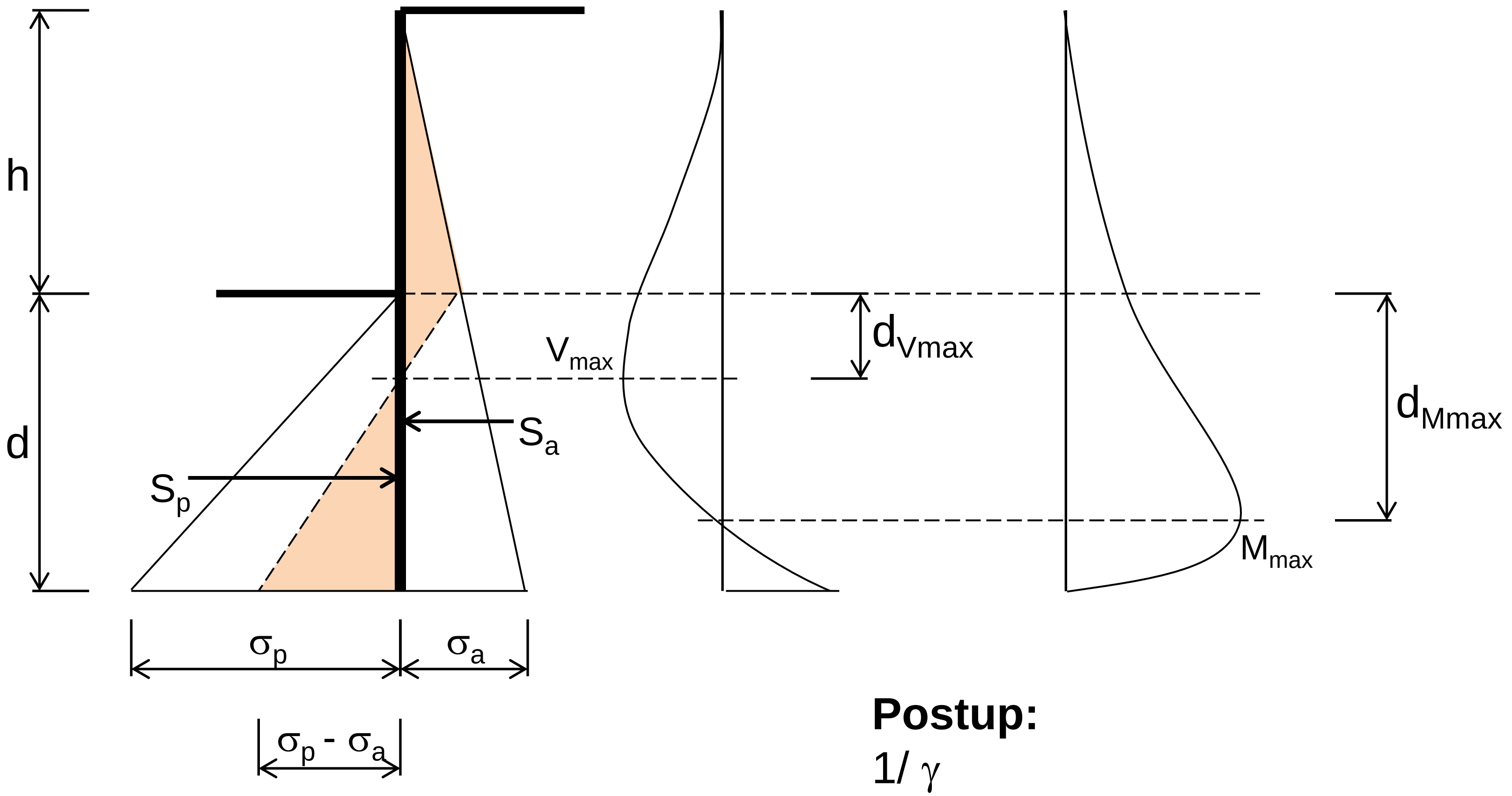
Nerozepřená štětová stěna

Schéma zatížení a průběh vnitřních sil



Postup:

1/ γ

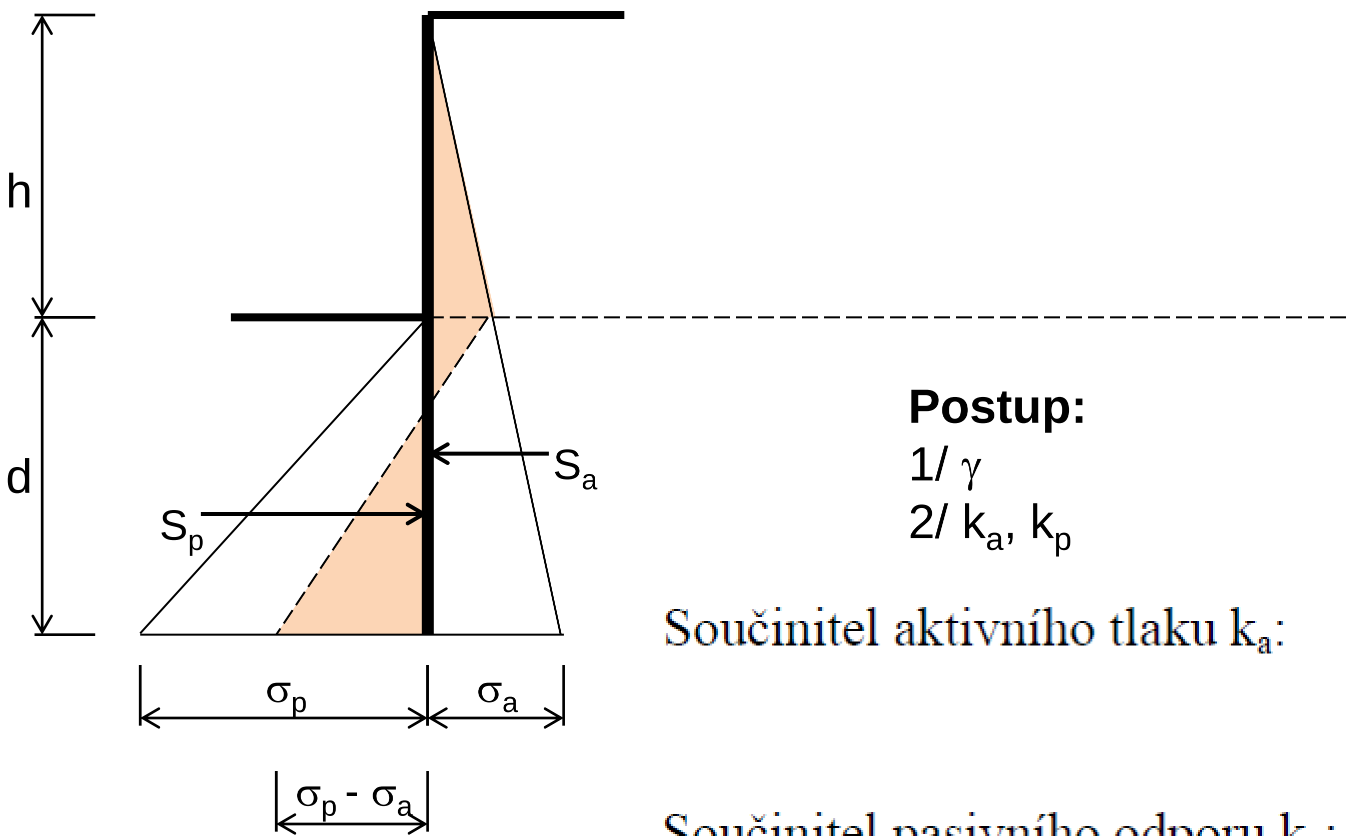
2/ k_a, k_p

3/ určení d_{Vmax}; V_{max} **$\Sigma\sigma=0$**

4/ určení d_{Mmax}; M_{max} **$\Sigma S=0$**

5/ určení d **$\Sigma M_s=0$**

Určení objemových tíh a k_a a k_p



Postup:
1/ γ
2/ k_a, k_p

