Domácí úkol 2 (3b)

1. Vypočtěte limity:

   a) $\lim \left(3n - \sqrt{9n^2 - 3n + 1}\right)$,

   b) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-16n}{\sqrt[3]{8n^3+18n}}$.

   Řešení:
   a) Limitu nemůžeme počítat přímo užitím věty o limitě rozdílu posloupností, neboť dostaneme neurčitý výraz "$\infty - \infty$". Nepomůže ani vytknout n:

$$\lim \left(3n - n\sqrt{9 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) = \lim \left[n\left(3 - \sqrt{9 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)\right] =$$

$$= (\lim n) \cdot \lim \left(3 - \sqrt{9 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) = \infty \cdot \left(3 - \sqrt{9 - 0 + 0}\right) = "\infty \cdot 0".$$

   Opět je tu neurčitý výraz. Limitu vypočteme rozšířením výrazu pro n-tý člen pomocí vzorce $(a-b)(a+b)$:

$$\lim \left(3n - \sqrt{9n^2 - 3n + 1}\right) \cdot \frac{3n + \sqrt{9n^2 - 3n + 1}}{3n + \sqrt{9n^2 - 3n + 1}} = \lim \frac{9n^2 - \left(9n^2 - 3n + 1\right)}{3n + \sqrt{9n^2 - 3n + 1}} =$$

$$= \lim \frac{3n - 1}{3n + \sqrt{9n^2 - 3n + 1}} = \lim \frac{n\left(3 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(3 + \sqrt{9 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{3 - 0}{3 + \sqrt{9}} = \frac{1}{2}.$$

   b) Při výpočtu této limity vytkneme nejprve v čitateli a jmenovateli n a po zkrácení aplikujeme větu o limitě podílu posloupností:

$$\lim \frac{n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - 16\right)}{n\left(\sqrt[3]{8 + \frac{18}{n^2}}\right)} = \lim \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - 16}{\sqrt[3]{8 + \frac{18}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{0+0} - 16}{\sqrt[3]{8+0}} = -8.$$

2. Vypočtěte limity::

   a) $\lim \left(\frac{3n}{2n-1}\right)^n$;

   b) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$.

   Řešení:
   a) I zde musíme výraz v závorce nejprve upravit:

$$\lim \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2n}{2n-1}\right)^n = \lim \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n\right] = \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \lim \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n. \quad (1)$$

   Po úpravě jsme použili větu o limitě součinu posloupností. Přistoupíme k řešení jednotlivých limit. V prvním případě máme základní limitu typu $\lim q^n$. Víme, že

$$\lim q^n = +\infty, \text{ je-li } q > 1,$$

a tudíž $\lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$. V druhém případě se nabízí, že bychom nějak mohli využít základní limitu:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \text{ tj. } \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

A skutečně po rozepsání $2n = 2n - 1 + 1$ dostaneme:

$$\lim \left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n = \lim \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^1}$$
$$= \sqrt{e \cdot 1} = \sqrt{e}.$$

Využili jsme větu o limitě vybrané posloupnosti, posloupnost $\left(\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je totiž vybraná posloupnost z posloupnosti $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$, má tedy stejnou limitu. Kromě toho jsme ještě využili, že $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, je-li $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vypočetli jsem obě limity (1) a může tak příklad dokončit:

$$\lim \left(\frac{3n}{2n-1}\right)^n = \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \lim \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n = +\infty \cdot \sqrt{e} = +\infty.$$

b) Od výpočtu limit posloupností teď přistoupíme k výpočtu limity funkce. Daná funkce není spojitá v bodě $x_0 = 6$, limitu tedy nemůžeme vypočítat dosazením za x. Při výpočtu limitty budeme postupovat obdobně jako v příkladu 1a):

$$\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6} \cdot \frac{\sqrt{x-2} + 2}{\sqrt{x-2} + 2} = \lim_{x \to 6} \frac{(x-2) - 4}{(x-6)\left(\sqrt{x-2} + 2\right)} = \lim_{x \to 6} \frac{1}{\sqrt{x-2} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Po úpravě jsme dostali funkci, která se na prstencovém okolí bodu $x_0 = 6$ rovná naší funkci a je navíc v bodě $x_0 = 6$ spojitá. Limitu jsme pak mohli vypočítat přímo dosazením za x.

3. Určete, ve kterých bodech nejsou dané funkce spojité, a je-li to možné, dodefinujte je tak, aby byly spojité v celém $\mathbb{R}$.

   a) $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^3 - 1}$,

   b) $g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)}$.

Řešení: Připomeňme si nejprve, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

a) Definiční obor funkce $Df = \langle -3; +\infty) \setminus \{1\}$. Funkci nelze dodefinovat tak, aby byla spojitá v celém $\mathbb{R}$. Tím příklad končí. Nicméně pokusme se ji spojitě dodefinovat v bodě $x_0 = 1$. Podívejme se, má-li v tomto bodě vlastní limitu:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^3 - 1} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+3}}{2 + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \to 1} \frac{4 - (x+3)}{(x-1)(x^2 + x + 1)\left(2 + \sqrt{x+3}\right)} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{(x-1)(x^2 + x + 1)\left(2 + \sqrt{x+3}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x^2 + x + 1)\left(2 + \sqrt{x+3}\right)} = -\frac{1}{12}.$$

Funkce má v bodě $x_0 = 1$ vlastní limitu a může zde být spojitě dodefinována:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1}, & x \in \langle -3; +\infty) \setminus \{1\} \\ -\frac{1}{12}, & x = 1 \end{cases}.$$

b) Funkce g není definována v bodech, ve kterých $\cos(2x) = 0$, tj. v bodech

$$2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Položíme $k = 0$ a vypočítáme $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} g(x)$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x + \sin x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

V bodě $x = \frac{\pi}{4}$ bychom mohli funkci spojitě dodefinovat. Podívejme se, půjde-li to také i v bodě $x = \frac{3\pi}{4}$. Nechť tedy $k = 1$:

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)} = \left[\frac{\sqrt{2}}{0}\right]. \tag{2}$$

V tomto případě je limita funkce v čitateli rovna $\sqrt{2}$ a limita funkce ve jmenovateli se rovná 0. Hodnota limity (2) v absolutní hodnotě roste nade všechny meze. Je tedy zřejmé, že funkci g nelze spojitě dodefinovat tak, aby byla spojitá v celém $\mathbb{R}$. Pro úplnost určíme obě jednostranné limity:

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}+} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}+} (\sin x - \cos x) \cdot \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}+} \frac{1}{\cos(2x)} = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{0+}\right] = +\infty.$$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}-} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}-} (\sin x - \cos x) \cdot \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}-} \frac{1}{\cos(2x)} = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{0-}\right] = \text{-}\infty.$$

Limita funkce g v bodě $\frac{3\pi}{4}$ neexistuje, limity zleva a zprava se nerovnají.