

## Matematická analýza I.

Varianta: AAA

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

---

(1) Vypočtěte limitu:

$$\lim (\sqrt{n^3 + 3n} - \sqrt{n^3 - 3n}).$$

(2) Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x^3)}{\sin(5x^3)}.$$

(3) Najděte všechny lokální extrémy a určete intervaly ryzí monotonie funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 3x^2 e^{2x}.$$

(4) Určete rovnici tečny grafu funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin(2x)$$

sestrojené v bodě  $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ .

(5) Vypočtěte (pomocí určitého integrálu) obsah plochy

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \wedge y \leq \frac{1}{x} \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 2\}.$$

(6) Doplňte definici:

*Řekneme, že posloupnost  $(a_n)$  má limitu  $+\infty$ , platí-li: ...*

(7) Z následujících tvrzení jsou právě dvě pravdivá. Která?

a)  $f$  je rostoucí na  $(0, 1) \Rightarrow f'(x) > 0$  pro každé  $x \in (0, 1)$ .

b) Posloupnost  $a_n \stackrel{\text{def.}}{=} 15 - (1 + \frac{1}{n})^n$  je omezená.

c)  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in (-1, 1) \Rightarrow f$  je ryze konvexní na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

d)  $f'(x) < 0 \Rightarrow f$  má v bodě  $x$  ostré lokální maximum.

e)  $f''(x) = 0 \Rightarrow f$  má v bodě  $x$  inflexi.

Matematická analýza I.

Varianta: AA

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

---

(1) Vypočtete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^7 - 3x^3 - 12x^2 + 3\sin(x^3)).$$

(2) Vypočtete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x^3)}{\sin(5x^3)}.$$

(3) Najděte všechny lokální extrémy a určete intervaly ryzí monotonie funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2006 + x \ln x.$$

(4) Určete rovnici tečny grafu funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin(2x)$$

sestrojené v bodě  $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ .

(5) Vypočtete (pomocí určitého integrálu) obsah plochy

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \wedge y \leq \frac{1}{x} \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 2\}.$$

(6) Doplňte definici:

*Řekneme, že posloupnost  $(a_n)$  má limitu  $a \in \mathbb{R}$ , platí-li: ...*

(7) Z následujících tvrzení jsou právě dvě pravdivá. Která?

a)  $f'(x) < 0 \Rightarrow f$  má v bodě  $x$  ostré lokální maximum.

b)  $f''(x) = 0 \Rightarrow f$  má v bodě  $x$  inflexi.

c)  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in (-1, 1) \Rightarrow f$  je ryze konvexní na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

d)  $f$  je rostoucí na  $(0, 1) \Rightarrow f'(x) > 0$  pro každé  $x \in (0, 1)$ .

e) Posloupnost  $a_n \stackrel{\text{def.}}{=} 5 - (1 + \frac{1}{n})^n$  je omezená.

## Matematická analýza I.

Varianta: XYZŽ

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

---

- (1) Vyšetřete intervaly ryzí monotonie funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{4 - x^2}{2x + 5}.$$

- (2) Najděte všechny asymptoty (grafu) funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{4 - x^2}{2x + 5}.$$

- (3) Vypočtěte limitu:

$$\lim \left( \sqrt{5n^2 + 3n - 1} - \sqrt{5n^2 + 2n - 3} \right).$$

- (4) Určete Taylorův polynom 3. řádu funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \cos(3x^2 + \pi)$$

v bodě  $x_0 = 0$ .

- (5) Vypočtěte

$$\int_{-2}^3 f(x) dx,$$

je-li

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 3x - 1, & x \in \langle -2, 0 \rangle, \\ 2e^x - 3, & x \in (0, 3). \end{cases}$$

- (6) Napište definici nerostoucí funkce.

