5. přednáška - ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

1) Alternativní rozdělení *A(p)*

Definice: Náhodná veličina X s pravděpodobnostní funkcí $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$ ($0 < p < 1$) má **alternativní rozdělení** pravděpodobnosti $A(p)$ s parametrem p.

Například: Náhodná veličina je výsledkem teoretické části zkoušky z matematiky, u které by měl student odpovědět na jednu otázku, přičemž prostudoval 70% učiva.

2) Rovnoměrné rozdělení *R(n)*

Definice: Náhodná veličina X má **rovnoměrné rozdělení** $R(n)$ právě tehdy, když je pravděpodobnostní funkce určena vztahem: $p(x) = \frac{1}{n}$, kde n je počet možných výsledků.

Například: Náhodná veličina je výsledkem hodu kostkou: M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - každý výsledek je stejně pravděpodobný.

3) Binomické rozdělení *Bi(n,p)*

Při popisu NV s alternativním rozdělením jsme uvažovali pokus, v němž úspěch může nastat s pravděpodobností p a nenastat s pravděpodobností $(1 - p)$. Posloupnost takových nezávislých pokusů označujeme jako **Bernoulliho pokusy**.

Definice: Náhodná veličina X má **binomické rozdělení** $Bi(n, p)$ právě tehdy, když je pravděpodobnostní funkce určena vztahem:

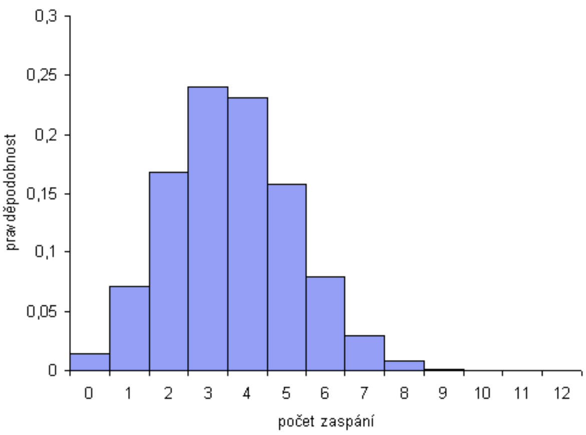
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n$; n je počet pokusů a p je pravděpodobnost úspěšnosti v každém pokusu.

Příklad: Student VŠB má potíže s ranním vstáváním. Proto někdy zaspí a nestihne přednášku, která začíná již v 9 hodin. Pravděpodobnost, že zaspí, je 30%. V semestru je 12 přednášek - tzn. 12 nezávislých pokusů dorazit na přednášku včas. Nalezněte pravděpodobnost, že student nestihne přednášku v důsledku zaspání v polovině nebo více případů.

Řešení:

Rozdělení pravděpodobnosti pro tento příklad je znázorněno graficky na následujícím obrázku:



4) Hypergeometrické rozdělení *H(N;M;n)*

Předpokládejme, že náhodný pokus opakujeme n-krát, přičemž jednotlivé pokusy jsou vzájemně **závislé**. Předpokládejme, že v základním souboru N prvků je M prvků s danou vlastností. Náhodně vybereme n prvků, z nichž žádný nevracíme zpět. Jedná se tedy o **výběry bez vracení** (**opakované pokusy závislé**). Pro takto vzniklou náhodnou veličinu X platí:

Definice: NV X má **hypergeometrické rozdělení** $H(N, M, n)$ právě tehdy, když má pravděpodobnostní funkce tvar:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Vlastnosti:

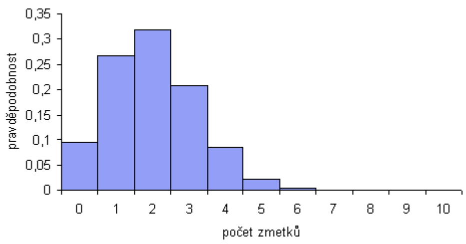
$$E(X) = n.\frac{M}{N}$$

$$D(X) = n.\frac{M}{N}.\left(1-\frac{M}{N}\right).\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Příklad: Mezi stovkou výrobků je 20 vadných. Vybereme deset výrobků, určete, jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou právě 3 vadné.

Řešení:

Pravděpodobnostní funkci můžeme znázornit graficky:



5) Poissonovo rozdělení *Po(λ)*

Definujme náhodný pokus jako Poissonův proces. Pokud si NV X definujeme jako počet výskytů události v časovém intervalu délky t nebo počet výskytů události na ploše t (v objemu t), pak lze X popsat Poissonovým rozdělením s parametrem λ.

Definice: Náhodná veličina X má **Poissonovo rozdělení** $Po(\lambda)$ právě tehdy, když má pravděpodobnostní funkce tvar:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

v daném jednotkovém úseku, kde $k = 0,1,2,\ldots$; $\lambda > 0$.

Příklad: Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že na dané výrobní lince dojde v průměru ke 35 poruchám týdně. Zjistěte jaká je pravděpodobnost, že počet poruch za jeden den bude větší než 4.

Řešení:

Příklad: Poznejte o jaké rozdělení DNV se jedná.

a) počet studentů, kteří úspěšně ukončí kurz MAIII v tomto semestru (z minulých let víme, že pravděpodobnost, že student úspěšně dokončí kurz je 0,63; do kurzu je v tomto semestru přihlášeno 248 studentů)

b) počet telefonních hovorů na ústředně za určitou dobu

c) počet úspěšných „šestek“ z 10-ti hodů (basketbal)