KATEDRA FYZIKY VŠB-TU OSTRAVA		
Student	NÁZEV PRÁCE	Číslo práce
Skupina/Osob. číslo	**Měření momentu setrvačnosti z pohybové rovnice**	Datum
Spolupracoval		Podpis studenta:

Cíle měření:
Stanovit moment setrvačnosti tělesa otáčivého kolem pevné a vodorovné osy. Zvládnout metodiku měření času a délky.

Měřicí prostředky:
setrvačník z kruhové desky na hřídeli (obr. 1), pásové měřítko, stopky, posuvné měřítko

Kompendium teorie:
Rotující těleso má setrvačnost. Mírou setrvačnosti rotujícího tělesa je moment setrvačnosti J. Moment setrvačnosti závisí nejen na hmotnosti tělesa, ale i na vzdálenostech hmotnostních elementů tělesa od rotační osy. Na rozdíl od hmotnosti m, která je mírou setrvačnosti tělesa při translačním pohybu, není moment setrvačnosti tělesu jednoznačně přiřazen, ale závisí na poloze rotační osy vzhledem k tělesu. Předpokládejme, že rozložení látky v tělese je spojité. Moment setrvačnosti J je:

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \iiint_{V_\mathrm{c}} r^2 \rho \mathrm{d}V \,, \tag{1}$$

kde dm je hmotnost elementu hmoty tělesa, r vzdálenost elementu hmotnosti dm od osy rotace, ρ hustota tělesa a V_c celkový objem tělesa.

Jestliže těleso nemá pravidelný tvar a konstantní hustotu, je výpočet momentu setrvačnosti prakticky nemožný. V tom případě je třeba určit J měřením.

Vektorový součet momentů všech sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem pevné osy je výsledný moment sil $\boldsymbol{M}$, který tělesu uděluje úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$, což matematicky zapisujeme takto:

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\varepsilon} = J\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} \,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{\varphi}$ je úhlová dráha. Rovnice (2) je pohybová rovnice pro pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy.

Ve vztahu (2) mají všechny vektory ($\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\varphi}$) směr osy rotace, která je pevná. Vzhledem k tomu lze psát pohybovou rovnici (2) ve skalárním tvaru:

$$M = J\varepsilon = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}. \tag{3}$$

Ze známých momentů sil a úhlového zrychlení můžeme vypočítat moment setrvačnosti. Setrvačník tvaru kruhové desky (obr. 1) se otáčí na hřídeli poloměru R. Na závaží hmotnosti m působí tíhové pole Země silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a vlákno silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$. Pohybová rovnice translačního pohybu závaží ve složkovém zápisu (vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$ leží v jedné přímce):

$$ma = mg - F_\mathrm{N}. \tag{4}$$

Vlákno působí na závaží silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$, podle zákona akce a reakce silou stejné velikosti opačné orientace působí závaží na vlákno a jeho prostřednictvím i na hřídel setrvačníku. Protože předpokládáme, že součinitel smykového tření mezi vláknem a hřídelí dosahuje úrovně, která zabrání prokluzování vlákna na hřídeli, působí lano na setrvačník silovým momentem $\boldsymbol{M}_\mathrm{L}$, pro jehož velikost platí:

$$M_\mathrm{L} = mR\left(g - a\right). \tag{5}$$

Moment síly M_L ze vztahu (5) je výsledný moment na setrvačník působící, pokud zanedbáme tření v ložiscích, takže jej můžeme dosadit do rovnice (3). Získáme tak rovnost:

$$mR(g - a) = J\varepsilon. \tag{6}$$

Závaží koná při poklesu rovnoměrně zrychlený pohyb po dráze h s nulovou počáteční rychlostí. Z kinematických rovnic tohoto pohybu vyplývá pro zrychlení vztah

$$a = \frac{2h}{t^2}. \tag{7}$$

Zrychlení a je současně tečným zrychlením na obvodu hřídele, takže

$$a = R\varepsilon. \tag{8}$$

Vyjádříme-li z rovnic (7) a (8) úhlové zrychlení ε a dosadíme je do rovnice (6), dostaneme pro J

$$J = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right). \tag{9}$$

Jestliže tření v ložiscích nezanedbáme, uplatní se příslušný moment třecích sil M_T. Pohybová rovnice rotačního pohybu setrvačníku, použijeme-li závaží o hmotnosti m_1, pak bude mít tvar:

$$m_1R\left(g - a_1\right) - M_T = J\,\frac{a_1}{R}. \tag{9}$$

V případě, že bude setrvačník roztáčet závaží o hmotnosti m_2, platí

$$m_2R\left(g - a_2\right) - M_T = J\,\frac{a_2}{R}. \tag{10}$$

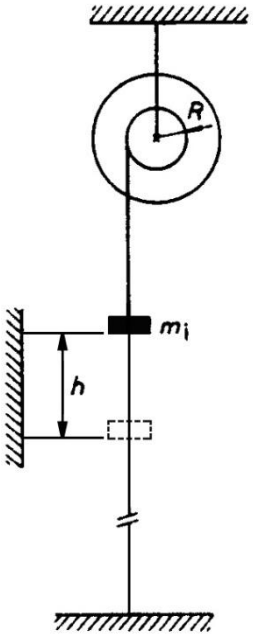
Od vztahu (9) odečtěme (10), vyjádříme J a po úpravě dostaneme pro J vztah:

$$J = \frac{R^2\left(m_1\left(g - a_1\right) - m_2\left(g - a_2\right)\right)}{a_1 - a_2} = \frac{R^2\left(m_1\left(g - \frac{2h}{t_1^2}\right) - m_2\left(g - \frac{2h}{t_2^2}\right)\right)}{2h\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right)}. \tag{11}$$

Pokyny k vlastnímu měření:

1) Pásovým měřítkem změřte vzdálenost h vodorovných tyčí, které jsou upevněny ke stojanu.

2) Stopkami zjistěte desetkrát dobu t_1 resp. t_2 , kterou potřebují závaží m_1 a m_2 k uražení dráhy h s nulovou počáteční rychlostí.

3) Stanovte rozšířenou a relativní rozšířenou nejistotu nepřímého měření momentu setrvačnosti.

Obrázek 1