METODIKA ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ FYZIKÁLNÍHO MĚŘENÍ

Měření a fyzika

- Fyzika je experimentální věda
- vědecká metoda pro hledání „pravidel her“ v přírodě (Štoll, 2010)
  - pozorování, usuzování (logická indukce a dedukce) a experiment
- vědecká metoda poskytuje vztahy mezi jevy, takto vzniká **fyzikální teorie**, případně **fyzikální zákony a principy (symetrie, variační)**
- kritérium pravdivosti teorie je souhlas všech jejich předpovědí s výsledky experimentů a pozorování

- fyzikální zákony mají často podobu matematických vztahů mezi **fyzikálními veličinami**
- **fyzikální veličina** je míra výskytu vlastnosti objektů či jevů, která má
  - kvalitativní stránku (qualitas = jakost), tzn. lze ji jednoznačně definovat, tedy odlišit jednu od druhé
  - kvantitativní stránku (quantitas = množství), tzn. lze ji vyjádřit hodnotou
- skutečnost, že veličina X (X je značka veličiny) má hodnotu zapisujeme takto: $X = \{X\}\,[X]$, kde
  - $\{X\}$ je číselná hodnota veličiny, $[X]$ je jednotka veličiny

Soustava jednotek SI (https://physics.nist.gov/cuu/Units/units.html)

Quantity	Name of unit	Symbol	
	SI base units		
length	meter	m	
mass	kilogram	kg	
time	second	s	
electric current	ampere	A	
thermodynamic temperature	kelvin	K	
amount of substance	mole	mol	
luminous intensity	candela	cd	
	SI derived units		**Equivalent units**
area	square meter	m^2	
volume	cubic meter	m^3	
frequency	hertz	Hz	s^{-1}
mass density (density)	kilogram per cubic meter	kg/m^3	
speed, velocity	meter per second	m/s	
angular velocity	radian per second	rad/s	
acceleration	meter per second squared	m/s^2	
angular acceleration	radian per second squared	rad/s^2	
force	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressure (mechanical stress)	pascal	Pa	N/m^2
kinematic viscosity	square meter per second	m^2/s	
dynamic viscosity	newton-second per square meter	$N \cdot s/m^2$	
work, energy, quantity of heat	joule	J	$N \cdot m$
power	watt	W	J/s
quantity of electricity	coulomb	C	$A \cdot s$
potential difference, electromotive force	volt	V	J/C, W/A
electric field strength	volt per meter	V/m	N/C
electric resistance	ohm	Ω	V/A
capacitance	farad	F	$A \cdot s/V$
magnetic flux	weber	Wb	$V \cdot s$
inductance	henry	H	$V \cdot s/A$
magnetic flux density	tesla	T	Wb/m^2
magnetic field strength	ampere per meter	A/m	
magnetomotive force	ampere	A	
luminous flux	lumen	lm	$cd \cdot sr$
luminance	candela per square meter	cd/m^2	
illuminance	lux	lx	lm/m^2
wave number	1 per meter	m^{-1}	
entropy	joule per kelvin	J/K	
specific heat capacity	joule per kilogram-kelvin	$J/kg \cdot K$	
thermal conductivity	watt per meter-kelvin	$W/m \cdot K$	

Quantity	Name of unit	Symbol	Equivalent units
radiant intensity	watt per steradian	W/sr	
activity (of a radioactive source)	becquerel	Bq	s^{-1}
radiation dose	gray	Gy	J/kg
radiation dose equivalent	sievert	Sv	J/kg
	SI supplementary units		
plane angle	radian	rad	
solid angle	steradian	sr	

- **fyzikální měření** je činnost, jejíž výsledkem je hodnota fyzikální veličiny (Dvorský & Foukal, 2007)
- etapy procesu měření fyzikálních veličin:
  - **projekt měření**

    a) formulace problému: jednoznačnost, úplnost, obsahuje požadavky na kvalitu měření.

    b) Všeobecný rozbor: rešerše odborné literatury apod.

c) teoretická odvození a rozbory: odvození potřebných vztahů, uvedení podmínek, za nichž platí

pozn. Měřená veličina může záviset na různých souborech dílčích veličin, výběr vztahu závisí na mnoha faktorech (obtížnost měření dílčích veličin, dosažitelná přesnost měření, přístrojové vybavení, finance)

d) rozbor a optimalizace nejistot

e) vypracování metodiky měření

- **Realizace experimentu**

a) Fyzická příprava experimentu: kalibrace měřidel, sestavení aparatury a ověření její funkčnosti, zajištění stabilních vnějších podmínek např. termostatem, zápis evidenčních případně výrobních čísel měřidel apod.

b) Vlastní měření: výběr vhodných rozsahů, sledování relevantních podmínek, zápis hodnot měřené veličiny

c) Matematické zpracování výsledků měření

- **Soubor výsledků a zhodnocení experimentu, případně komentáře**

Protokol z měření

- Záhlaví (viz lms.vsb.cz)
- Anotace – stručná charakteristika práce v rozsahu několika řádků, zpracovává se nakonec
- Seznam symbolů a označení - uvedení jejich významu
- Cíle měření
- Měřicí prostředky
- Kompendium teorie
- Pokyny k vlastnímu měření
- Matematické zpracování výsledků měření

- tabulky naměřených hodnot
- výpočet měřené veličiny a příslušných nejistot

- Soubor výsledků a zhodnocení experimentu
  - absolutní a relativní nejistotu výsledku měření všech veličin!!
  - jednotky
  - relevantní podmínky a skutečnosti mající na výsledek měření odůvodněně vliv
  - zdroje informací k výpočtu nejistot (dokumentace výrobce měřidla, statistika – uvést četnost souboru hodnot, odhad)
  - použít dohodnutý zápis výsledku měření ve tvaru

hodnota ± nejistota

- určit v procentech, je-li to možné, odchylku naměřené hodnoty od tabulkové (viz tabulky fyzikálních veličin, např. Brož, J., Roskovec, V., & Valouch, M. Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha, 1980., https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html),
- použité korekce, interpolace,
- zhodnocení, zda byly splněny požadavky zadání experimentu.

- Referenční seznam
  - např. odkaz na adresu webové stránky s návody k laboratorním úlohám
  - např. Dvorský, R., Foukal, J. (2007) Fyzikální měření, VŠB-TU Ostrava.
- Přílohy
  - Grafy

Metrologické pojmy (Dvorský & Foukal, 2007)

- Měření je empirická činnost, jejímž výsledkem je určení hodnoty nějaké veličiny
- Metrologie je vědní a technický obor zabývající se měřením. Zahrnuje veškeré poznatky týkající se měření, jejich praktického provádění a hodnocení jejich výsledků. V užším slova smyslu zajišťuje jednotnost, správnost a přesnost měření.