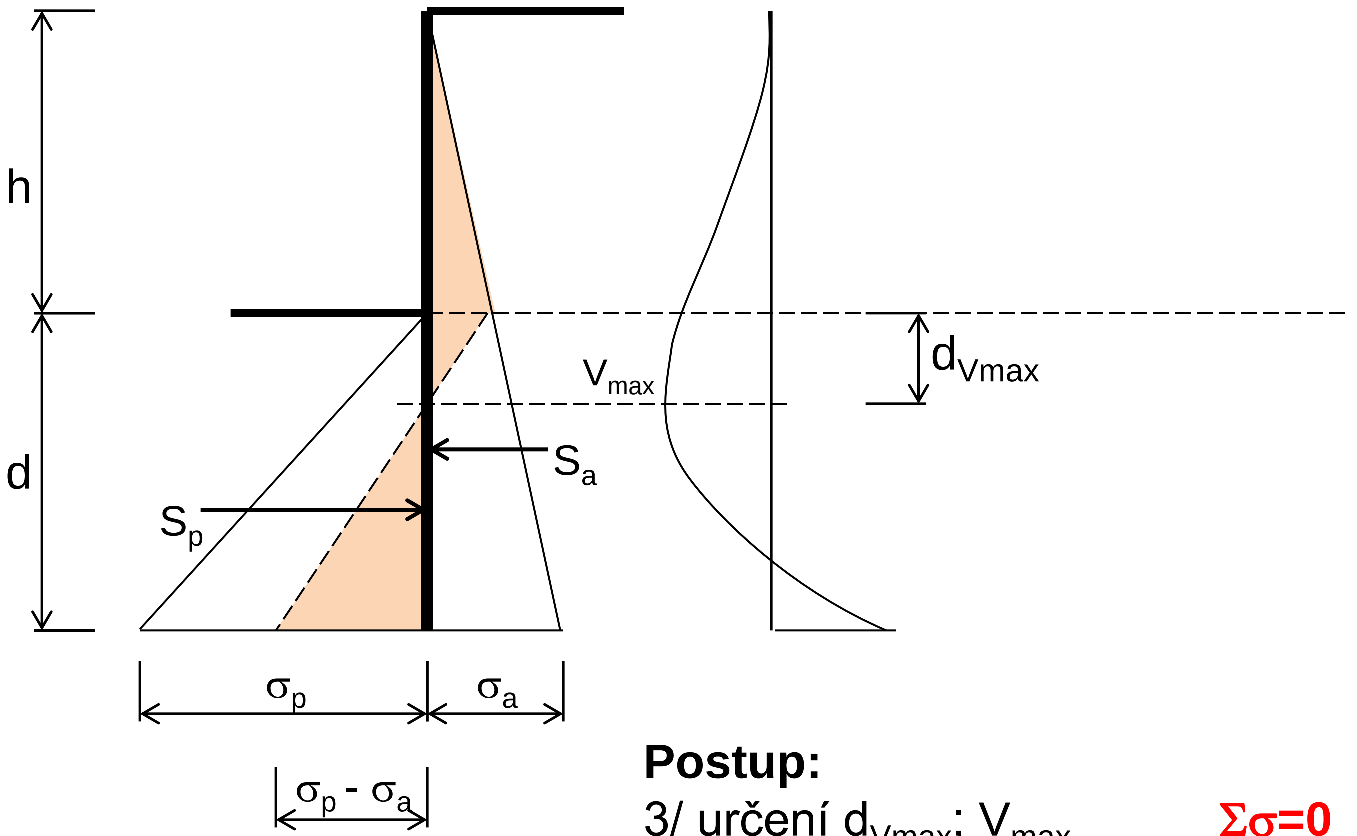
Součinitel aktivního tlaku k_a:

$$k_a = tg^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Součinitel pasivního odporu k_p:

$$k_p = tg^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Určení polohy a velikosti maximální posouvající síly



Postup:

3/ určení d_{Vmax}; V_{max}

Σσ=0

$$\sigma_a - \sigma_p = 0$$

Poloha maximální posouvající síly

$$\sigma_a - \sigma_p = 0$$

$$\sigma_a = \sigma_p$$

$$(h + d_{Vmax})\gamma . K_a = d_{Vmax} . \gamma . K_p$$

$$h . K_a + d_{Vmax} . K_a = d_{Vmax} . K_p$$

$$d_{Vmax} . K_a - d_{Vmax} . K_p = h . K_a$$

$$d_{Vmax}\left(K_a - K_p\right) = h . K_a$$

$$\boldsymbol{d_{Vmax} = \frac{h . K_a}{K_a - K_p}}$$

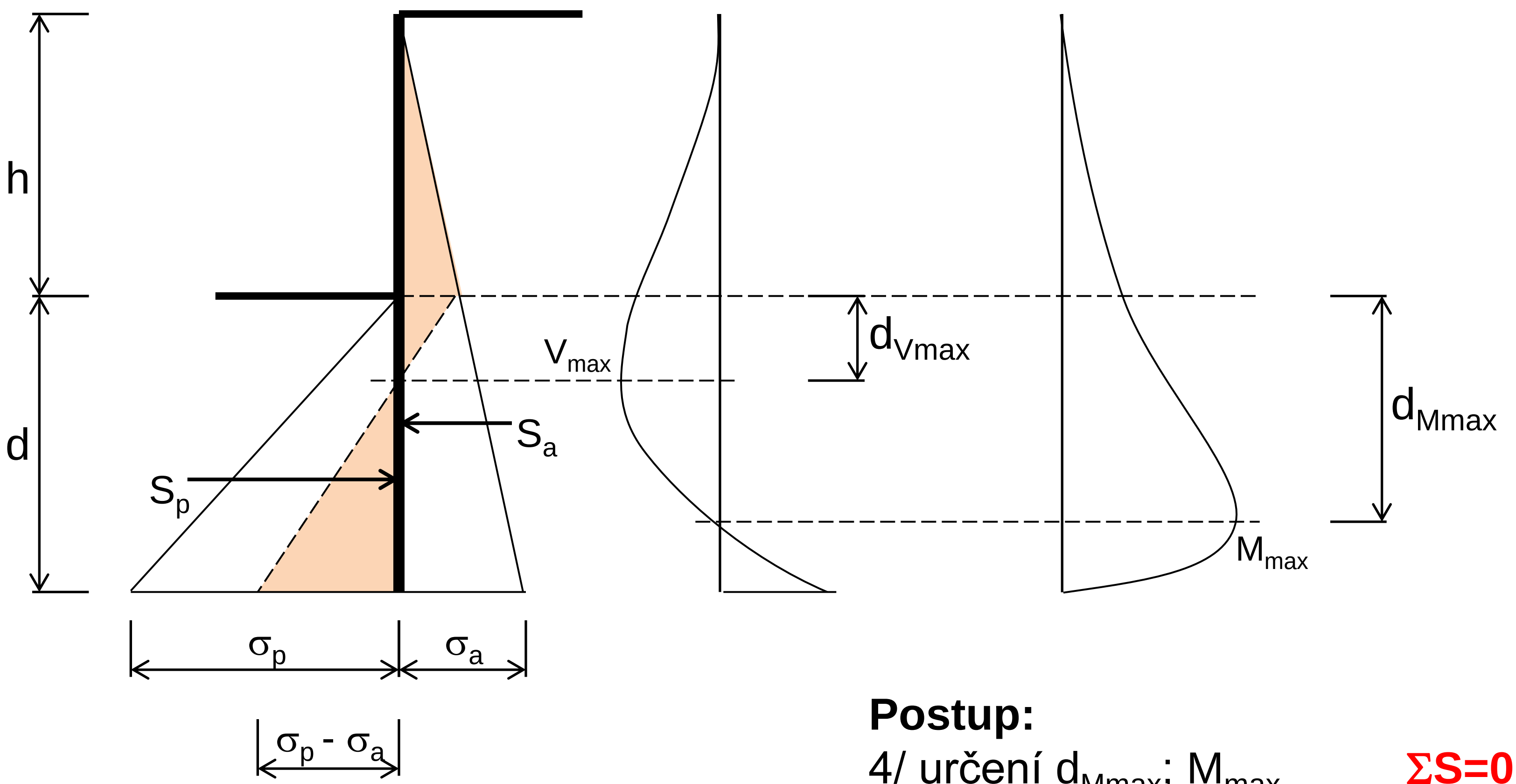
Maximální posouvající síly

$$V_{max} = S_a - S_p$$

$$V_{max} = \frac{1}{2}(h + d_{Vmax})\sigma_a - \frac{1}{2}d_{Vmax}\sigma_p$$

$$\boldsymbol{V_{max} = \frac{1}{2}(h + d_{Vmax})^2 K_a.\gamma - \frac{1}{2}d_{Vmax}{}^2 K_p.\gamma}$$

Určení polohy a velikosti maximálního ohybového momentu



Postup:

4/ určení d_{Mmax}; M_{max} **$\Sigma S=0$**

Poloha nulové posouvající síly a maximálního ohybového momentu

