souřadnic dostaneme:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (1,\ -1,\ 1) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

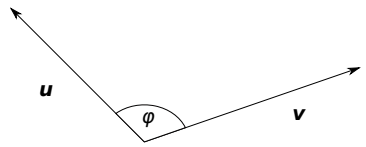
Příklad

Helikoptéra stoupá ve svislém směru 100 m, pak se pohybuje vodorovně 500 m na východ a nakonec 1000 m vodorovně na sever. Jak daleko bude v konečné poloze od druhé helikoptéry, která startovala ze stejného místa a pohybovala se nejprve 200 m vzhůru, 100 m na západ a 500 m na sever?

Řešení

Osu x zorientujme svisle vzhůru, osu y na východ a osu z na sever. Počátkem souřadného systému je místo startu obou helikoptér. Pak konečná poloha obou helikoptér je popsána vektory $\boldsymbol{r_1}$ a $\boldsymbol{r_2}$ s počátkem v bodě O $[0,\ 0,\ 0]$ souřadného systému a s koncovým bodem, který odpovídá konečné poloze obou helikoptér. Pak $\boldsymbol{r_1} = (100,\ 500,\ 1000)$ m a $\boldsymbol{r_2} = (200,\ -100,\ 500)$ m. Když si nakreslíte obrázek s těmito vektory, snadno dojdete k závěru, že vzdálenost mezi konečnými polohami helikoptér je:

$$\begin{aligned}\mid \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2} \mid &= \mid ((100-200),\ (500+100),\ (1000-500)) \mid \ \text{m} = \\ &= \sqrt{100^2 + 600^2 + 500^2}\ \text{m} = 787,4\ \text{m}\end{aligned}$$



Obrázek 3.4: Odchylka vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

3.3 Skalární součin vektorů

Odchylkou dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ nazýváme velikost konvexního úhlu sevřeného polopřímkami AB a AC (obr. 3.4): $\varphi = |\measuredangle(\mathrm{AB},\ \mathrm{AC})| = |\measuredangle(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})|$. Jeho přípustné hodnoty jsou z intervalu od 0° do 180°.

Skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{u} = (u_x,\ u_y,\ u_z)$ a $\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ je reálné číslo

$$\boldsymbol{uv} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \tag{3.3.7}$$

Skalární součin je komutativní operace:

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}, \tag{3.3.8}$$

protože $u_x v_x = v_x u_x$ atd. Rovněž platí distributivní zákon pro skalární násobení vektorů vzhledem k sčítání vektorů:

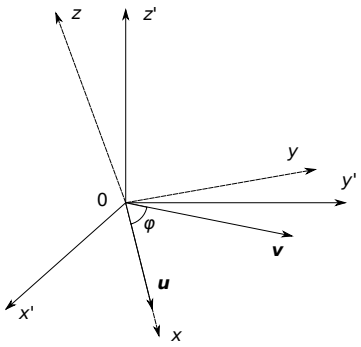
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{uv} + \boldsymbol{uw}, \tag{3.3.9}$$

protože

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= u_x(v_x + w_x) + u_y(v_y + w_y) + u_z(v_z + w_z) = \\ &= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = \\ &= \boldsymbol{uv} + \boldsymbol{uw}.\end{aligned}$$

Skalární součin je možné použít k výpočtu odchylky dvou vektorů. Nechť jsou dány dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ (obr. 3.5), které spolu svírají úhel φ. Protože je skalární součin reálným číslem (ve fyzice skalárem), jeho hodnota nezávisí na volbě souřadného systému. Proto můžeme rotovat souřadným systémem $\mathrm{O}(x',\ y',\ z')$ tak, že dostaneme nový souřadný systém $\mathrm{O}(x,\ y,\ z)$, aniž bychom ovlivnili hodnotu skalárního součinu. Osa x je rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{u}$ a osa z je kolmá na rovinu, ve které leží oba vektory. V novém souřadném systému je snazší vyjádřit skalární součin, protože některé souřadnice vektoru jsou nulové: $\boldsymbol{u} = (u_x,\ 0,\ 0)$ and $\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ 0) = (v\cos\varphi,\ v\sin\varphi,\ 0)$. Proto