- Měřicí prostředek je každé zařízení používané k měření. Jsou jimi
  - měřidla: technický prostředek nebo zařízení určené k provádění měření; rozlišujeme

(i) míry – měřidla, které při použití reprodukují trvale jednu nebo několik určených hodnot dané veličiny, při měření se žádná součást měřidel nepohybuje (odměrný válec, pásový metr)

(ii) měřicí přístroje – měřidla, u nichž se alespoň jedna součást během měření funkčně pohybuje nebo mění svůj stav

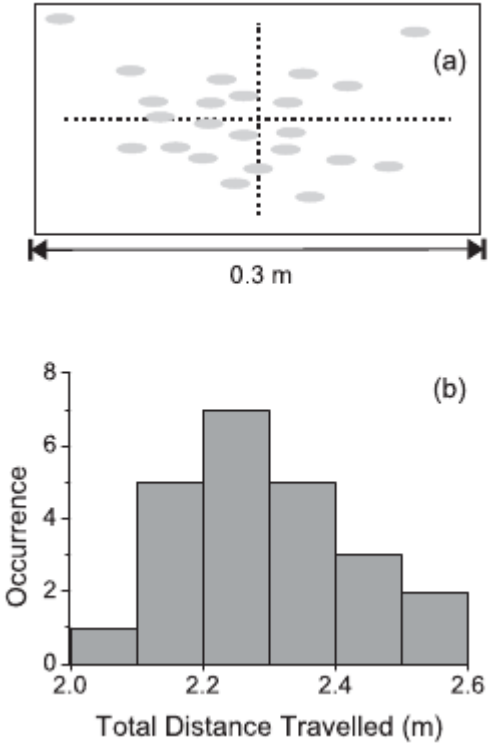
  - měřicí zařízení – doplňují měřidla, např. vypínače, přívodní vodiče, svorky apod.
- Kalibrace je soubor úkonů, které poskytují za určitých podmínek závislost mezi hodnotami indikovanými měřidlem a mezi známými hodnotami měřené veličiny reprezentované etalonem patřičného řádu
- Etalon je měřidlo určené k definování, uchovávání a reprodukci určité jednotky fyzikální veličiny

CHYBY A NEJISTOTY MĚŘENÍ

- Testem vědění je experiment. Experiment je výhradním soudcem vědecké pravdy (Feynmann, Leighton & Sands, 2005)
- rozbor chyb měření je nutný pro odpovědi na tyto otázky (Hughes & Hase, 2010):
  - Souhlasí výsledek experimentu s teorií?
  - Jsou výsledky experimentu reprodukovatelné?
  - Byl objeven nový jev?

Proč je korektním výsledkem měření interval?

- Experiment: dělo s pružinou vystřeluje ložiskové kuličky šikmo vzhůru se stejným elevačním úhlem a měříme vzdálenost místa dopadu kuličky od děla (Hughes & Hase, 2010)



- naměřené hodnoty jsou z určitého intervalu, přestože fyzikální zákon popisující pohyb kuličky je deterministický
- metody statistiky umožňují na základě naměřených dat stanovit interval, ve kterém se s určitou pravděpodobností má nacházet pravá hodnota měřené veličiny a konvenčně pravou hodnotu

- předpokládejme existenci **pravé (skutečné) hodnoty měřené veličiny**, tato hodnota nemůže být reálným způsobem poznána
- **konvenčně pravá hodnota** je reálně zjistitelná (měřením) a je odhadem pravé hodnoty měřené veličiny: např. při opakování měření za stejných podmínek je jí aritmetický průměr z naměřených hodnot
- **absolutní chyba měření** δx je rozdíl mezi konvenčně pravou hodnotou a pravou hodnotou měřené veličiny

$$\delta x = x_{\mathrm{KON}} - x_{\mathrm{PR}}$$

- **absolutní nejistota měření** vymezuje v okolí konvenčně pravé hodnoty interval, ve kterém se s určitou pravděpodobností nachází pravá hodnota měřené veličiny

- **relativní nejistota měření** je

$$u_{rx} = \frac{u_x}{x_{KON}}$$

Fyzikální konstanty

- hodnoty fyzikálních konstant jsou často získány měřením a tedy s jistou chybou
- experimenty národních laboratořích:
  - NIST (National Institute of Standards and Technology) v USA

    http://www.nist.gov/index.html
  - NPL (National Physical Laboratory) ve Velké Británii

    http://www.npl.co.uk

- například Avogadrova konstanta (hodnota a absolutní nejistota)

$$N_A = (6{,}022\ 141\ 79 \pm 0.000\ 000\ 30)\cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$$

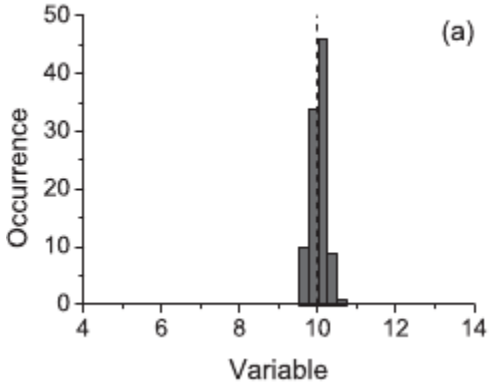
$$N_A = 6{,}022\ 141\ 79\ (30)\ \mathrm{mol}^{-1}$$

- některé konstanty nebyly získány měřením, ale byly definovány, např.
  - rychlost světla ve vakuu c = 299 792 458 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
- aktualizace hodnot fyzikálních konstant: International Council for Science: Committe on Data for Science and Technology (CODATA), aktuální data viz http://www.physics.nist.gov/cuu/Constants/

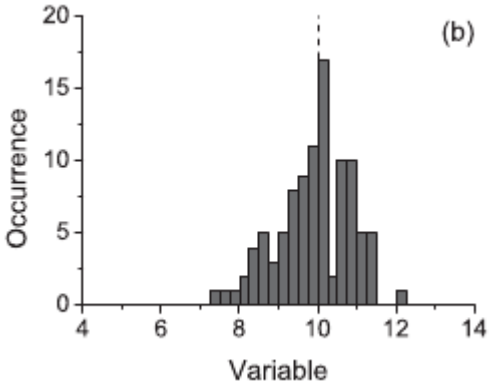
Základní pojmy (Hughes & Hase, 2010)

- rozlišujeme
  - **přesnost (precision)**, tzn. měření je přesné, je-li rozptyl hodnot relativně malý vzhledem ke střední hodnotě
  - **správnost (accuracy)**, tzn. získaná hodnota je blízká obecně přijímané hodnotě, má smysl ji hodnotit pouze pokud porovnáváme výsledek měření se známou hodnotou (např. rychlostí světla)

