Matematika 1 – hledání předpisu inverzních funkcí k reálným funkcím

Inverze k elementárním funkcím

Je nezbytně nutné znát zpaměti dvojice funkcí vzájemně k sobě inverzních. Tj.

$f(x) = x^n$ $g(x) = \sqrt[n]{x}$	mocnina odmocnina	$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ $g^{-1}(x) = x^n$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ $g(x) = \ln(x)$	exponenciála přirozený logaritmus	$f^{-1}(x) = \ln(x)$ $g^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = a^x$, $a > 0$ $g(x) = \log_a(x)$, $a > 0$	mocninná funkce obecný logaritmus	$f^{-1}(x) = \log_a(x)$ $g^{-1}(x) = a^x$
$f(x) = \sin(x)$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ $g(x) = \arcsin(x)$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$	sinus arkussinus	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ $g^{-1}(x) = \sin(x)$
$f(x) = \cos(x)$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ $g(x) = \arccos(x)$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$	kosinus arkuskosinus	$f^{-1}(x) = \arccos$ $g^{-1}(x) = \cos(x)$
$f(x) = \mathrm{tg}(x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $g(x) = \mathrm{arctg}(x)$	tangens arkustangens	$f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x)$ $g^{-1}(x) = \mathrm{tg}(x)$
$f(x) = \mathrm{cotg}(x)$, $x \in (0, \pi)$ $g(x) = \mathrm{arccotg}(x)$	kotangens arkuskotangens	$f^{-1}(x) = \mathrm{arccotg}$ $g^{-1}(x) = \mathrm{cotg}(x)$

Hledání předpisu inverzní funkce

Veškerá znalost se využívá při hledání předpisu inverzní funkce.

Příklad 1 Najděte předpis inverzní funkce k funkci $f(x) = \sqrt{x^3+2}$.
Řešení:

1. Nejdříve si uvědomíme, že funkci lze také zapsat také jako: $f:\ y = \sqrt{x^3+2}$.
2. V předchozím vyjádření přehodíme x a y, tedy: $x = \sqrt{y^3+2}$.
3. Posledním úkolem je vyjádřit z předchozí rovnice proměnnou y:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{y^3+2} && |()^2 \\
x^2 &= y^3+2 && |-2 \quad \text{je potřeba osamostatnit funkci } y^3 \\
x^2-2 &= y^3 && |\sqrt[3]{\ } \quad \text{až nyní se na obě strany rovnosti aplikuje třetí odmocnina} \\
\sqrt[3]{x^2-2} &= y
\end{aligned}$$

Odpověď tedy zní: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2-2}$.

Samostaný úkol:
Ověřte zda platí, že $Df = \langle -\sqrt[3]{2}, +\infty)$ a že $Df^{-1} = \mathbb{R}^1$.

Příklad 2 Najděte předpis inverzní funkce k funkci $s(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$.
Řešení:

1. Nejdříve si uvědomíme, že funkci lze také zapsat také jako: $s:\ y = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$.
2. V předchozím vyjádření přehodíme x a y, tedy: $x = \sqrt{\frac{y-2}{y}}$.
3. Posledním úkolem je vyjádřit z předchozí rovnice proměnnou y:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{y-2}{y}} && |(\ )^2 \\
x^2 &= \frac{y-2}{y} && |\cdot y \\
x^2 \cdot y &= y-2 && |-y \quad \text{všechny výrazy s } y \text{ převedeme na jednu stranu} \\
x^2 \cdot y - y &= -2 && \quad \text{na levé straně vykneme } y \\
(x^2-1)\cdot y &= -2 && |\cdot \frac{1}{x^2-1} \\
y &= \frac{-2}{x^2-1} \\
y &= \frac{2}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Odpověď tedy zní: $s^{-1}(x) = \frac{2}{1-x^2}$.

Samostaný úkol:
Ověřte zda platí, že $Ds = (-\infty, 0\rangle \bigcup \langle 2, +\infty)$ a že $Ds^{-1} = \mathbb{R}^1 - \{+1, -1\}$.

