Př. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2y + 2y^3 + x^2 + 5y^2$

f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má spojité parciální derivace všech řádů. Lokální extrémy mohou být tedy pouze ve stacionárních bodech.

$$f'_x = 2xy + 2x = 0$$
$$f'_y = x^2 + 6y^2 + 10y = 0$$

$$xy + x = 0$$
$$x(y+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad y = -1$$

pro $x=0$: $\quad 6y^2 + 10y = 0$

$$y(3y+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad [0,0], \qquad y = -\tfrac{5}{3} \quad [0,-\tfrac{5}{3}]$$

pro $y=-1$: $\quad x^2 + 6 - 10 = 0$

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad [2,-1], \qquad x = -2 \quad [-2,-1]$$

Máme 4 stacionární body.

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 12y+10 \end{vmatrix}$$

$J(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 20 > 0$ $\quad f''_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow$ ostré lok. min v $[0,0]$

$J(0,-\tfrac{5}{3}) = \begin{vmatrix} -\tfrac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} > 0$ $\quad f''_{xx}(0,-\tfrac{5}{3}) = -\tfrac{4}{3} < 0 \Rightarrow$ ostré lok. max v $[0,-\tfrac{5}{3}]$

$J(2,-1) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} < 0$ $\quad$ není extrém

$J(-2,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} < 0$ $\quad$ není extrém.

Př. Lokální extrémy $f(x,y) = x^4 + y^4$

f je spojitá v $\mathbb{R}^2$, má spojité parc. derivace všech řádů $\Rightarrow$ extrém může být pouze ve stac. bodě.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 4x^3 = 0 \\ f'_y = 4y^3 = 0 \end{array}\right\} \text{ stac. bod } [0,0].$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

$J(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ nemůžeme rozhodnout

Jinak: $\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) > 0 \quad \text{pro } \forall (x,y) \in O(0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $[0,0]$ ostré lok. min

Př. $f(x,y) = x^3 + y^3$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 3x^2 = 0 \\ f'_y = 3y^2 = 0 \end{array}\right\} \text{ stac. bod } [0,0]$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}$$

$J(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$ nemůžeme rozhodnout.

Jinak: $f(0,0) = 0$

$f(x,0) = x^3 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x,0) > 0 \quad \text{pro } x > 0 \\ f(x,0) < 0 \quad \text{pro } x < 0 \end{array}$

V libovolně malém $O(0,0)$ jsou větší i menší funkční hodnoty než $f(0,0)$. Tedy v bodě $[0,0]$ není extrém.

(Př) Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Funkce je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parc. derivace všech řádů. Lokální extrémy tedy mohou být pouze ve stacionárních bodech.

$$f'_x = 3x^2 - 3y = 0$$
$$f'_y = 3y^2 - 3x = 0$$

(1): $y = x^2$

(2): $3y^2 - 3x = 0$

$$y^2 - x = 0$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad [0,0]$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \quad [1,1]$

Máme 2 stacionární body: $[0,0]$, $[1,1]$.

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$ v bodě $[0,0]$ není extrém

$$J(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$$ extrém nastává

$f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$

$\Rightarrow$ v bodě $[1,1]$ je ostré lok. minimum

Najdete lokálni extrémy $f(x,y) = 4-(x-2)^2-(y+3)^2$

$$f(x,y) = 4-(x^2-4x+4)-(y^2+6y+9)$$
$$= 4-x^2+4x-4-y^2-6y-9$$
$$f(x,y) = -x^2+4x-y^2-6y-9$$

$$f'_x = -2x+4 = 0$$
$$f'_y = -2y-6 = 0$$

$x=2,\ y=-3 \quad [2,-3]$

$$f''_{xx} = -2$$
$$f''_{xy} = 0$$
$$f''_{yy} = -2$$

$J = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow$ v bodě $[2,-3]$ je extrém, lok. max