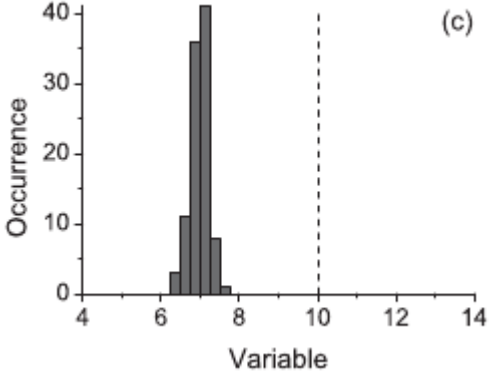
a) přesné a správné



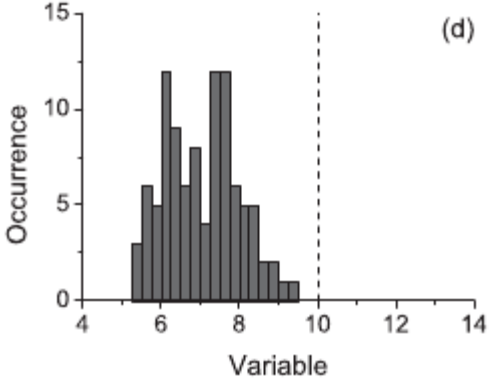
b) nepřesné a správné



c) přesné a nesprávné



d) nepřesné a nesprávné



Klasifikace chyb (Dvorský & Foukal, 2007; Hughes & Hase, 2010)

- **náhodné chyby**
  - ovlivňují přesnost měření
  - při opakování měření za stejných podmínek se v naměřených datech projevuje variabilita a hodnoty jsou náhodně rozptýleny v určitém intervalu
  - mírou polohy (úrovně, velikosti) měřené veličiny, kterou zde chápeme jako **statistický znak**, je **aritmetický průměr** a současně se jedná o nejlepší odhad její naměřené hodnoty
  - mírou variability měřené veličiny je **směrodatná odchylka aritmetického průměru**

- Jaké jsou příčiny vzniku náhodné chyby?
  - fundamentální fluktuace určené fyzikálními zákony (např. difrakce)
  - technické fluktuace - lze je v principu snížit
- např. dělo s pružinou (viz snímek 16): pouze technické fluktuace (měnící se elevační úhel při zpětném rázu, rozdílná deformační energie pružiny), technickými úpravami lze minimalizovat vliv této příčiny náhodné chyby
- pokud není přijatelné velikost fundamentálních fluktuací, je nutné vyměnit měřící aparaturu nebo zvolit jinou metodu měření

- při měřeni velmi malých napětí se projevuje tepelný šum (Johnson-Nyquistův šum), který je důsledkem stochastického charakteru pohybu elektronů
- fluktuace intenzity záření jako důsledek fotonového šumu (shot noise)

- **systematické chyby**
  - ovlivňují správnost měření
  - mají za následek odchylku naměřené hodnoty od pravé hodnoty měřené veličiny, neexistuje statistická metoda pro její odhad, pouze lze navrhnout jiná měření, která mohou poskytnout informace o původu systematických chyb
  - např. dělo s pružinou (viz snímek 16): zdrojem systematické chyby je měření vzdálenosti od konce děla

- **Hrubé chyby měření**
  - vznikají omylem při čtení nebo zápisu naměřené hodnoty (například místo 5,24 zapíšeme 5,42), poruchou měřidla, nerespektováním podmínek, za kterých má býti měření prováděno apod.
  - u analogických měřidel často dochází k nesprávnému čtení rozsahu (dvě stupnice pod sebou, např. 0-10, 0-3), u generátoru kmitů kombinace analogového číselníku a voliče multiplikace (např. 1-10 kHz)
  - obtížné odhalit, pokud nemáme odhad správného výsledku měření

- zničení meteorologické družice na Marsu (1999): software dodaný společností Lockheed Martin počítal celkový impuls dodaný tryskami sondy v imperiálních jednotkách (lb·s), zatímco software pro výpočet trajektorie dodaný NASA očekával tato data v jednotkách SI (N·s)
- Boeing 767-200, let číslo 143 společnosti Air Canada z Ottawy do Edmontonu: jedna z příčin nedostatku paliva ve výšce 12,5 km byl chybný přepočet hmotnosti paliva kapitánem (imperiální jednotky a SI)

