Soubor příkladů k zápočtu

1. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot dokažte následující výrokovou formuli:
$$\neg(x \implies y) \iff (x \wedge \neg y)$$

2. Utvořte negaci následujícího výroku a rozhodněte o její pravdivosti:
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \ (3 < \delta \implies 6 < \varepsilon)$$

3. Utvořte negaci následujícího výroku a rozhodněte o její pravdivosti:
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \ (3 < \varepsilon\delta)$$

4. Určete množinu pomocí její charakteristické vlastnosti:
$$M = \{1, 9, 25, 49, 81\}$$

5. Určete výčtem prvků:
$$M = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 = 49\}$$

6. Zjednodušte:
$$\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$$

7. Uveďte komplexní číslo z v algebraickém tvaru:
$$z = \frac{-1+7i}{2+i} - (5+2i)(3-2i)$$

8. Uveďte komplexní číslo z v algebraickém tvaru:
$$z = \frac{7+3i}{1-i} - \frac{1}{2}(10-4i)(3-2i)$$

9. Uveďte komplexní číslo z v algebraickém nebo goniometrickém tvaru:
$$z = (-1+3i)^4$$

10. Uveďte v goniometrickém i algebraickém tvaru všechna komplexní čísla z, pro která platí:
$$z = (-\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{4}}$$

11. Zjednodušte zadaný algebraický výraz a určete jeho definiční obor:

$$\frac{x^2-3x-40}{x^2+x-12}\cdot\frac{x-3}{x-8}:\frac{x+5}{x+4}$$

12. Zjednodušte zadaný algebraický výraz a určete jeho definiční obor:

$$\frac{2\sqrt[3]{x^2}3\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}$$

13. Rozhodněte, zda je funkce $f(x)=\frac{x^4-6x^2}{x}$ sudá, lichá či periodická.

14. Rozhodněte, zda je funkce $f\colon\ y=\cos^3 x+x^6$ sudá, resp. lichá (zdůvodněte).

15. Funkce $f\colon y=\sin 2x$ je na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$
a) rostoucí, b) klesající, c) není monotonní.

16. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\frac{\ln(x+3)}{x^2-2x-3}$.

17. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\sqrt{9-x^2}$.

18. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\log(\cos x)$.

19. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\log(\sin x)$.

20. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\sqrt{(2x-1)(x+3)}$.

21. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\sqrt{\cos x}$.

22. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\sqrt{\log(\cos x)}$.

23. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\sqrt{\operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

24. Určete definiční obor funkce $f\colon\ y=\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2 x}$.

25. Načrtněte graf zadané funkce:

$$f(x)=|x|-2|x+1|-x$$

26. Nakreslete grafy funkcí
a) $f\colon\ y=|x^2+x-2|$,
b) $f\colon\ y=(x-1)^5+3$.

27. Načrtněte graf zadané funkce:

$$f(x) = 2x - 2 - x^2$$

28. Načrtněte graf zadané funkce:

$$f(x) = \frac{5x-2}{x+3}$$

29. Nakreslete graf funkce $f\colon\ y = |x+1| + 2$.

30. Určete pro jaká komplexní čísla a, b platí následující rovnost:

$$\left(1 + \frac{a}{1-a}\right) \cdot \frac{1-a^2}{1+b} \cdot \frac{1-b^2}{a-a^2} = \frac{(1+a)(1-b)}{a(1-a)}. \qquad [a \neq 1, b \neq -1]$$

31. Určete pro jaká komplexní čísla x platí následující rovnost:

$$\frac{x^2-3x-40}{x^2+x-12} \cdot \frac{x-3}{x-8} : \frac{x+5}{x+4} = 1\,.$$

32. Určete pro jaká komplexní čísla a platí následující rovnost:

$$\frac{\frac{a^2+1}{a-1} - a}{\frac{a^2-1}{a^2+1} - 1} \cdot \left(1 - \frac{2}{1+\frac{1}{a}}\right) = \frac{a^2+1}{2}\,.$$

33. Určete pro jaká komplexní čísla x, y platí následující rovnost:

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \cdot \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right] = \frac{xy^2}{x-y}\,.$$

34. Nechť a, x jsou reálná čísla. Upravte na zlomek bez záporných mocnitelů:

$$\frac{2^{-3}a^{-1}}{3^{-2}x^{-4}}\,.$$

35. Určete pro jaká reálná čísla a, b, c platí následující rovnost:

$$\frac{5^2a^{-3}b^4c^{-2}}{5a^{-2}b^5c^{-2}} = \frac{5}{ab}\,.$$

36. Vypočtěte

$$\left(6\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - 5\sqrt[3]{36} + 9\sqrt[3]{\frac{16}{81}}\right) \cdot \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,.$$