$$\boldsymbol{uv} = u_x v_x = uv\cos\varphi. \tag{3.3.10}$$



Obrázek 3.5: Transformace souřadnic neovlivňuje hodnotu skalárního součinu vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Výraz $v\cos\varphi$ představuje průmět vektoru $\boldsymbol{v}$ na vektorovou přímku vektoru $\boldsymbol{u}$, tedy skalární součin je součinem tohoto průmětu a velikosti vektoru u. Jestliže by byla osa x rovnoběžná tentokrát s vektorem v, geometrickou interpretací skalárního součinu by tentokrát byl součin průmětu vektoru u na vektorovou přímku vektoru $\boldsymbol{v}$ a velikosti vektoru $\boldsymbol{v}$. Porovnáme-li rovnice [3.3] a [3.3.10], dostaneme vztah, který se používá pro výpočet odchylky dvou vektorů:

$$\cos\vartheta = \frac{\boldsymbol{uv}}{uv}. \tag{3.3.11}$$

Rovnice [3.3.11] je alternativní definicí skalárního součinu. Jestliže je skalární součin dvou nenulových vektorů roven nule, jsou tyto vektory na sebe kolmé. Jestliže alespoň jeden z vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je nulový, definujeme $\boldsymbol{uv} = 0$. Pro skalární součin platí komutativní zákon, tzn. $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$. Použijeme-li skalární součin na základní vektory, dostaneme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1 \\ \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{jk} = 0. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Pro skalární násobení vektorů vzhledem k sčítání vektorů platí distributivní zákon:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{uv} + \boldsymbol{uw}. \tag{3.3.13}$$

Pro násobení skalárního součinu skalárem platí asociativní zákon:

$$k(\boldsymbol{uv}) = (k\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(k\boldsymbol{v}). \tag{3.3.14}$$

Pro skalární součin vektorů asociativní zákon neplatí, tj. obecně $(\boldsymbol{uv})\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{u}(\boldsymbol{vw})$.

3.4 Vyjádření vektoru pomocí jednotkového vektoru

Nechť je dán vektor

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}. \tag{3.3.15}$$

Pravou stranu rovnice [3.3.15] vynásobme a vydělme velikostí vektoru $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} = u\left(\frac{u_x}{u}\boldsymbol{i} + \frac{u_y}{u}\boldsymbol{j} + \frac{u_z}{u}\boldsymbol{k}\right). \tag{3.3.16}$$

Nyní definujme tzv. směrové kosiny vektoru $\boldsymbol{u}$: $\cos\alpha = \frac{u_x}{u}$, $cos\beta = \frac{u_y}{u}$, $cos\gamma = \frac{u_z}{u}$. Úhly α, β a γ se nazývají směrové úhly vektoru $\boldsymbol{u}$. Nyní snadno přepíšeme vztah [3.3.16] do tvaru:

$$\boldsymbol{u} = u(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma) = u(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) \tag{3.3.17}$$

nebo

$$\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{n}, \tag{3.3.18}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor, který má stejný směr a orientaci jako vektor $\boldsymbol{u}$. Jeho souřadnice jsou současně $\cos\alpha$, $\cos\beta$ a $\cos\gamma$.

Dokažme, že vektor $\boldsymbol{n}$ má opravdu velikost 1. Podle vztahu [3.3.16] platí $\boldsymbol{n} = (\frac{u_x}{u},\ \frac{u_y}{u},\ \frac{u_z}{u})$. Proto velikost vektoru $\boldsymbol{n}$ je:

$$n = \sqrt{\frac{u_x^2}{u_x^2+u_y^2+u_z^2} + \frac{u_y^2}{u_x^2+u_y^2+u_z^2} + \frac{u_z^2}{u_x^2+u_y^2+u_z^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{u_x^2+u_y^2+u_z^2}} = 1.$$

Mějme vektor $\boldsymbol{v}$. Průmět tohoto vektoru na vektorovou přímku vektoru $\boldsymbol{u}$ je

$$v\cos\theta = \frac{\boldsymbol{uv}}{u} = \boldsymbol{vn}, \tag{3.3.19}$$

kde θ je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor, který má stejný směr a orientaci jako vektor $\boldsymbol{u}$.

