

KOMBINATORIKA

Kombinatorika je obor matematiky, který se zabývá uspořádáním daných prvků podle určitých pravidel do určitých skupin.

Základním pojmem v kombinatorice je pojem (k -prvková) **skupina**, nebo také **k -tice** prvků, kde k je přirozené číslo.

Věta (pravidlo součinu): Počet všech uspořádaných k -tic (dvojic, trojic,...), jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Věta (pravidlo součtu): Mějme konečné množiny A_1, A_2, \dots, A_k , které mají po řadě n_1, n_2, \dots, n_k prvků. Jsou-li každé dvě množiny navzájem disjunktní, tzn. neobsahují žádný společný prvek, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ je roven $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Kombinatorika tedy zkoumá skupiny (podmnožiny) prvků vybraných z jisté základní množiny. Nejdříve si ujasníme, s jakými výběry se v praxi můžeme setkat. Prvním kritériem je uspořádanost výběru:

Uspořádaný výběr (variace) - záleží na pořadí prvků

Neuspořádaný výběr (kombinace) - nezáleží na pořadí prvků

Druhým kritériem je, zda se prvky po výběru do původní množiny vrací či nikoliv. Podle toho výběry rozlišujeme na:

Výběry s opakováním - vybraný prvek se vrací do původní množiny

Výběry bez opakování - vybraný prvek se nevrací do původní množiny

1) VARIACE bez opakování

Definice: k -členná variace z n prvků ($0 < k \leq n$) je uspořádaná k -tice sestavená tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Značíme ji $V_k(n)$ - **variační číslo**.

Věta : Počet variací $V_k(n)$ je roven:

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2) PERMUTACE bez opakování

Permutace je zvláštní případ variace, kde $k = n$. To znamená, že ze zadaných prvků postupně vybereme všechny.

Definice: Permutace z n prvků je uspořádaná n -tice sestavená tak, že každý prvek se v ní vyskytuje právě jednou. Značíme ji $P(n)$.

Věta: Počet permutací $P(n)$ je roven:

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

3) VARIACE s opakováním

Definice: k -členná variace s opakováním z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše k -krát. Značíme ji $V'_k(n)$.

Věta: Počet variací s opakováním $V'_k(n)$ je roven:

$$V'_k(n) = n^k$$

4) PERMUTACE s opakováním

Definice: Permutace s opakováním je uspořádaná n -tice z k různých prvků, v níž se každý prvek n_i -krát opakuje ($i = 1, \dots, k$). Značíme ji P'_{n_1, \dots, n_k} .

Věta: Počet permutací s opakováním je roven:

$$P'_{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

5) KOMBINACE bez opakování

Definice: k -členná kombinace z n prvků ($1 \leq k \leq n$) je neuspořádaná k -tice sestavená tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Značíme ji $C_k(n)$ - **kombinační číslo**.

Věta: Počet kombinací $C_k(n)$ je roven:

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Platí: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

6) KOMBINACE s opakováním

Definice: k -členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k -tice sestavená tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše k -krát. Značíme ji $C'_k(n)$.

Věta: Počet kombinací $C'_k(n)$ je roven:

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$