37. Určete pro jaká reálná čísla a platí následující rovnost:

$$\frac{2\sqrt[3]{a^2}3\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}} = 6\sqrt[12]{a^{11}}.$$

38. Určete pro jaká reálná čísla a, b platí následující rovnost:

$$\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b}} = a+\sqrt{a^2-b}.$$

39. Zjednodušte $\left(\dfrac{2a}{a+2}+\dfrac{6a}{6-3a}+\dfrac{8a}{a^2-4}\right):\dfrac{a-4}{a-2}.$

40. Určete pro jaká reálná čísla x platí následující rovnost:

$$\frac{\sqrt{2x-x^2-1}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \sqrt{\frac{2x-x^2-1}{(x-1)^2}}.$$

41. Rozložte na součin: x^4+x^2+1.

42. Rozložte na součin: $8x^2-2x-3$.

43. Doplňte na čtverec: $3x^2-6x+11$.

44. Proveďte dělení $(6x^4-x^3-6x^2+1):\,(3x^2-2x+1)$.

45. Vypočtěte $(2x^6-9x^4+4x^3+8x^2-7x+4) : (x^4-3x^2+2x-1)$.

46. Mezi čísla 1 a 25 vložte čísla tak, aby dohromady tvořila aritmetickou posloupnost a aby součet všech těchto čísel byl 117. Určete tato čísla a diferenci d.

47. Vyřešte rovnici $\quad 12\cdot 3^{2x+3}+5\cdot 3^{2x+4}=81.$

48. Vyřešte rovnici $\quad \log_{10}(x-1)^2=0.$

49. Určete množinu všech řešení následující rovnice:

$$\log(x-2)+\log 8 = \log(x+1)+\log(x-1)$$

50. Vyřešte exponenciální rovnici

$$2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2\cdot 4^{x-1}=0$$

51. Vyřešte logaritmickou rovnici

$$\log\sqrt{x-5}+\log\sqrt{2x-3}+1=\log 30$$

52. Určete množinu všech řešení následující rovnice:

$$\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$$

53. Vyřešte nerovnici $\frac{x-6}{x-4}>0.$

54. Vyřešte nerovnici $\cos x\leq 1.$

55. Určete množinu všech reálných řešení následující nerovnice:

$$|x|+|x-3|>10$$

56. Určete množinu všech řešení následující nerovnice:

$$3^{2x+7}-27^{x-1}<0$$

57. Vyřešte nerovnici $\log_5(2x-3)>\log_5(x+1).$

58. Vyřešte nerovnici $\log_{\frac{1}{5}}(2x-3)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1).$

59. Vyřešte nerovnici $\log_3\frac{x-3}{x+3}>0.$

60. Vyřešte nerovnici $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-3}{x+3}>0.$

61. Vyřešte nerovnici $3^{2x+7}-27^{x-1}<0.$

62. Vyřešte nerovnici $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-3}-\left(\frac{1}{9}\right)^{4x+2}\geq 0.$

63. Vyřešte nerovnici $6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-3}-5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-2}\leq 5^{x-3}.$

Nechť f je libovolná nekonstantní funkce. Vyberte z nabízených možností právě jednu tak, aby bylo tvrzení pravdivé.

64. Grafy funkcí $f\colon\ y=f(x)$ a $g\colon\ y=f(-x)$ jsou $\left\{\begin{array}{l}\text{souměrné podle počátku}\\ \text{souměrné podle osy } y\end{array}\right\}.$

65. Graf liché funkce je $\left\{\begin{array}{l}\text{souměrný podle počátku}\\ \text{souměrný podle osy } x\\ \text{souměrný podle osy } y\end{array}\right\}.$

66. Grafy funkcí $f\colon\ y=f(x)$ a $g\colon\ y=|f(x)|$ jsou totožné, je-li $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ sudá funkce} \\ D(f) = \langle 0,\infty) \\ H(f) = \langle 0,\infty) \end{array} \right\}$.

67. Grafy funkcí $f\colon\ y=f(x)$ a $g\colon\ y=-f(-x)$ jsou $\left\{ \begin{array}{l} \text{souměrné podle počátku} \\ \text{souměrné podle osy } y \end{array} \right\}$.

68. Je-li funkce $f\colon\ y=f(x)$ rostoucí, pak je funkce $g\colon\ y=-f(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{array} \right\}$.

69. Je-li funkce $f\colon\ y=f(x)$ lichá, pak funkce $g\colon\ y=-f(x)$ je $\left\{ \begin{array}{l} \text{lichá} \\ \text{sudá} \\ \text{není lichá ani sudá} \end{array} \right\}$.