Příklad:

Určete odchylku vektorů $\boldsymbol{u} = (1,\ -3,\ 4)$ a $\boldsymbol{v} = (-3,\ 2,\ 2)$. Výsledek vyjádřete ve stupních a v radiánech.

Řešení:

Ze vztahu [3.3.11] dostaneme:

$$\vartheta = \arccos\frac{\boldsymbol{uv}}{uv} = 93^\circ = 1,62 \text{ rad}.$$

Příklad:

Vektor $a_x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ je kolmý k vektoru $\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$. Určete a_x.

Řešení:

Protože jsou oba vektory na sebe kolmé, jejich skalární součin je nulový ($\cos 90^\circ = 0$):

$$(a_x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) = a_x + 2 + 3 = a_x + 5 = 0.$$

Proto

$$a_x = -5.$$

Příklad:

Vypočítejte $(2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$, je-li dáno: $\boldsymbol{u} = (-2,\ 3,\ 4)$, $\boldsymbol{v} = (5,\ 2,\ -1)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} &= (2 \cdot (-2,\ 3,\ 4) + 3 \cdot (5,\ 2,\ -1)) \cdot (5,\ 2,\ -1) = \\ &= ((-4,\ 6,\ 8) + (15,\ 6,\ -3)) \cdot (5,\ 2,\ -1) = \\ &= (11,\ 12,\ 5) \cdot (5,\ 2,\ -1) = 55 + 24 - 5 = 74\end{aligned}$$

3.5 Vektorový součin

Nechť jsou dány dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ v pravotočivém souřadném systému (obr. 3.6a). Jejich vektorový součin je vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, jehož souřadnice jsou dány vztahem:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x). \tag{3.3.20}$$

Vektor $\boldsymbol{w}$ má tyto vlastnosti:

1. Velikost vektoru $\boldsymbol{w}$ je rovna obsahu rovnoběžníku sestrojeného z vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{u}$ (viz obr. 3.7), tzn. $w = uv \sin\varphi$, kde φ je odchylka vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.
2. Vektor $\boldsymbol{w}$ je kolmý k nenulovým a různoběžným vektorům $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.
3. Vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ tvoří pravotočivou soustavu vektorů (obr. 3.7), tj. pozorujeme-li rovnoběžník sestrojený z vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ z koncového bodu vektoru $\boldsymbol{w}$, pak přechod (přes menší úhel otočení) od vektoru $\boldsymbol{u}$ k vektoru $\boldsymbol{v}$ se děje proti smyslu otáčení hodinových ručiček. Také se používá pravidlo pravé ruky: palec pravé ruky orientujeme souhlasně s vektorem $\boldsymbol{u}$, ukazováček s vektorem $\boldsymbol{v}$ a vztyčený prostředník ukazuje orientaci vektoru $\boldsymbol{w}$.

(a) Pravotočivý kartézský souřadný systém.

(b) Levotočivý kartézský souřadný systém.

Obrázek 3.6: Správnou orientaci levotočivého nebo pravotočivého kartézského souřadného systému určíme nejsnadněji pravidlem pravé resp. levé ruky.

