Počítání s nekonečnem

Pro konstantu $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ platí, že

$$
\begin{array}{cccc}
\infty + \infty = \infty\,, & \infty - c = \infty\,, & \infty \cdot \infty = \infty\,, & c \cdot \infty = \infty\,, \\
-\infty - \infty = -\infty\,, & \infty + c = \infty\,, & \infty \cdot (-\infty) = -\infty\,, & -c \cdot \infty = -\infty\,, \\
 & -\infty - c = -\infty\,, & (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,, & -c \cdot (-\infty) = \infty\,, \\
 & -\infty + c = -\infty\,, & & c \cdot (-\infty) = -\infty\,,
\end{array}
$$

Neurčité výrazy

$$
\frac{\text{cokoli}}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \infty - \infty \quad , \quad 1^{\infty} \quad , \quad 0^{\infty} \quad , \quad \infty^{\infty} \quad , \quad \infty^{0} \quad , \quad 0 \cdot \infty\,.
$$

Obecný postup při výpočtu

Hledáme limitu

$$
A = \lim_{x \to c} f(x)\,.
$$

1. Zkusmo do předpisu funkce f dosadíme za x hodnotu c.
2. Vyjde-li
   (a) výraz z tabulky neurčitých výrazů, pak je potřeba zjistit, o jaký typ limity jde, a řešit pomocí naučeného postupu.
   (b) hodnota, která se nenachází v tabulce neurčitých výrazů, pak $A =$ vypočtená hodnota. Tedy funkce f je v bodě $x = c$ spojitá.

Typy limit a jejich řešení

Procvičení ze sbírky

`http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/index.html`

3. kapitola: Funkce jedné proměnné, 2. část: Limita funkce

Typ I Pro číslo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ dostaneme neurčitý výraz

$$\lim_{x\to c} \ldots = \frac{0}{0}$$

Řešení: Vytknout z čitatele i jmenovatele kořenového činitele $(x-c)$ a pokrátit jím.

(a) Pokud se ve zlomku vyskytují polynomy, pak vydělit kořenovým činitelem $(x-c)$ pomocí *Hornerova schématu*.

Procvičení: sbírka příkladů (kapitola 3, část 2) příklad 3.

(b) Pokud se ve zlomku vyskytují odmocniny, pak roznásobit podle některého ze vzorců

$$\begin{aligned}
(A-B)\cdot(A+B) &= A^2 - B^2\,,\\
(A-B)\cdot(A^2 + A\cdot B + B^2) &= A^3 - B^3\,,\\
(A+B)\cdot(A^2 - A\cdot B + B^2) &= A^3 + B^3\,.
\end{aligned}$$

Procvičení: sbírka příkladů (kapitola 3, část 2) příklad 4.

Typ II Pro číslo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ dostaneme neurčitý výraz

$$\lim_{x\to c} \ldots = \frac{\text{cokoli}}{0}$$

Řešení: Zavést substituci $y = x - c$. Dále upravit tak, aby bylo možné rozhodnout o limitě zprava a limitě zleva.
Procvičení: sbírka příkladů (kapitola 3, část 2) příklad 5.

Typ III Pro číslo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ dostaneme neurčitý výraz

$$\lim_{x\to c} F(x, \sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}) = \frac{0}{0}\,.$$

Řešení: 1) zapsat tg a cotg s pomocí funkcí sin a cos.
2) Pokud $c \neq 0$, pak substituce $y = x - c$.
3) Použít vzorec

$$\boxed{\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1}$$

Procvičení: sbírka příkladů (kapitola 3, část 2) příklad 6.
Příklad 7 je na typ I(b) a III dohromady.
Příklad 8 je na typ I(a) a III dohromady.

Typ IV Pro číslo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^*$ dostaneme neurčitý výraz

$$\lim_{x\to} \ldots = (1+0)^{\infty}\,.$$

Řešení: Najít vhodnou substituci tak, aby bylo možné použít některý ze vzorců

$$\boxed{\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \mathrm{e}} \text{ nebo } \boxed{\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}}$$

Procvičení: sbírka příkladů (kapitola 3, část 2) příklad 9.

Typ V Pro číslo $\boldsymbol{c} = \pm\infty$ dostaneme neurčitý výraz

$$\lim_{x\to c} \ldots = \frac{\infty}{\infty}$$

Řešení: 1) Vybrat největší mocninu ze jmenovatele a podělit jí čitatele i jmenovatele.

2) Využít znalosti grafu funkcí $\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x^2}$.

Jiný způsob řešení: *l'Hospitalovo pravidlo*: derivace zvlášť čitatele a zvlášť jmenovatele.

Procvičení: sbírka příkladů (kapitola 3, část 2) příklad 10 a 11.

Typ VI Pro číslo $\boldsymbol{c} = \pm\infty$ dostaneme neurčitý výraz

$$\lim_{x\to c} \ldots = \infty - \infty$$

Řešení: 1) Roznásobit stejným postupem jako u typu I(a).

2) Podělit čitatele i jmenovatele jako u typu V.

Procvičení: sbírka příkladů (kapitola 3, část 2) příklad 12.