$$S_a - S_p = 0$$

$$S_a = S_p$$

$$\frac{1}{2}(h + d_{Mmax})\sigma_a = \frac{1}{2} d_{Mmax}\sigma_p$$

$$\frac{1}{2}(h + d_{Mmax})^2.\gamma.K_a = \frac{1}{2} d_{Mmax}{}^2.\gamma.K_p$$

$$(h + d_{Mmax})^2.K_a = d_{Mmax}{}^2.K_p$$

$$h^2.K_a + 2.h.d_{Mmax}. + d_{Mmax}{}^2.K_a = d_{Mmax}{}^2.K_p$$

$$\boldsymbol{h^2.K_a + 2.h.d_{Mmax}. + d_{Mmax}{}^2.(K_a - K_p) = 0}$$

$$\boldsymbol{d_{Mmax}} = ?$$

Maximální moment

$$M_{max} = S_a.\frac{1}{3}(h + d_{Mmax}) - S_p.\frac{1}{3}d_{Mmax}$$

$$M_{max} = \frac{1}{2}(h + d_{Mmax})\sigma_a.\frac{1}{3}(h + d_{Mmax}) - \frac{1}{2}d_{Mmax}\sigma_p.\frac{1}{3}d_{Mmax}$$

$$M_{max} = \frac{1}{2}(h + d_{Mmax}).(h + d_{Mmax}).\gamma.K_a.\frac{1}{3}(h + d_{Mmax}) - \frac{1}{2}d_{Mmax}.d_{Mmax}.\gamma.K_p.\frac{1}{3}d_{Mmax}$$

$$\boldsymbol{M_{max} = \frac{1}{6}(h + d_{Mmax})^3.\gamma.K_a - \frac{1}{6}d_{Mmax}{}^3.\gamma.K_p}$$