- (7) Z následujících tvrzení jsou právě dvě pravdivá. Která?

a)  $f'(x) = 0 \Rightarrow f$  má lokální extrém v bodě  $x$ .

b)  $f''(x) = 0 \Rightarrow f$  má inflexi v bodě  $x$ .

c)  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in (0, 1) \Rightarrow f$  je ryze konvexní na  $(0, 1)$ .

d)  $f$  je klesající na  $(0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0$  pro každé  $x \in (0, 1)$ .

e) Posloupnost  $a_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{3 - \sin n}{n^2}$  je omezená.

Matematická analýza I.

Varianta: HH

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

---

(1) Vypočtěte limitu:

$$\lim \left( \sqrt{4n^2 - n} - 2n \right).$$

(2) Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x}}.$$

(3) Určete intervaly ryzí monotonie a najděte všechny lokální extrémny funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 5x^3 - 3x^5 + 15.$$

(4) Najděte všechny asymptoty (grafu) funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 2}.$$

(5) Vypočtěte (pomocí určitého integrálu) obsah plochy

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq \frac{1}{2x} + x^3 \wedge 1 \leq x \leq 2\}.$$

(6) Doplňte definici:

*Řekneme, že funkce  $f$  je spojitá zprava v bodě  $x$ , platí-li:*

...

(7) Z následujících tvrzení jsou právě dvě pravdivá. Která?

a) Je-li funkce periodická, nemá svislé asymptoty.

b)  $f''(x) = 0 \Rightarrow f$  má inflexi v bodě  $x$ .

c) Každá nerostoucí posloupnost má zápornou limitu.

d) Je-li  $f'(x) = 0$  a současně  $f''(x) = -3$ , má  $f$  v bodě  $x$  ostré lokální maximum.

e) Funkce  $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sin(2x)}{x^2}$  má svislou asymptotu  $x = 0$ .

Matematická analýza pro IT

Varianta: Pět

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

---

1. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x) := (x^2 + 1)e^{3x}.$$

2. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\operatorname{tg}(\pi + \pi x)}{x + 3}.$$

3. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3x + 2}{(x + 1)(2 - x)} dx.$$

4. Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce

$$f(x) = \cos(2x) + \sin^2 x$$

v bodě  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ .

5. Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 2x^2 e^x dx.$$

6. Doplňte definici:

*Řekneme, že funkce  $f$  je na intervalu  $I$  rostoucí, platí-li:*

...

7. Z následujících tvrzení jsou právě dvě pravdivá. Která?

(a)  $f''(1) > 0 \implies f$  má v bodě 1 ostré lokální minimum.

(b) Každá rostoucí posloupnost je omezená.

(c)  $f$  je rostoucí  $\implies f$  je prostá.

(d)  $f^2(0) + f^4(1) = 0 \implies f$  není klesající na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

(e)  $f$  je prostá  $\implies f$  není lichá.

Matematická analýza pro IT

Varianta: Dvacet

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

---

1. Najděte asymptotu (grafu) funkce  $f$  v  $-\infty$ , je-li

$$f(x) := \frac{2 + x^2}{3 - x}.$$

2. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x) := 3x^3 + 18x^2 - 45x + 3.$$

3. Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce

$$f(x) := \sin^2(5x)$$

v bodě  $x_0 = \pi$ .

4. Vypočtěte integrál

$$\int (5x - 2) \sin x \, dx.$$

5. Vypočtěte integrál

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx.$$

6. Doplňte definici:

*Řekneme, že funkce  $f$  je na intervalu  $(2, 3)$  neklesající, platí-li:*

...

7. Z následujících tvrzení jsou právě dvě pravdivá. Která?

- (a) Existuje nerostoucí funkce, která je prostá.
- (b)  $f'(2009) = 0 \implies f$  má v bodě 2009 lokální extrém.
- (c)  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(-1) = -3 \implies f$  není lichá.
- (d) Funkce  $f(x) := \operatorname{arccotg} x$  není omezená.
- (e) Každá spojitá funkce je diferencovatelná.