1. přednáška - PRAVDĚPODOBNOST

NÁHODNÝ POKUS A JEV

Každá opakovatelná činnost prováděná za stejných nebo přibližně stejných podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě, se nazývá **náhodný pokus**.

Výsledek pokusu tedy není předem znám, je to však právě jeden z prvků známé množiny výsledků, kterou nazýváme **základní prostor Ω.** O těchto výsledcích se předpokládá, že jsou **elementární**. Každou podmnožinu množiny **Ω** nazýváme **náhodným jevem** (značíme *A*, *B*, ...), přičemž prázdná podmnožina se nazývá **jev nemožný**, označujeme Ø a celý základní prostor **jev jistý**, označujeme *I*.

Výsledek náhodného pokusu tedy nelze s jistotou předpovědět, ale některé výsledky nastávají častěji, některé méně často a některé velmi ojediněle. Při velkých sériích opakování však i tyto náhodné pokusy (resp. jejich výsledky) vykazují určité zákonitosti a pravidelnosti. Právě studium těchto zákonitostí, jejich popsání a vytvoření pravidel pro určení měr četnosti výskytů těchto jevů je **cílem teorie pravděpodobnosti** .

Relace mezi jevy

1) Sjednocení (součet) dvou jevů A,B (značíme $A \cup B$, $A + B$)

2) Průnik (součin) dvou jevů A,B (značíme $A \cap B$, $A \cdot B$)

Poznámka: pokud dva jevy nemohou nastat současně nazýváme je **disjunktní jevy** a platí tedy: $A \cap B = \emptyset$

3) Rozdíl dvou jevů A,B (značíme $A - B$)

4) Doplněk jevu A, opačný jev (značíme $\overline{A}$)

POJEM PRAVDĚPODOBNOSTI

Pravděpodobností označujeme míru očekávatelnosti výskytu náhodného jevu. S rostoucí pravděpodobností roste šance, že jev nastane. Pravděpodobnost se obecně označuje číslem z intervalu $\langle 0;1 \rangle$.

1) Klasická (Laplaceova) definice pravděpodobnosti

Definice: Je-li základní prostor konečná neprázdná množina n elementárních jevů, které mají stejnou šanci výskytu, pak **pravděpodobnost**, že při realizaci náhodného pokusu nastane jev A je

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kde m je počet příznivých výsledků jevu A a n je počet všech možných výsledků.

Příklad: V koloně 8 vozidel jedou právě tři červené automobily. Jaká je pravděpodobnost, že červená vozidla jedou bezprostředně za sebou?

Řešení:

2) Geometrická pravděpodobnost

Dalším historickým příkladem definice pravděpodobnosti může být tzv. geometrická definice, která umožňuje určit pravděpodobnost v případech, kdy počet všech možných výsledku náhodného pokusu je nespočetný. Definice je založena na porovnání objemu, obsahu nebo délek geometrických útvaru. Používáme ji v případech, které lze převést na toto schéma:

V rovině (případně na přímce nebo v prostoru) je dána určitá oblast Ω a v ní další uzavřená oblast A. Pravděpodobnost jevu A, který spočívá v tom, že náhodně zvolený bod v oblasti Ω leží i v oblasti A je:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|$, $|\Omega|$ jsou míry oblastí A a Ω.

Příklad: Dva známí se domluví, že se sejdou na určitém místě mezi 13. a 14. hodinou, přičemž doba čekání je 20 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se při této dohodě setkají?

Řešení:

3) Kolmogorova (axiomatická) definice pravděpodobnosti

Axiomatická definice pravděpodobnosti vychází z toho, že pravděpodobnost je objektivní vlastnost náhodného jevu, která nezávisí na tom, zda ji umíme nebo neumíme měřit. Je tedy dostatečně obecná a klasická či geometrická definice pravděpodobnosti představuje speciální (v praxi často využívané) případ axiomatické definice.

Definice: **Jevové pole $\mathcal{A}$** je množina všech různých podmnožin základního prostoru Ω, která je uzavřená vůči doplňku a sjednocení a platí:

- I leží v $\mathcal{A}$ (jev jistý je prvkem jevového pole)

- leží-li jevy A, B v $\mathcal{A}$, pak $A \cup B$, $A \cap B$, A-B i $\overline{A}$, $\overline{B}$ leží v $\mathcal{A}$

Příklad: Nechť základní prostor $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Máme náhodné jevy $A = \{a\}$ a $B = \{c, d\}$. Doplňte náhodné jevy A a B tak, abyste dostali co nejmenší jevové pole.

Řešení:

Definice: Nechť $\mathcal{A}$ je jevové pole. **Pravděpodobnost jevu *A*** je reálné číslo $P(A)$, pro něž platí:

1. $P(A) \geq 0$ pro $\forall A \in \mathcal{A}$
2. $P(I) = 1$
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) \cup P(A_2 \cup \ldots P(A_n) \cup \ldots$, přičemž $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ tvoří posloupnost navzájem **neslučitelných jevů**

Vlastnosti pravděpodobnosti

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. Jestliže $A \subseteq B$, pak:
   a) $0 \leq P(A) \leq P(B)$
   b) $P(B - A) = P(B) - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Příklad: Víme, že v dodávce 100 hřídelí nemá požadovaný průměr 10 kusů, požadovanou délku nemá 20 kusů a současně nemá požadovaný průměr i délku 5 kusů. Určete pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná hřídel z dodávky má požadovaný průměr i délku.

Řešení: