2. přednáška - PRAVDĚPODOBNOST

NEZÁVISLÉ JEVY A PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

Definice: Pravděpodobnost toho, že nastane jev A za předpokladu, že nastal jev B, se nazývá **podmíněná pravděpodobnost**, značí se $P(A|\mathrm{B})$ a je rovna:

$$P(A|\mathrm{B}) = \frac{P(A \cap \mathrm{B})}{P(B)}, \text{ kde } P(\mathrm{B}) \neq 0 .$$

Věta: Pro pravděpodobnost průniku dvou jevů A,B platí:

$$P(A \cap B) = P(A|\mathrm{B}) \cdot \mathrm{P(B)}$$

Definice: Jevy A,B nazýváme **nezávislé**, pokud platí:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \mathrm{P(B)} .$$

Poznámka: Jsou-li jevy A,B nezávislé, pak $P(A|\mathrm{B}) = P(A)$, neboli to jestli nastane či nenastane jev B nemá vliv na to, zda nastane jev A.

Pokud máme skupinu více jevů, rozlišujeme nezávislost podvojnou a vzájemnou. Jevy A_1, ..., A_n jsou vzájemně nezávislé, jestliže pro každou jejich podmnožinu platí, že pravděpodobnost průniku jevů je rovna součinu pravděpodobností těchto jevů. Jsou-li jevy vzájemně nezávislé, jsou také po dvou nezávislé. Opačné tvrzení neplatí!

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne třikrát za sebou pětka?

Řešení:

Příklad: V osudí je 12 zelených a 6 červených balónků. Z osudí dvakrát losujeme (po vytáhnutí balónky do osudí nevracíme).
a) Jaká je pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhnu zelenou, když jsem v prvním vytáhla červenou?
b) Určete pravděpodobnost, že jsme v obou tazích vybrali zelenou kouli.

Řešení:

Podmíněnou pravděpodobnost používáme k výpočtu pravděpodobnosti jevů, které jsou podmíněny nastoupením množiny vzájemně disjunktních jevů. Vztah pro pravděpodobnost nějakého jevu bez ohledu na podmiňující jevy udává věta o úplné pravděpodobnosti.

ÚPLNÁ PRAVDĚPODOBNOST

Věta (o úplné pravděpodobnosti): Mějme úplný systém vzájemně neslučitelných jevů $H_1,\dots,H_n$ a libovolný jev $A=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap H_i)$. Pro pravděpodobnost tohoto jevu *A* platí:

$$P(A)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}P(A\,|\,\mathrm{H_i})\cdot \mathrm{P(H_i)}\,.$$

Příklad: Do obchodu dodávají rohlíky 3 pekárny v počtech 450, 850 a 1000 kusů denně. Zmetkovitost jejich dodávek je 4%, 3% a 5%. V prodeji jsou rohlíky dohromady od všech 3 pekáren. Určete pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný rohlík je zmetek.

Řešení:

BAYESOVA VĚTA

Při nastoupení jevu *A* se může objevit otázka, který z jevů H_i vedl k nastoupení jevu A a proto je někdy potřeba určit $P(\mathrm{H_i}\,|\,\mathrm{A})$ - jak se mění pravděpodobnost ve světle nových důkazů. Z definice podmíněné pravděpodobnosti plyne, že $P(\mathrm{H_i}\,|\,\mathrm{A})=\dfrac{\mathrm{P(H_i\cap A)}}{\mathrm{P(A)}}=\dfrac{P(A\,|\,\mathrm{H_i})\cdot\mathrm{P(H_i)}}{P(A)}$. Dosadíme-li do jmenovatele větu o úplné pravděpodobnosti, dostaneme vztah , který označujeme jako **Bayesovu větu**.

Věta (Bayesova): Mějme úplný systém vzájemně neslučitelných jevů $H_1,\dots,H_n$ a libovolný jev $A=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap H_i)$. Pro pravděpodobnost, že nastane jev H_i, pokud nastal jev A je:

$$P(\mathrm{H_i}\mid \mathrm{A})=\frac{P(A\mid \mathrm{H_i})\cdot \mathrm{P(H_i)}}{\sum_{\mathrm{i=1}}^{n}P(A\mid \mathrm{H_i})\cdot \mathrm{P(H_i)}}.$$

Příklad: Žena cestuje letadlem a postupně ji přepravují tři letecké společnosti. Pravděpodobnost, že ji ztratí kufr i-tá společnost, je 1%, 3% a 2%. Na konci své cesty žena zjistila, že kufr chybí. Určete pravděpodobnost, že ztrátu zavinila druhá společnost.

Řešení:

OPAKOVANÉ POKUSY

Stává se, že náhodný pokus, jehož výsledkem je jev A, opakujeme n-krát po sobě při zachování stejného systému podmínek. Pokud pravděpodobnost jevu A při každém opakování nezávisí na výsledcích předcházejících pokusů, hovoříme o Bernoulliho posloupnosti nezávislých pokusů (např. hod kostkou). Závislými pak nazveme takové opakované pokusy, při nichž je pravděpodobnost "nastoupení" jevu A v určitém pokusu závislá na výsledcích předchozích pokusů (např. výběry z osudí bez vracení).

Věta: Je-li pravděpodobnost jevu A v každém pokusu $P(A) = p$, pak pravděpodobnost jevu A_k (jev A v Bernoulliho posloupnosti n nezávislých pokusů se uskuteční právě k-krát) je určena vztahem:

$$P(\mathrm{A_k})=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Příklad: Vypočtěte, co je pravděpodobnější? Vyhrát v tenise se stejně silným soupeřem 3 zápasy ze 4 nebo 6 zápasů z osmi?

Řešení:

Nechť je dán soubor N prvků, z nichž M má určitou vlastnost a $(N - M)$ nikoliv. Vybereme postupně n prvků, z nichž žádný nevracíme. Pravděpodobnost, že mezi n vybranými bude k takových, že mají sledovanou vlastnost, vypočteme podle vzorce:

$$P(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}; \quad \text{pro } \max(n\text{-}N + m;0) \leq k \leq \min(M;n)$$

<u>Příklad:</u> V osudí je 20 míčků zelených a 30 modrých. Náhodně vybereme 10 míčků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými míčky bude právě šest modrých, jestliže je vybereme současně.

<u>Řešení:</u>