Domácí úkol 3 (4b)

1. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce

$$f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 1}$$

v dotykovém bodě $T = \left(\sqrt{2}; ?\right)$.

Řešení: Doplníme druhou souřadnici bodu T: $f\left(\sqrt{2}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, tj. $T = \left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Rovnice tečny t a normály n jdoucí bodem $T = (x_0; f(x_0))$ jsou:

$$t:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$
$$n:\ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Musíme tedy najít derivaci funkce f v bodě $x_0 = \sqrt{2}$. Pozor, derivujeme složenou funkci.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)' =$$
$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Odtud $f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Příslušné rovnice tečny a normály jsou:

$$t:\ y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \sqrt{2}\right),$$
$$n:\ y - \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right).$$

2. Derivujte funkci f a výsledek upravte, je-li

$$f(x) = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x - x^2}.$$

Řešení: Opět se procvičíme v derivování složených funkcí.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)' - \frac{1}{2}\left(2x - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x - x^2\right)' =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

3. Vypočtěte druhou derivaci funkce

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}.$$

Řešení: Do třetice je tady složená funkce. Nejprve musíme samozřejmě určit první derivaci:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}.\right)' = \sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right)' =$$

$$= \sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}} \cdot \frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}} \cdot \frac{-2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}.$$

Po zkrácení dostáváme:

$$f'(x) = \frac{1}{1-e^{2x}}.$$

Určit druhou derivaci je už hračka:

$$f''(x) = \frac{0 \cdot \left(1-e^{2x}\right) - 1 \cdot \left(-2e^{2x}\right)}{\left(1-e^{2x}\right)^2} = \frac{2e^{2x}}{\left(1-e^{2x}\right)^2}.$$

Ukážeme si i druhou možnost, jak můžeme vypočítat druhou derivaci:

$$f''(x) = -1 \cdot \left(1-e^{2x}\right)^{-2}\left(1-e^{2x}\right)' = \frac{-1}{\left(1-e^{2x}\right)^2} \cdot \left(-2e^{2x}\right) = \frac{2e^{2x}}{\left(1-e^{2x}\right)^2}.$$

4. Vypočtěte

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x.$$

Řešení: Limita, kterou máme vypočítat je typu “1^∞”. Platí totiž:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Limitu typu “1^∞” můžeme vypočítat pomocí L'Hospitalova pravidla. Platí:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x\to-\infty} x\ln\frac{x}{x+1}}.$$

Vypočteme limitu funkce v exponentu a následně aplikujeme větu o limitě složené funkce.

$$\lim_{x\to-\infty} x\ln\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{x+1}\right) = -1.$$

Dostali jsme, že

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$