6. přednáška - ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

SPOJITÉ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

1) Rovnoměrné *R(a,b)*

Definice: Náhodná veličina X má **rovnoměrné rozdělení** $R(a,b)$ právě tehdy, když je hustota pravděpodobnosti určena vztahem: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{pro } x\in\langle a,b\rangle\\ 0 & \text{pro } x\notin\langle a,b\rangle\end{cases}$.

Příklad: Tramvajová linka číslo 8 odjíždí v dopoledních hodinách ze zastávky každých 10 minut. Vypočtěte pravděpodobnost, že na ni budete dopoledne čekat déle než 7 minut.

2) Exponenciální *Exp(λ)*

Toto rozdělení má spojitá náhodná veličina X, která představuje dobu čekání do nastoupení náhodného jevu, nebo délku intervalu mezi takovými dvěma jevy.

Definice: Náhodná veličina X má **exponenciální rozdělení** $Exp(\lambda)$ právě tehdy, když je hustota pravděpodobnosti určena vztahem: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<0\\ \lambda.e^{-\lambda x} & \text{pro } x\geq 0\end{cases}$.

Příklad: Doba čekání na výrobek u výrobní linky trvá průměrně 5 minut. Určete:
a) pravděpodobnost, že budeme čekat na výrobek déle než 12 minut
b) dobu čekání, během které bude výrobek vyroben s pravděpodobností 0,9.

3) Normální $N(\mu,\sigma^2)$

Nejpoužívanějším pravděpodobnostním rozdělením modelujícím chování velkého množství náhodných jevů v technice, přírodních vědách i ekonomii je rozdělení normální. Z hlediska aplikací bývá vhodné k popisu náhodných veličin, které lze interpretovat jako aditivní výsledek mnoha nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů. Proto bývá normální rozdělení také označováno jako **zákon chyb**.

Definice: Náhodná veličina X má **normální rozdělení** $N(\mu,\sigma^2)$ právě tehdy, když je hustota pravděpodobnosti určena vztahem: $f(x)=\frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ pro $x\in(-\infty,\infty)$.

Distribuční funkce:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt \quad \text{pro } x\in(-\infty,\infty)$$

Příklad: Inteligenční kvocient má v populaci normální rozdělení se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 15. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost, že IQ náhodně vybraného jedince bude

a) menší než 90,

b) větší než 130,

c) v mezích od 105 do 125?

4) Normované normální $N(0,1)$

Jedná se o speciální případ obecného normálního rozložení, kdy $\mu=0$ a $\sigma^2=1$.

Hustota pravděpodobnosti:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{pro } x\in(-\infty,\infty)$$

Distribuční funkci u tohoto rozdělení označujeme:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty)$$

Věta: Nechť $X \to N(\mu;\sigma^2)$. Definujme náhodnou veličinu Z jako $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Pak tato náhodná veličina Z má normované normální rozdělení ($Z \to N(0;1)$).

Mezi distribuční funkcí normální NV X a distribuční funkcí normované NV Z platí následující převodní vztah:

$$F(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Příklad: NV X ... odchylka šířky výrobku od požadované hodnoty v mm, $X \to N(10;5^2)$. Určete $F(7)$ a hodnotu horního kvartilu (vysvětlete význam výsledků).

Tab. I Distribuční funkce normálního rozdělení

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9
3,0	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999	3,0
3,1	0,999032	0,999065	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238	0,999264	0,999289	3,1
3,2	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462	0,999481	0,999499	3,2
3,3	0,999517	0,999534	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624	0,999638	0,999651	3,3
3,4	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740	0,999749	0,999758	3,4
3,5	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999822	0,999828	0,999835	3,5
3,6	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879	0,999883	0,999888	3,6
3,7	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918	0,999922	0,999925	3,7
3,8	0,999928	0,999931	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946	0,999948	0,999950	3,8
3,9	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964	0,999966	0,999967	3,9
4,0	0,999968	0,999970	0,999971	0,999972	0,999973	0,999974	0,999975	0,999976	0,999977	0,999978	4,0
4,1	0,999979	0,999980	0,999981	0,999982	0,999983	0,999983	0,999984	0,999985	0,999985	0,999986	4,1
4,2	0,999987	0,999987	0,999988	0,999988	0,999989	0,999989	0,999990	0,999990	0,999991	0,999991	4,2
4,3	0,999991	0,999992	0,999992	0,999993	0,999993	0,999993	0,999993	0,999994	0,999994	0,999994	4,3
4,4	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996	4,4
4,5	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999998	0,999998	0,999998	4,5
4,6	0,999998	0,999998	0,999998	0,999998	0,999998	0,999998	0,999998	0,999998	0,999999	0,999999	4,6

NÁHODNÝ VEKTOR

Definice: Dvourozměrným **náhodným vektorem** rozumíme vektor $X = (X_1, X_2)$, jehož složky jsou náhodné veličiny definované na stejném základním prostoru.

Definice: Reálnou funkci definovanou předpisem

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2)$$

nazveme **sdruženou distribuční funkcí** náhodného vektoru *X*.

DISKRÉTNÍ SDRUŽENÉ ROZDĚLENÍ

Definice: Funkce $p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ se nazývá **sdružená pravděpodobnostní funkce.**

MARGINÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Kromě rozdělení náhodného vektoru je někdy potřeba znát i rozdělení jednotlivých složek.

Definice: **Marginálními distribučními funkcemi** náhodného vektoru rozumíme distribuční funkce NV X a Y.

$$F_X(x) = P(X < x)$$
$$F_Y(y) = P(Y < y).$$

Definice: **Marginálními pravděpodobnostními funkcemi** diskrétního náhodného vektoru rozumíme pravděpodobnostní funkce NV X a Y.

$$p_X(x) = P(X = x)$$
$$p_Y(y) = P(Y = y).$$

Příklad: Máme rodinu se třemi dětmi. Zavedeme NV *X*, která určuje počet synů a NV *Y*, která vyjadřuje, kolik má prostřední dítě mladších bratrů. Určete sdruženou a marginální pravděpodobnostní a distribuční funkci.

Řešení:

PODMÍNĚNÉ ROZDĚLENÍ

Rozdělení náhodné veličiny *X* za předpokladu, že náhodná veličina *Y* nabyla hodnoty *y*, popisuje **podmíněné rozdělení** *X* vzhledem k *Y*.

Definice: Podmíněné pravděpodobností funkce jsou definovány:

$$P(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)},\ p_Y(y) \neq 0$$

$$P(y \mid x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)},\ p_X(x) \neq 0.$$

Definice: Podmíněné distribuční funkce jsou definovány:

$$F(x \mid y) = \frac{\sum_{x<xi} p(x_i, y)}{p_Y(y)},\ p_Y(y) \neq 0$$

$$F(y \mid x) = \frac{\sum_{y<yi} p(x, y_i)}{p_X(x)},\ p_X(x) \neq 0.$$

Příklad: Pokračujme v příkladu s dětmi. Určete $P(x \mid y)$.

NEZÁVISLOST NÁHODNÝCH VELIČIN

Nechť **X**=(*X*,*Y*) je náhodný vektor. Řekneme, že náhodné veličiny *X*,*Y* jsou nezávislé, pokud $\forall (x, y) \in R^2$ platí:

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \text{(popřípadě } p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)\text{)}.$$

Příklad: Opět příklad s dětmi. Určete, zda jsou NV *X*,*Y* nezávislé.