Příklad 3 Najděte předpis inverzní funkce k funkci $g(x) = \sqrt[3]{\sin(x)+2} - 10$.
Řešení:

1. Nejdříve si uvědomíme, že funkci lze také zapsat také jako: $g:\ y = \sqrt[3]{2-\sin(x)} - 1$.
2. V předchozím vyjádření přehodíme x a y, tedy: $x = \sqrt[3]{2-\sin(y)} - 1$.
3. Posledním úkolem je vyjádřit z předchozí rovnice proměnnou y:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{2-\sin(y)} - 1 && |+1 && \text{je potřeba osamostatnit odmocninu}\\
x+1 &= \sqrt[3]{2-\sin(y)} && |()^3 &&\\
(x+1)^3 &= 2-\sin(y) && |-2 &&\\
(x+1)^3 - 2 &= -\sin(y) && |\cdot(-1) && \text{až potom, co se zbavíme záporného znaménka před } \sin(y)\text{, budeme moci aplikovat inverzní funkci k sinu}\\
2-(x+1)^3 &= \sin(y) && |\arcsin(\ ) && \text{nyní se na obě strany rovnosti aplikuje arkussinus}\\
\arcsin(2-(x+1)^3) &= y
\end{aligned}
$$

Odpověď tedy zní: $g^{-1}(x) = \arcsin(2-(x+1)^3)$.

Samostaný úkol:
Ověřte zda platí, že $Dg = \mathbb{R}^1$ a že $Dg^{-1} = \langle 0, \sqrt[3]{3}-1\rangle$.

Příklad 4 Najděte předpis inverzní funkce k funkci $h(x) = 1 - 2\cdot(\mathrm{e}^x - 2)$.
Řešení:

1. Nejdříve si uvědomíme, že funkci lze také zapsat také jako: $h:\ y = 1 - 2\cdot(\mathrm{e}^x - 2)$.
2. V předchozím vyjádření přehodíme x a y, tedy: $x = 1 - 2\cdot(\mathrm{e}^y - 2)$.
3. Posledním úkolem je vyjádřit z předchozí rovnice proměnnou y:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - 2\cdot(\mathrm{e}^y - 2) && |-1 &&\\
x - 1 &= -2\cdot(\mathrm{e}^y - 2) && |\cdot\frac{-1}{2} && \text{je potřeba osamostatnit závorku}\\
\frac{1-x}{2} &= \mathrm{e}^y - 2 && |+2 &&\\
2 + \frac{1-x}{2} &= \mathrm{e}^y &&&&\\
\frac{5-x}{2} &= \mathrm{e}^y && |\ln(\ ) &&\\
\ln\left(\frac{5-x}{2}\right) &= y
\end{aligned}
$$

Odpověď tedy zní: $h^{-1}(x) = \ln\left(\frac{5-x}{2}\right)$.

Samostaný úkol:
Ověřte zda platí, že $Dh = \mathbb{R}^1$ a že $Dh^{-1} = (-\infty, 5)$.

Příklad 5 Najděte předpis inverzní funkce k funkci $q(x) = 4 - 3\ln\left(\frac{x+1}{5}\right)$.
Řešení:

1. Nejdříve si uvědomíme, že funkci lze také zapsat také jako: $q: \ y = 4 - 3\ln\left(\frac{x+1}{5}\right)$.

2. V předchozím vyjádření přehodíme x a y, tedy: $x = 4 - 3\ln\left(\frac{y+1}{5}\right)$.

3. Posledním úkolem je vyjádřit z předchozí rovnice proměnnou y:

$$
\begin{aligned}
x &= 4 - 3\ln\left(\frac{y+1}{5}\right) && \mid -4 \\
x - 4 &= -3\ln\left(\frac{y+1}{5}\right) && \mid \cdot \frac{-1}{3} \\
\frac{4-x}{3} &= \ln\left(\frac{y+1}{5}\right) && \mid \mathrm{e}^{(\,)} \\
\mathrm{e}^{\frac{4-x}{3}} &= \frac{y+1}{5} && \\
\sqrt[3]{\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}} &= \frac{y+1}{5} && \mid \cdot 5 \\
5 \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}} &= y + 1 && \mid -1 \\
5 \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}} - 1 &= y &&
\end{aligned}
$$

Odpověď tedy zní: $q^{-1}(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}} - 1$.

Samostaný úkol:
Ověřte zda platí, že $Dq = (-1, +\infty)$ a že $Dq^{-1} = \mathbb{R}^1$.