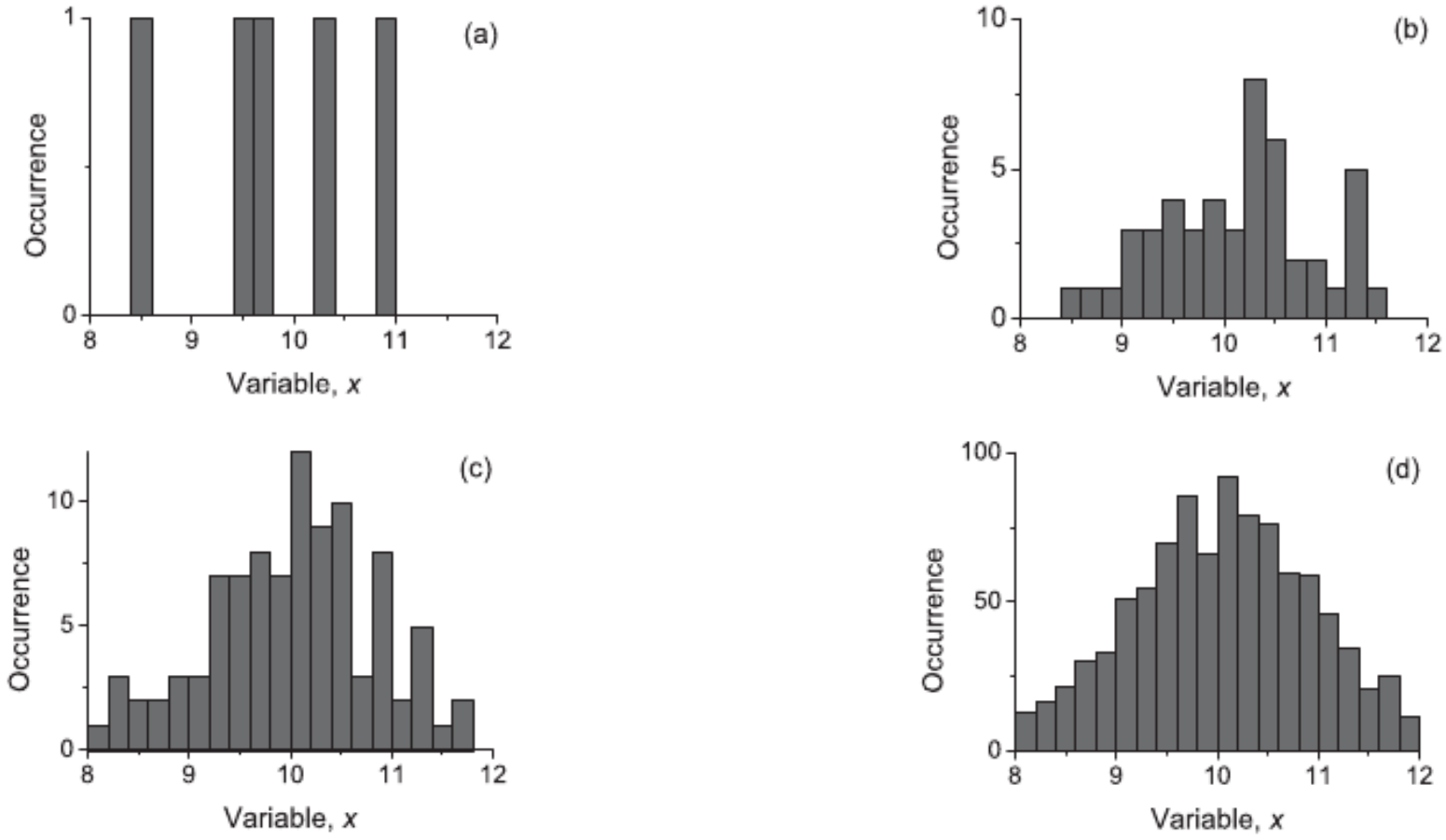
DOBRÝ EXPERIMENTÁTOR SE DOPUŠTÍ HRUBÝCH CHYB ZCELA VYJÍMEČNĚ, POKUD VŮBEC

Nejistoty klasifikujeme podle metody stanovení její číselné hodnoty (Taylor & Kuyatt, 1994; JCGM, 2008)

- **nejistota typu A** je stanovena statistickou analýzou výsledků za stejných podmínek opakovaných měření
- **nejistota typu B** není stanovena statistickou analýzou výsledků za stejných podmínek opakovaných měření

– Statistické zpracování naměřených hodnot (Hughes & Hase, 2010)

- nechť je měření opakováno *N*-krát za stejných podmínek a v datech se projevuje variabilita, tzn. existuje náhodná chyba
- v následujících histogramech jsou uvedena data pro počet měření 5, 50, 100, 1000
- s větším počtem měření se zobrazuje charakteristický tvar rozdělení pravděpodobnosti a výpočet charakteristiky úrovně a variability sledované veličiny poskytuje věrohodnější výsledky


(a)
Occurrence
Variable, x
(b)
Occurrence
Variable, x
(c)
Occurrence
Variable, x
(d)
Occurrence
Variable, x

- získané hodnoty $x_1, x_2 ... x_N$ odpovídají náhodnému výběru N hodnot z teoreticky nekonečného základního statistického souboru všech možných hodnot
- hodnoty x_i reprezentativního náhodného výběru (nese dostatečnou informaci o základním statistickém souboru) musí být:
  - stochastické (náhodné - nelze je předpovědět)
  - nekorelované
- příčiny variability v datech
  - makroskopické fyzikální vlivy, které působí pod úrovní subjektivní a přístrojové shody podmínek měření
  - fundamentální statistická povaha měřených veličin

- odhad nejpravděpodobnější hodnoty měřené veličiny je její konvenčně pravá hodnota
- naprostá většina výsledků měření spojitých fyzikálních veličin vykazuje **normální Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti** s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

která je obálkovou křivkou histogramu

- funkce $p(x)$ je **hustota pravděpodobnosti** výsledku měření o velikosti x
- μ střední hodnota (charakteristika úrovně veličiny), jedná se o nejpravděpodobnější hodnotu
- σ **směrodatná odchylka**, která je mírou variability dat, pozn. σ^2 je **rozptyl (disperze)**

Základní a výběrový soubor (Hughes & Hase, 2010)

- základní soubor představuje množinu všech možných výsledků měření ξ_i ($N \rightarrow \infty$) za daných podmínek
- výběrový soubor obsahuje množinu všch měřením získaných hodnot veličiny

- funkce *p*(*x*) je normovaná, tzn.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = 1$$

- střední hodnota je:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x$$

- rozptyl je:

$$\sigma^2 = D(X) = E([X - E(X)]^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

Střední hodnota jako nejpravděpodobnější hodnota (Dvorský & Foukal, 2007)

- mějme výběrový soubor *N* výsledků měření, které jsou hodnotami reprezentativního náhodného výběru
- konvenčně pravou hodnotou je v tomto případě nejpravděpodobnější hodnota: $x_{\mathrm{KON}} = \mu$
- pravděpodobnost získání *N*-tice hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_N$ je

$$p(x_1, x_{2,\ldots}, x_N) = p(x_1)\, p(x_2), \ldots, p(x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$

- pro normální Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti platí:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- *p* je funkcí jediného parametru, střední hodnoty
- hledáme extrém funkce *p*

$$\frac{\partial}{\partial\mu} p(x_1, x_{2,\ldots}, x_N) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 0$$

- stačí tedy, aby byla nulová hodnota derivace sumy:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)=\sum_{i=1}^{N}x_i-N\mu=0$$

- konvenčně pravá hodnota je v tomto případě výběrovým průměrem (aritmetický průměr):

$$x_{\mathrm{KON}}=\mu=\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

- nejistota výsledku měření (*N* hodnot nekorelovaných a stochastických) nehodnotí přesnost jednoho konkrétního měření, ale přesnost stanovení konvenčně pravé hodnoty, zde ve formě výběrového průměru
- stanovuje se pomocí **směrodatné odchylky výběrového průměru** $\bar{\sigma}_x$ od pravé hodnoty x_P

$$\bar{\sigma}_x = \left| x_\mathrm{P} - x_\mathrm{KON} \right| = \left| x_\mathrm{P} - \bar{x} \right|$$

- vyjádřeme rozptyl:

$$\bar{\sigma}_x^{\,2} = \left(x_\mathrm{P} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(x_\mathrm{P} - x_i \right) \right)^2$$

- vynásobme rovnici *N* a použijme vzorec pro mocninu dvojčlenu:

$$N\,\bar{\sigma}_x^{\,2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{\mathrm{P}}-x_i\right)^2+\underbrace{\frac{2}{N}\sum_{i\neq j,\,i,\,j=1}^{N}\left(x_{\mathrm{P}}-x_i\right)\left(x_{\mathrm{P}}-x_j\right)}_{0}$$