Jsou-li vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ rovnoběžné nebo je-li alespoň jeden z nich nulový, klademe $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. Komutativní zákon pro vektorový součin neplatí, ale platí antikomutativní zákon:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}. \tag{3.3.21}$$

Asociativní zákon pro násobení vektoru skalárem vzhledem k vektorovému násobení je:

$$k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v}). \tag{3.3.22}$$

Distributivní zákon pro vektorové násobení vzhledem k sčítání vektorů:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}. \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Pro základní vektory platí pravotočivého souřadného systému platí:

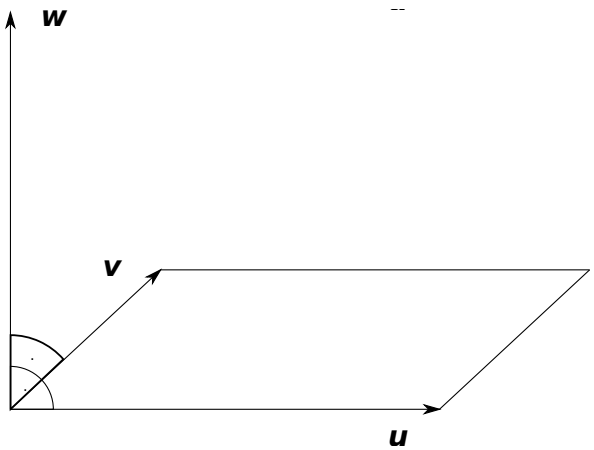
$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} &= -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} &= -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} &= -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Vyjádřeme vektorový součin pomocí základních vektorů:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(u_y v_z - u_z v_y) + \boldsymbol{j}(u_z v_x - u_x v_z) + \boldsymbol{k}(u_x v_y - u_y v_x). \tag{3.3.25}$$

Každý výraz v závorce je roven determinantu matice řádu 2×2:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}. \tag{3.3.26}$$



Obrázek 3.7: Vektorový součin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Pro určení orientace vektoru $\boldsymbol{w}$ můžeme použít pravidlo pravé ruky.

Po úpravě nakonec dostaneme:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \tag{3.3.27}$$

Dokažme vztah pro velikost vektorového součinu. Výraz

$$| \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} |^2 = (u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2$$

upravme

$$| \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} |^2 = \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) - (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2$$

a pomocí skalárního součinu dostaneme:

$$| \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} |^2 = u^2 v^2 - (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})^2. \tag{3.3.28}$$

Odmocníme rovnici [3.3.28] a současně použijeme vztah [3.3.10], abychom dostali velikost vektorového součinu:

$$| \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} | = uv\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = uv \sin \varphi, \tag{3.3.29}$$

kde φ je odchylka vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Nyní dokažme, že vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ za předpokladu, že vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ nejsou rovnoběžné a oba jsou nenulové, je kolmý na tyto vektory. Vyjádřeme nejprve skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{w}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}\boldsymbol{w} &= u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = \\ &= u_x(u_y v_z - u_z v_y) + u_y(u_z v_x - u_x v_z) + u_z(u_x v_y - u_y v_x) = 0, \end{aligned}$$

což znamená, že vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{w}$ jsou na sebe kolmé. Podobně snadno dokážeme, že jsou na sebe kolmé vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$.

Vektorový součin můžeme také vyjádřit vztahem:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (uv \sin \varphi)\boldsymbol{n}, \tag{3.3.30}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor kolmý na vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, jehož orientace je dána výše zmíněným pravidlem pravé ruky. Rovnice [3.3.30] je alternativní definicí vektorového součinu pro pravotočivý souřadný systém.

Příklad:

Nechť jsou dány dva vektory $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Určete $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Řešení:

Použijeme vektorový součin ve tvaru determinantu:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Příklad:

Najděte jednotkový vektor, který je kolmý na rovinu, ve které se nacházejí vektory $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

Řešení:

Použijme vztah [3.3.18], ve kterém vektor u nahradíme vektorovým součinem $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{\mid \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \mid} = \frac{\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2}} = \quad = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{35}} - \frac{5\boldsymbol{j}}{\sqrt{35}} - \frac{3\boldsymbol{k}}{\sqrt{35}}.$$

Literatura

[1] Bartsch, H-J. (1996). *Matematické vzorce.* Praha: Mladá fronta. [2] Fowles, G.R. & Cassiday, G.L. (2005). *Analytical Mechanics.* Belmont: Thomson Brooks/Cole.