Určení hloubky vetknutí

$$\sum M_s = 0$$

$$-S_a.\frac{1}{3}(h+d) + S_p\frac{1}{3}d = 0$$

$$-\frac{1}{2}(h+d).(h+d).\gamma.K_a.\frac{1}{3}(h+d) + d.\gamma.K_p.\frac{1}{2}d\frac{1}{3}d = 0$$

$$-\frac{1}{6}(h+d)^3.\gamma.K_a + \frac{1}{6}d^3\gamma.K_p = 0$$

$$-(h+d)^3.K_a + d^3.K_p = 0$$

Jak řešit kubickou rovnici ☺

Cardanovy vzorce VIZ. WIKIPEDIA

Postup

[editova

Rovnici nejprve převedeme na tvar

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Substitucí $x = t - a/3$ odstraníme kvadratický člen, dostaneme rovnici

$$t^3 + pt + q = 0, \quad \text{kde} \quad p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{a} \quad q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}. \qquad (2)$$

Tuto rovnici můžeme řešit díky Thomasi Harriotovi (1560-1621) substitucí $t = y - \frac{p}{3y}$ a vynásobením obou stran y^3, po mnoha pokráceních dostaneme $y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, kterou jednoduše vyřešíme.

My ale popíšeme originální Cardanovu metodu, která stále dominuje v dnešních učebnicích.

Předpokládejme, že lze nalézt dvě neznámé *u* a *v* splňující

$$t = u + v$$

Tento výraz dosadíme do původní rovnice a po roznásobení dostaneme :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \ (3)$$

Genialita Cardanova řešení spočívá v zavedení podmínky

$$3uv + p = 0.$$

To je možné, protože jsme zavedli dvě neznámé *u* a *v* spojené jen podmínkou u + v = t. Substitucí tohoto do první rovnice v (3) dostaneme

$$-u^3 + \frac{p^3}{27u^3} = q.$$

Přesuneme všechno na *q* stranu, vynásobíme rovnost u^3 a dostaneme

$$u^6 + qu^3 - p^3/27 = 0\,.$$

Toto je kvadratická rovnice pro u^3. Pokud budeme řešit tuto rovnici, zjistíme, že

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (4)$$

Protože $t = v + u$, $t = x + a/3$, a $v = -p/3u$, dostaneme

$$x = -\frac{p}{3u} + u - \frac{a}{3}.$$

Všimněte si, že máme šest možností počítání s *u* (4), protože existují dvě řešení, díky druhé odmocnině ($\pm$), a tři komplexní řešení třetí odmocniny - hlavní odmocnina a hlavní odmocnina vynásobená $\frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nicméně znaménko druhé odmocniny (plus nebo mínus) neovlivní výsledné *t* (zřejmě -p/3u=v), ačkoli musíme být opatrní ve dvou zvláštních případech, abychom se vyhnuli dělení nulou. Za prvé, pokud *p* = 0, pak u = 0 a

$$v = -\sqrt[3]{q}.$$

Za druhé, pokud *p* = *q* = 0, pak dostáváme trojnásobný reálný kořen t=0. Taky pokud q=0, pak

$u = \sqrt{p/3}$ a

$v = -\sqrt{p/3}$, takže třetí odmocniny jsou t=u+v=0,

$t = ju - p/3ju = \sqrt{-p}$ a

$t = u/j - jp/3u = -\sqrt{-p}$, kde

$j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Shrnutí

Pro kubickou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

řešení pro neznámou *x* dostaneme jako

$$x = -\frac{p}{3u} + u - \frac{a}{3}$$

kde

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$
$$q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$$
$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Alternativní metoda získání stejných výsledků je následující.

Víme, že $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ nebo $\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Ale protože u a v musí splňovat $-u^3 - v^3 = q$ a $-uv = \frac{p}{3}$ můžeme dokázat, že pokud

$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ pak $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Vypsáním třetích odmocnin dostaneme

$$u = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{cases} \quad a \quad v = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{cases}$$

Nezapomeňte, že díky $t = u + v$ dostaneme jenom tři možné hodnoty t, protože jsou možné jen tři kombinace u a v, pokud $-uv = \frac{p}{3}$ musí platit, takže -

$$t = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{cases}$$

a x dostaneme jako $x = t - \frac{a}{3}$