Domácí úkol 1 (3b)

1. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{18-2x^2}}{\ln(x^2-2x)} + \frac{1}{x}.$$

Řešení:
Funkci f tvoří funkce $f_1(x) = \sqrt{18-2x^2}$, $f_2(x) = \ln\left(x^2-2x\right)$ a $f_3(x) = \frac{1}{x}$. Definiční obor funkce druhá odmocnina $D_{\sqrt{}} = \langle 0; +\infty)$, definiční obor funkce přirozený logaritmus $D_{\ln} = \mathbb{R}^+$. Definiční obor třetí funkce $Df_3 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Musíme tedy určit definiční obory Df_1 a Df_2 prvních dvou funkcí:

$$18 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow x \in \langle -3; 3\rangle,$$
$$x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \wedge x > 2) \vee (x < 0 \wedge x < 2)] \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

Zjistili jsme, že $Df_1 = \langle -3; 3\rangle$, $Df_2 = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Nyní můžeme přistoupit k určení definičního oboru funkce f. Pozor, nestačí najít průnik jednotlivých definičních oborů, nesmíme ještě zapomenout, že funkce $f_2(x) = \ln\left(x^2-2x\right)$ je ve jmenovateli a tedy

$$\ln\left(x^2-2x\right) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \pm \sqrt{2}.$$

Odtud pak dostáváme: $Df = (Df_1 \cap Df_2 \cap Df_3) \setminus \left\{1 \pm \sqrt{2}\right\}$, tj.

$$Df = (\langle -3; 0) \cup (2; 3\rangle) \setminus \left\{1 \pm \sqrt{2}\right\}.$$

2. Řešte:

a) $\cos(2x) + \cos x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0,\ x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

Řešení:
a) Vyjdeme ze vzorce pro kosinus dvojnásobného argumentu a základní goniometrické identity: $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Platí:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$$
$$\text{substituce: } u = \cos x$$
$$2u^2 + u - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2u-1)(u+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) \geq 0. \tag{1}$$

Danou nerovnici jsme převedli na kvadratickou nerovnici. Dále jsme využili, že kvadratický mnohočlen $au^2 + bu + c$ s kladným diskriminantem můžeme rozložit na součin:

$$a(u-u_1)(u-u_2),$$

kde u_1, u_2 jsou kořeny daného polynomu. Tím jsme nerovnici upravili na tvar (1). Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
&(2\cos x - 1)(\cos x + 1) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\, &(2\cos x - 1 \geq 0 \wedge \cos x + 1 \geq 0) \vee (2\cos x - 1 \leq 0 \wedge \cos x + 1 \leq 0) \\
\Leftrightarrow\, &\left(\cos x \geq \frac{1}{2} \wedge \cos x \geq -1\right) \vee \left(\cos x \leq \frac{1}{2} \wedge \cos x \leq -1\right) \\
\Leftrightarrow\, &\left(\cos x \geq \frac{1}{2}\right) \vee (\cos x \leq -1)\,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

První nerovnost (2) splňují všechna $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$, druhou nerovnost pak splňují všechna $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Řešením nerovnice je tedy množina

$$\left(\cup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle\right) \cup \{(2k+1)\,\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

b) Rovnici

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

můžeme za předpokladu, že $\cos x \neq 0$ (tj. $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$) převést na rovnici

$$\tan x = -\sqrt{3}.$$

Víme, že $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ a že funkce tangens je záporná ve II. a IV. kvadrantu. Odtud dostaneme: $x = \pi - \frac{\pi}{3}$ respektive $x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$. Rovnice má tedy v intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ řešení

$$x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}.$$

3. K funkci

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2$$

najděte funkci inverzní f^{-1} a určete její definiční obor.

Řešení:

Funkce f je funkce složená. Vnitřní funkce f_1: $u = \frac{1}{x}$ i vnější funkce f_2: $y = e^u$ jsou prosté, tzn. i výsledná funkce je prostá. Inverzní funkce tedy existuje. Platí

$$Hf_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow Hf_2 = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Rightarrow Hf = (2; +\infty) \setminus \{3\}\,.$$

Víme, že $Df^{-1} = Hf$, tzn. $Df^{-1} = (2; +\infty) \setminus \{3\}$. Inverzní funkci najdeme užitím algoritmu:

$$\forall y \in Df^{-1} :\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Odtud

$$\forall y \in (2; +\infty) \setminus \{3\} :\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} + 2 = y \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = y - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln(y-2)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(y-2)}.$$

Teď už stačí jenom zaměnit proměnné x a y. Hledaná inverzní funkce je:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(x-2)},\ x \in (2; +\infty) \setminus \{3\}\,.$$