- zaveďme odchylku *i*-té naměřené hodnoty od výběrového průměru $\Delta x_i=\bar{x}-x_i$ a dosaďme ji do předchozího vztahu

$$N\,\bar{\sigma}_x^{\,2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\underbrace{\left(x_{\mathrm{P}}-\bar{x}\right)}_{\bar{\sigma}_x}+\Delta x_i\right)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{\sigma}_x+\Delta x_i\right)^2$$

- opět upravme pomocí vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu:

$$N\,\bar{\sigma}_x^{\,2}=\frac{1}{N}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\bar{\sigma}_x^{\,2}}_{N\,\bar{\sigma}_x^{\,2}}+2\,\bar{\sigma}_x\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i}_{0}+\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i^{\,2}\right)$$

$$N\,\bar{\sigma}_x^{\,2}=\bar{\sigma}_x^{\,2}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i^{\,2}$$

- **směrodatná odchylka střední hodnoty** je proto:

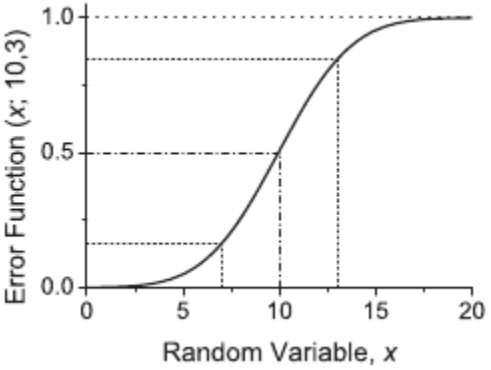
$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}$$

Distribuční funkce normálního rozdělení (Hughes & Hase, 2010)

- funkce *F*(*x*) je distribuční funkce normálního rozdělení pravděpodobnosti

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1} p(x)\,\mathrm{d}x=\Pr(x\leq x_1)$$



- pravděpodobnost, že veličina *x* bude mít hodnotu v intervalu od x_1 do x_2 je

$$\Pr\left(x_1 \le x \le x_2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{\frac{-\left(x-\bar{x}\right)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}\,x$$

- *Příklad 1* V krabici jsou rezistory, na kterých je uvedena hodnota odporu 100 Ω. Víme, že měrodatná odchylka odporu má hodnotu 2 Ω. S jakou pravděpodobností bude vybrán rezistor s hodnotou 95 Ω nebo menší? S jakou pravděpodobností bude vytažen rezistor s odporem v intervalu 99-101 Ω?

Řešení:

$$\bar{x}=100\,\Omega\,;\sigma=2\,\Omega\,;\Pr\left(R\leq 95\,\Omega\right)=?\,;\Pr\left(99\,\Omega\leq R\leq 101\,\Omega\right)=?$$

$$\Pr\left(R\leq 95\,\Omega\right)=\int_{-\infty}^{95} p\left(x\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{95}\mathrm{e}^{\frac{-\left(x-\bar{x}\right)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x=0{,}0062$$

$$\Pr\left(99\,\Omega\leq R\leq 101\,\Omega\right)=\int_{99}^{101} p\left(x\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{99}^{101}\mathrm{e}^{\frac{-\left(x-\bar{x}\right)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x=0{,}38$$

Interval spolehlivosti (Hughes & Hase, 2010)

- je charakterizován konfidenční hladinou
  - například 95 %: 95 intervalů ze sta obsahuje parametr $\bar{x}$
- nechť je interval spolehlivosti vymezen pomocí směrodatné odchylky σ (normální rozdělení)

$$\mathrm{Pr} = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \mathrm{e}^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = 0{,}683,$$

což jsou přibližně 2/3 obsahu plochy pod Gaussovou křivkou

Pravidla pro zaokrouhlování nejistot a naměřených hodnot (NIST, 2019)

- nejistoty (rozšířené) zaokrouhlujeme nejvýše na dvě platné cifry (pro zjednodušení budeme ve fyzikálním měření zaokrouhlovat nejistoty právě na dvě platné cifry)
- určení prvních dvou platných cifer: číslo čteme zleva a první nenulová cifra je první platnou cifrou, následující cifra je druhou platnou cifrou a její umístění definuje řád, na který se zaokrouhlí nejistota a naměřená hodnota
- je-li za poslední ponechanou cifrou cifra větší než 5, zaokrouhlujeme nejistotu nahoru (2,68 → 2,7; 2 568 → 2 600)

- je-li za poslední ponechanou cifrou cifra menší než 5, zaokrouhlujeme nejistotu dolů (2,63 → 2,6; 2529 → 2500)
- je-li za poslední ponechanou cifrou pouze cifra 5, případně ostatní cifry za touto pětkou jsou nuly a poslední ponechaná cifra je sudá, zaokrouhlujeme nejistotu dolů (3,45 → 3,4; 3,45000 → 3,4; 8650 → 8600)
- je-li za poslední ponechanou cifrou pouze cifra 5, případně ostatní cifry za touto pětkou jsou nuly a poslední ponechaná cifra je lichá, zaokrouhlujeme nejistotu nahoru (3,35 → 3,4; 3,350000 → 3,4 8750 → 8800)

- je-li za poslední ponechanou cifrou cifra 5 a ostatní cifry za touto pětkou nejsou pouze nuly, zaokrouhlujeme nejistotu nahoru (3,35012 → 3,4; 8659 → 8700)

Příklady správně zaokrouhlených nejistot a naměřených hodnot (bez jednotek)

naměřená hodnota	podle nejistoty zaokrouhlená naměřená hodnota	nejistota	zaokrouhlená nejistota
1,3578	1,36	0,5775	0,58
2000,714434	2000,714	0,084024	0,084
4,3415	4,3	2,0478	2,1
285,41	290	102,98	110
285,41	285	33,4875	34
9,9994558	9,99946	0,000296808	0.00030

- **Výpočet nejistot při přímém měření** (Taylor & Kuyatt, 1994; JCGM, 2008)

- při přímém měření získáváme hodnoty měřené veličiny přímo bez měření veličin, které jsou funkčně vázány s měřenou veličinou

Stanovení nejistoty typu B

- vycházíme z kvalifikovaného odhadu na základě všech dostupných zdrojů „nestatistických“ informací o vlivech působících v průběhu celého měření:
  - zkušenosti z dosud provedených vlastních měření
  - obecné znalosti chování a vlastností použitých materiálů a měřících prostředků

- publikované výsledky obdobných měření
- specifikace měřících zařízení a podmínek jejich použití poskytnuté výrobcem
- údaje v kalibračních listech nebo jiných certifikátech
- nejistoty referenčních údajů uváděné např. v metrologických příručkách

- při stanovení velikosti nejistoty typu B se omezíme na tyto případy:
  - hodnota nejistoty převzata z technické dokumentace měřícího přístroje (např. digitální měřidlo)

Příklad: V dokumentaci multimetru byl uveden předpis pro přesnost (accuracy) měření odporu na rozsahu 20 MΩ ve tvaru: 0,1% z odečtené hodnoty ± 2 digits

Vyčíslete nejistotu typu B měření odporu, jestliže se na displeji zobrazila hodnota: 14,58 (předpokládejme rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti).

