# Lineární algebra s Matlabem

Přednáška 6

Katedra
aplikované matematiky

# Řešení soustav lineárních rovnic

- $LDM^T$ rozklad
  - Pro obecné čtvercové regulární matice
  - L dolní trojúhelníková s 1 na diagonále, D diagonální, M dolní trojúhelníková s 1 na diagonále

```
for j = 1:n
    Solve L(1:j, 1:j)v(1:j) = A(1:j, j) for v(1:j).
    for i = 1:j − 1
        M(j, i) = v(i)/d(i)
    end
    d(j) = v(j)
    L(j + 1:n, j) =
        (A(j + 1:n, j) − L(j + 1:n, 1:j − 1)v(1:j − 1)) /v(j)
end
```

# Řešení soustav lineárních rovnic

- $LDL^T$ rozklad
  - Pro obecné čtvercové regulární matice
  - L dolní trojúhelníková s 1 na diagonále, D diagonální

```
for j = 1:n
      for i = 1:j − 1
            v(i) = L(j, i)d(i)
      end
      v(j) = A(j, j) − L(j, 1:j − 1)v(1:j − 1)
      d(j) = v(j)
      L(j + 1:n, j) =
            (A(j + 1:n, j) − L(j + 1:n, 1:j − 1)v(1:j − 1))/v(j)
end
```

# Řešení soustav lineárních rovnic

- Choleského rozklad
  - Pro symetrické, pozitivně definitní matice

**Algorithm 23.1. Cholesky Factorization**

$R = A$

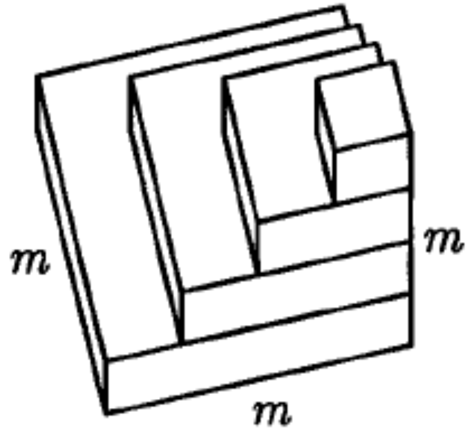
**for** $k = 1$ **to** $m$

  **for** $j = k + 1$ **to** $m$

    $R_{j,j:m} = R_{j,j:m} - R_{k,j:m} R_{kj} / R_{kk}$

  $R_{k,k:m} = R_{k,k:m} / \sqrt{R_{kk}}$

# Výpočetní náročnost




- Gaussova eliminace (LU rozklad)
  - $2/3n^3$ operací

**Algorithm 20.1. Gaussian Elimination without Pivoting**

$U = A, \ \ L = I$
**for** $k = 1$ **to** $m - 1$
  **for** $j = k + 1$ **to** $m$
    $\ell_{jk} = u_{jk} / u_{kk}$
    $u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - \ell_{jk} u_{k,k:m}$

# Výpočetní náročnost

- Gaussova eliminace (LU rozklad) s částečnou pivotizací
  - O($m^2$) (pivotizace) + 2/3$m^3$ operací

**Algorithm 21.1. Gaussian Elimination with Partial Pivoting**

$U = A,\ L = I,\ P = I$
**for** $k = 1$ **to** $m - 1$
  Select $i \geq k$ to maximize $|u_{ik}|$
  $u_{k,k:m} \leftrightarrow u_{i,k:m}$ (interchange two rows)
  $\ell_{k,1:k-1} \leftrightarrow \ell_{i,1:k-1}$
  $p_{k,:} \leftrightarrow p_{i,:}$
  **for** $j = k + 1$ **to** $m$
    $\ell_{jk} = u_{jk}/u_{kk}$
    $u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - \ell_{jk}u_{k,k:m}$

# Výpočetní náročnost

- Gaussova eliminace (LU rozklad) s úplnou pivotizací
  - O($m^3$) (pivotizace) + 2/3$m^3$ operací

**for** $k = 1{:}n-1$
  Determine $\mu$ with $k \le \mu \le n$ and $\lambda$ with $k \le \lambda \le n$ so
    $|A(\mu,\lambda)| = \max\{\, |A(i,j)| : i = k{:}n,\ j = k{:}n \,\}$
  $A(k, 1{:}n) \leftrightarrow A(\mu, 1{:}n)$
  $A(1{:}n, k) \leftrightarrow A(1{:}n, \lambda)$
  $p(k) = \mu$
  $q(k) = \lambda$
  **if** $A(k,k) \neq 0$
    $rows = k+1{:}n$
    $A(rows, k) = A(rows, k)/A(k,k)$
    $A(rows, rows) = A(rows, rows) - A(rows, k)A(k, rows)$
  **end**
**end**

# Výpočetní náročnost

- Choleského rozklad
  - $1/3m^3$ operací

**Algorithm 23.1. Cholesky Factorization**

$R = A$
**for** $k = 1$ **to** $m$
  **for** $j = k + 1$ **to** $m$
    $R_{j,j:m} = R_{j,j:m} - R_{k,j:m} R_{kj} / R_{kk}$
  $R_{k,k:m} = R_{k,k:m} / \sqrt{R_{kk}}$

# Výpočetní náročnost

- $LDM^T$
  - Vyžaduje $2/3m^3$ operací
- $LDL^T$
  - Vyžaduje $1/3m^3$ operací
- Dopředná a zpětná substituce
  - Každá vyžaduje $1/2m^2$ operací
- Inverzní matice
  - Výpočet $m^3$ operací
  - Řešení (násobení inverzní maticí) $m^2$ operací