Řešení:

$$u_{\mathrm{B},R} = \frac{\frac{0{,}1}{100} \cdot 14{,}58 + 2 \cdot 0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}019965 = 0{,}020\ \mathrm{M\Omega}$$

$$R = \left(14{,}580 \pm 0{,}020\right)\ \mathrm{M\Omega}$$

$$u_{\mathrm{rB},R} = \frac{0{,}020}{14{,}58} = 0{,}0013755 = 0{,}0014 = 0{,}14\,\%$$

- stanovení nejistoty typu B z třídy přesnosti analogového měřícího přístroje

Příklad: třída přesnosti voltmetru p = 0,2; rozsah U_M = 2 V;

$u_{B,U}$ = ?

$$u_{B,U} = \frac{pU_M}{100\sqrt{3}} = 0{,}0023\ \mathrm{V}$$

- jestliže je výsledek měření převzat z literatury, ze stejného zdroje musí být převzata nejistota, případně stanovena kvalifikovaným odhadem při zohlednění všech známých okolností měření
- známe-li na základě teorie nebo zkušeností konkrétní rozdělení pravděpodobnosti měřené veličiny X, užijeme jako odhad nejistoty typu B směrodatnou odchylku stanovenou z disperze uvedeného rozdělení
- je-li hodnota měřené veličiny převzata z dokumentace měřícího přístroje, kalibračního certifikátu, manuálu apod. a je přitom nejistota uvedena jako násobek směrodatné odchylky, vydělíme uváděnou hodnotu tímto násobkem a získáme tak nejistotu typu B

Příklad: Podle kalibračního listu je hmotnost etalonu 1000,000325 g a nejistota stanovená jako trojnásobek směrodatné odchylky činí 240 µg. Určete nejistotu typu B.

Řešení: $u_B = (240\ \mu g)/3 = 80\ \mu g$

- je-li uveden interval spolehlivosti na hladině významnosti například 90, 95 nebo 95 % a lze předpokládat jeho stanovení na základě normálního rozdělení, pak se uvedená hodnota nejistoty vydělí příslušným koeficientem pokrytí normálního rozdělení (1,64; 1,96; 2,58)

Table G.1 — Value of the coverage factor k_p that produces an interval having level of confidence p assuming a normal distribution

Level of confidence p (percent)	Coverage factor k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Příklad: Podle kalibračního listu je odpor etalonu

$R = 10{,}000742\,\Omega \pm 129\,\mu\Omega$ a stanovená nejistota 129 $\mu\Omega$ definuje interval na hladině významnosti 99 %. Určete nejistotu typu B.

Řešení: $u_{\mathrm{B},R} = (129\ \mu\Omega)/2{,}58 = 50\ \mu\Omega$

- jestli je a) padesátiprocentní pravděpodobnost, že se bude hodnota měřené veličiny X_i nacházet v intervalu od a_- do a_+ a b) rozdělení pravděpodobnosti možných hodnot této veličiny je alespoň přibližně normální, pak je nejlepším odhadem hodnoty této veličiny střed uvedeného intervalu, tedy $(a_+ + a_-)/2$ a nejistota typu B

$$u_{\mathrm{B},X} = 1{,}48\,a = 1{,}48\,(a_+ - a_-)/2,$$

kde a je pološířka uvedeného intervalu

- jestli je a) 67% pravděpodobnost (2/3), že se bude hodnota měřené veličiny X_i nacházet v intervalu od a_- do a_+ a b) rozdělení pravděpodobnosti možných hodnot této veličiny je alespoň přibližně normální, pak je nejlepším odhadem hodnoty této veličiny střed uvedeného intervalu, tedy $(a_+ + a_-)/2$ a nejistota typu B

$$u_{\mathrm{B},X} = a = (a_+ - a_-)/2,$$

kde a je pološířka uvedeného intervalu

- máme-li k dispozici pouze odhad dolní a_- a horní a_+ meze možných hodnot, to znamená, že naměřené hodnoty jsou se 100% pravděpodobností uvnitř intervalu od a_- do a_+, a hodnoty měřené veličiny mohou ležet kdekoli v tomto intervalu se stejnou pravděpodobností, můžeme předpokládat rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti uvnitř tohoto intervalu a pak je nejlepším odhadem hodnoty této veličiny střed uvedeného intervalu, tedy $(a_+ + a_-)/2$ a nejistota typu B

$$u_{\mathrm{B},X} = a/\sqrt{3} = \frac{a_+ - a_-}{2\sqrt{3}},$$

kde a je pološířka uvedeného intervalu

- máme-li k dispozici pouze odhad dolní a_- a horní a_+ meze možných hodnot, přičemž nejlepší odhad hodnoty měřené veličiny x_i neleží uprostřed intervalu od a_- do a_+ ($a_- = x_i - b_-$, $a_+ = x_i + b_+$), pak veličina X nemůže mít rovnoměrné rozdělení a pokud současně nemáme dostatek informací o typu rozdělení pravděpodobnosti, počítáme nejistotu typu B takto:

$$u_{\mathrm{B},X} = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{12}},$$

- podle principu maximální entropie hustota pravděpodobnosti v případě nesymetrického rozdělení je $p(X_i) = A\,\mathrm{e}^{[-\lambda(X_i - x_i)]}$,

  kde $A = \dfrac{1}{b_-\,\mathrm{e}^{\lambda b_-} + b_+\,\mathrm{e}^{-\lambda b_+}}$ a $\lambda = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda(b_- + b_+)} - 1}{b_-\,\mathrm{e}^{\lambda(b_- + b_+)} + b_+}$

  pro nejistotu typu B (směrodatnou odchylku tohoto rozdělení) pak lze odvodit:

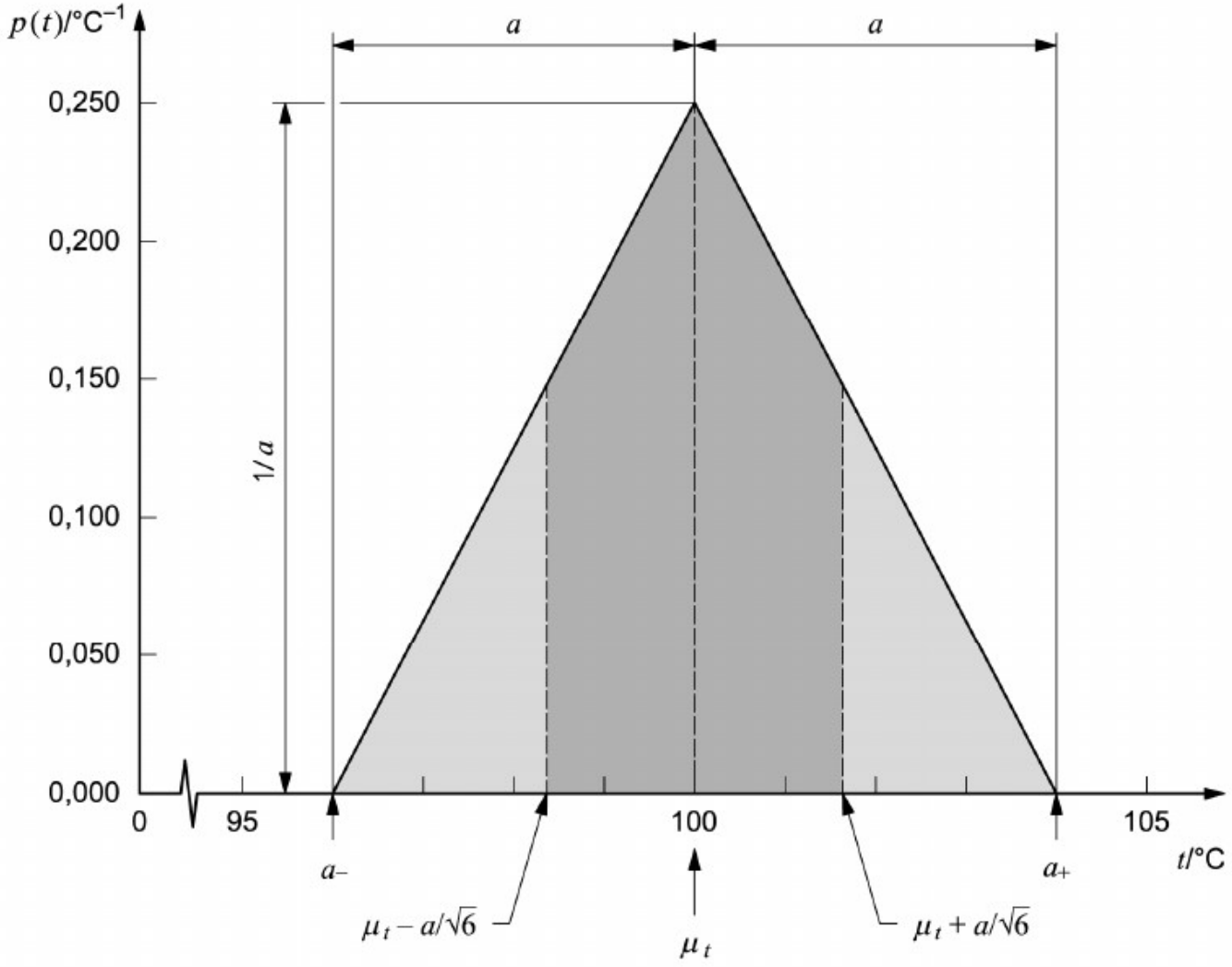
$$u_{\mathrm{B},X} = \sqrt{b_+ b_- - \frac{(b_+ - b_-)}{\lambda}},\ b_+ > b_-\ (\lambda > 0),\ b_+ < b_-\ (\lambda > 0)$$

- máme-li k dispozici pouze odhad dolní a_- a horní a_+ meze možných hodnot, to znamená, že naměřené hodnoty jsou se 100% pravděpodobností uvnitř intervalu od a_- do a_+, a hodnoty měřené veličiny mohou ležet kdekoli v tomto intervalu se stejnou pravděpodobností, je realističtější než použití rovnoměrného rozdělení očekávat, že hodnoty poblíž mezí intervalu od a_- do a_+ jsou méně pravděpodobné než hodnoty blízké středu tohoto intervalu; pak použijeme lichoběžníkové rozdělení pravděpodobnosti se šířkou základny $a_+ - a_- = 2a$ a horní strany rovnoběžné se základnou šířky $2a\beta$, kde $0 \leq \beta \leq 1$; pak je nejlepším odhadem hodnoty této veličiny střed uvedeného intervalu, tedy $(a_+ + a_-)/2$ a nejistota typu B je

$$u_{\mathrm{B},X} = \frac{a(1+\beta^2)}{\sqrt{6}} = \frac{(1+\beta^2)(a_+ - a_-)}{2\sqrt{6}},$$

kde a je pološířka uvedeného intervalu

- je-li $\beta \rightarrow 1$, dostaneme rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti
- je-li $\beta = 0$, dostaneme trojúhelníkové rozdělení pravděpodobnosti (viz obr.)


p(t)/°C⁻¹
0,250
0,200
0,150
0,100
0,050
0,000
a
a
1/a
0
95
100
105
t/°C
a–
a+
μt – a/√6
μt
μt + a/√6

- Stanovení nejistoty typu A (Taylor & Kuyatt, 1994; JCGM, 2008)

- měření veličiny *x* se opakuje *N*-krát za stejných podmínek
- jednotlivá pozorování x_i se liší v hodnotách z důvodu náhodného kolísání ovlivňujících veličin nebo z důvodu náhodných vlivů
- **výběrová směrodatná odchylka střední hodnoty je standardní nejistotou typu A** měření veličiny *x*:

$$u_{\mathrm{A},x} = \bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{x} - x_i\right)^2}$$

- počet hodnot *N* musí být dostatečný aby $\bar{x}$ poskytl spolehlivý odhad očekávané hodnoty veličiny *x* a $\bar{\sigma}_x$ spolehlivý odhad směrodatné odchylky aritmetického průměru
- existuje několik mnohem složitějších situací, které mohou být zpracovány statistickými metodami, např. použití postupů kalibrace, často založených na metodě nejmenších čtverců, pro hodnocení nejistot vznikajících jak z krátkodobých, tak z dlouhodobých náhodných kolísání
  - například se uplatňuje analýza rozptylu

- jestliže neprovádíme opakovaná měření za stejných podmínek, nelze stanovit nejistotu typu A a standardní nejistota přímého měření veličiny *X* je

$$u_X = u_{\mathrm{B},X}$$

- jestliže provádíme opakovaná měření za stejných podmínek, stanovíme současně nejistotu typu A a B a standardní nejistotu přímého měření veličiny *X* je

$$u_X = \sqrt{u_{\mathrm{B},X}^2 + u_{\mathrm{A},X}^2}$$

- Stanovení rozšířené standardní nejistoty (Taylor & Kuyatt, 1994; JCGM, 2008)

- rozšířená standardní nejistota měření veličiny *y* je

$$U_y = k u_y ,$$

kde *k* je koeficient rozšíření; je-li *k* = 1, pak pravá hodnota leží v intervalu stanoveném nejistotu s pravděpodobností cca 68 % (za předpokladu Gaussova rozdělení pravděpodobnosti), 68 % je tzv. konfidenční úroveň

- pro konkrétní konfidenční úroveň *p je* nutná podrobná znalost rozdělení pravděpodobnosti

- pokud rozdělení pravděpodobnosti charakterizující y a u_y je normální a nejistota u_y je zanedbatelně malá (dostatečně velký efektivní počet stupňů volnosti ν_{eff} nejistoty u_y, např. pro p = 95 % hodnota > 10), používáme:

konfidenční úroveň p (%) Level of confidence p (percent)	koeficient rozšíření k_p Covarage factor k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

- pokud tyto podmínky nejsou splněny, použijeme metodu vycházející ze studentova (t-rozdělení) pravděpodobnosti

- y a u_y mají přibližně normální rozdělení, jsou-li splněny podmínky platnosti centrální limitní věty, což zpravidla nastává, pokud
  - $y = f(x_1, x_2,\ldots,x_r)$ a veličiny x_i mají například normální či alespoň rovnoměrné rozdělení
  - aproximace funkce $y = f(x_1, x_2,\ldots,x_r)$ Taylorovou řadou jen s lineárními členy je akceptovatelné
  - nejistoty u_{x_i} přispívají k celkové nejistotě podobnou mírou
  - nejistota u_y není dominantně určena standardní nejistotou získanou z vyhodnocení způsobem A

- nejistota u_y není dominantně určena standardní nejistotou získanou z vyhodnocení způsobem B založeném na rovnoměrném rozdělení

- Koeficient rozšíření stanovený pomocí t-rozdělení (Taylor & Kuyatt, 1994; JCGM, 2008)

- nechť je k dispozici hodnota $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ nepřímo měřené veličiny a její nejistota u_y získaná zákonem o šíření nejistoty (viz příští kapitola)

- stanovíme efektivní stupně volnosti ν_{eff} Welch-Satterthwaitovým vzorcem

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{r} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}},$$

kde $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, u_{x_i} jsou vzájemně statisticky nezávislé standardní nejistoty dílčích veličin, ν_i stupně volnosti veličiny u_{x_i}

- efektivní stupně volnosti nepřevyšují součet stupňů volnosti standardních nejistot dílčích veličin:

$$\nu_{\mathrm{eff}} \leq \sum_{i=1}^{r} \nu_i$$

- je-li nejistota u_{x_i} získaná z vyhodnocení způsobem A, stanovuje se její ν_i vhodnou statistickou metodou (Box, 1978), například
  - je-li x_i aritmetickým průměrem N naměřených hodnot a u_{x_i} směrodatnou odchylkou aritmetického průměru, stupně volnosti jsou $\nu_i = N - 1$

- je-li nejistota u_{x_i} získaná z vyhodnocení způsobem B, stanovuje se obvykle takto
  - jestliže pravděpodobnost, že se hodnota měřené veličiny bude nacházet mimo interval ohraničený mezemi a_- a a_+ bude prakticky nulová, pak se zpravidla používá vztah $\nu_i \rightarrow \infty$

- stanovíme t-faktor $t_p(\nu_{\text{eff}})$ založený na počtu ν_{eff} efektivních stupňů volnosti pro zvolenou konfidenční úroveň *p* (viz tabulka); pokud není ν_{eff} celé číslo, v tabulce se vybírá nejbližší celé číslo

- nakonec $k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$ a rozšířená nejistota $U_y = k_p u_y$

Tabulka G.2 – Hodnota $t_p(\nu)$ z t-rozdělení pro počet ν stupňů volnosti, která definuje interval–$t_p(\nu)$ až +$t_p(\nu)$ obsahující podíl p rozdělení

Počet stupňů volnosti Degrees of freedom	Podíl p v % Fraction p in percent					
ν	**68,27**[a]	**90**	**95**	**95,45**[a]	**99**	**99,73**[a]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235.80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

[a] Pro veličinu z popsanou normálním rozdělením s očekávanou hodnotou μ_z a směrodatnou odchylkou σ, intervalem $\mu_z \pm k\sigma$ s podílem p = 68,27 %, 95,45 %, a 99,73 % rozdělení pro k = 1, 2 a 3.

[a] For a quantity z described by a normal distribution with expectation μ_z and standard deviation σ, the interval $\mu_z \pm k\sigma$ encompasses p = 68,27, 95,45, and 99,73 percent of the distribution for k = 1, 2 and 3, respectively.

Výpočet nejistoty nepřímého měření (Taylor & Kuyatt, 1994; JCGM, 2008)

- nechť veličina *y* závisí na přímo měřených veličinách

  $x_1, x_2, \ldots, x_r$ tzn. $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$

- nejistota měření u_y veličiny *y* je určena
  - koeficientem citlivosti $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, který je mírou změny veličiny *y* v závislosti na změně hodnot vstupních odhadů dílčí veličiny
  - standardní nejistotou u_{x_i} dílčí veličiny x_i
  - kovariancí $u(x_i,x_j)$ dílčích veličin x_i a x_j

- platí zákon o šíření nejistoty

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

- pro nekorelované (vzájemně nezávislé) vstupní veličiny má tento zákon tvar

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2}$$

Referenční seznam:

Taylor, B. N. & Kuyatt, Chris E. & National Institute of Standards and Technology (U.S.). (1994). Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results. Gaithersburg, MD: U.S. Dept. of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology. http://physics.nist.gov/Pubs/guidelines/outline.html

Evaluation of measurement data-Guide to the expression of uncertainty in measurement, JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections.

Rounding expanded uncertainties and calibration values, NIST GLP 9-2019. https://www.nist.gov/system/files/documents/2019/05/14/glp-9-rounding-20190506.pdf

Dvorský, R. & Foukal, J. (2007). *Fyzikální měření* [Vysokoškolské skriptum]. Ostrava: VŠB-TU.

Hughes, I. G. & Hase, T. P. A. (2010). *Measurements and their Uncertainties: A practical guide to modern error analysis.* New York: Oxford University Press.

Referenční seznam:

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2000). *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3.* Havlíčkův Brod: Fragment.

Box, G. E. P., Hunter, W. G., & Hunter, J. S. (1978). *Statistics for Experimenters*. New York: John Wiley & Sons.