Lineární algebra s Matlabem

Přednáška 5

Katedra
aplikované matematiky

Řešení soustav lineárních rovnic,

- **Stabilita** numerické metody
  - **Nestabilní metoda** – relativně malé chyby jednotlivých kroků se postupně akumulují až dojde ke katastrofální ztrátě přesnosti řešení
  - **Stabilní metoda** – chyba výsledků roste s počtem kroků nejvýše lineárně
- LU rozklad bez pivotizace je numericky nestabilní
  - Problém nastane u **nulového**, ale i **příliš malého pivotu**

Řešení soustav lineárních rovnic,

- LU rozklad (s pivotizací)
  - V k-tém kroce Gaussovy eliminace jsou násobky *k*-tého řádku přičteny k řádkům *k*+1 až *m*

$$
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{x_{kk}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & x_{kk} & \times & \times & \times \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times}
\end{bmatrix}
$$

Řešení soustav lineárních rovnic,

- LU rozklad (s pivotizací)
  - Stejně tak ale můžeme použít k vynulování příslušných prvků libovolný jiný řádek *i*, $k < i \le m$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \boldsymbol{x_{ik}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \boldsymbol{x_{ik}} & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}$$

  - Nebo nulovat sloupec *j* místo sloupce *k*

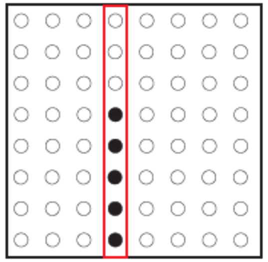
$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{x_{ij}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \boldsymbol{\times} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \boldsymbol{\times} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \boldsymbol{x_{ij}} & \times & \times \\ & \boldsymbol{\times} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}$$

Řešení soustav lineárních rovnic,

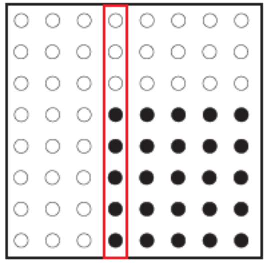
- LU rozklad (s pivotizací)
  - Volbu vhodného prvku (pivota), pomocí kterého nulujeme jiné prvky matice, nazýváme **pivotizace**
  - Teoreticky máme možnost zvolit libovolný nenulový pivot
  - Prakticky se ke zlepšení numerické stability volí největší možný pivot
  - K zajištění větší přehlednosti nebudeme pivoty nechávat na původních pozicích, ale přepermutujeme řádky a/nebo sloupce tak, aby byla zachována schodová struktura

Řešení soustav lineárních rovnic,

- LU rozklad (s pivotizací)
    - Částečná pivotizace
        - Volíme pivot v aktuálním sloupci $\mathbf{A}_k(k:n,k)$
        - Náročnost O(m^2)



- Úplná pivotizace
    - Volíme pivot v submatici $\mathbf{A}_k(k:n,k:n)$
    - Náročnost O(m^3)



Řešení soustav lineárních rovnic

- LU rozklad (s **částečnou** pivotizací)
  - Můžeme chápat jako LU rozklad bez pivotizace přepermutované matice

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

$$\underset{\text{Pivot selection}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & x_{ik} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{P_1} \underset{\text{Row interchange}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{ik} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_1} \underset{\text{Elimination}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{ik} & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}} .$$

Řešení soustav lineárních rovnic

- LU rozklad (s **částečnou** pivotizací)

$$\mathbf{A}_k(k,:) \leftrightarrow \mathbf{A}_k(p,:) \qquad |\mathbf{A}(p,k)| = \max_{i=k,\ldots,n} \{|a_{i,k}|\}$$

$$\left\{\mathbf{A}_k(k,:) \leftrightarrow \mathbf{A}_k(p,:)\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}_k$$

$$\mathbf{L}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k+1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{L}_2\mathbf{P}_2\mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{P}_{n-1}\cdots\mathbf{L}_2\mathbf{P}_2\mathbf{L}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} &= \mathbf{U} \end{aligned}$$

Řešení soustav lineárních rovnic

- LU rozklad (s **částečnou** pivotizací)

$$\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{P}_{n-1}\cdots\mathbf{L}_2\mathbf{P}_2\mathbf{L}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} \quad = \quad \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L}_3' = \mathbf{L}_3, \quad \mathbf{L}_2' = \mathbf{P}_3\mathbf{L}_2\mathbf{P}_3^{-1}, \quad \mathbf{L}_1' = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{L}_1\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_3^{-1} \qquad n = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{L}_3\mathbf{P}_3\mathbf{L}_2\mathbf{P}_2\mathbf{L}_1\mathbf{P}_1 = \mathbf{L}_3'\mathbf{L}_2'\mathbf{L}_1'\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{L}_k' = \mathbf{P}_{n-1}\cdots\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{L}_k\mathbf{P}_{k+1}^{-1}\cdots\mathbf{P}_{n-1}^{-1} \qquad \mathbf{U} = (\mathbf{L}_{n-1}'\cdots\mathbf{L}_2'\mathbf{L}_1')(\mathbf{P}_{n-1}\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)\mathbf{A},$$

$$(\mathbf{L}_{n-1}'\cdots\mathbf{L}_2'\mathbf{L}_1')^{-1}\mathbf{U} = (\mathbf{P}_{n-1}\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{LU} = \mathbf{PA}.$$

Řešení soustav lineárních rovnic

- LU rozklad (s **částečnou** pivotizací)

Algorithm 21.1. Gaussian Elimination with Partial Pivoting

$U = A,\ \ L = I,\ \ P = I$
for $k = 1$ **to** $m - 1$
    Select $i \geq k$ to maximize $|u_{ik}|$
    $u_{k,k:m} \leftrightarrow u_{i,k:m}$ (interchange two rows)
    $\ell_{k,1:k-1} \leftrightarrow \ell_{i,1:k-1}$
    $p_{k,:} \leftrightarrow p_{i,:}$
    for $j = k + 1$ **to** m
        $\ell_{jk} = u_{jk}/u_{kk}$
        $u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - \ell_{jk} u_{k,k:m}$

Řešení soustav lineárních rovnic

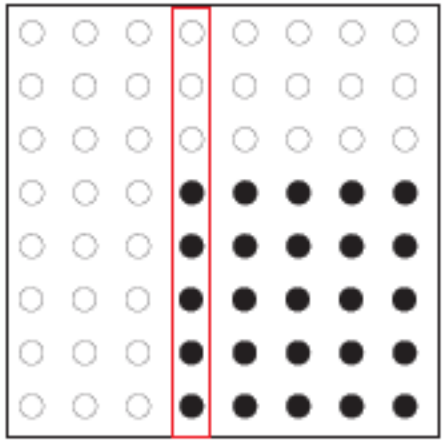
- LU rozklad (poznámka k algoritmu ve skriptech)

Algorithm 3.2.2 (Gaxpy LU) Suppose $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ has the property that $A(1{:}k, 1{:}k)$ is nonsingular for $k = 1{:}n-1$. This algorithm computes the factorization $A = LU$ where L is unit lower triangular and U is upper triangular.

Initialize L to the identity and U to the zero matrix.
for $j = 1{:}n$
    if $j = 1$
        $v = A(:, 1)$
    else
        $\tilde{a} = A(:, j)$
        Solve $L(1{:}j-1, 1{:}j-1) \cdot z = \tilde{a}(1{:}j-1)$ for $z \in \mathbb{R}^{j-1}$.
        $U(1{:}j-1, j) = z$
        $v(j{:}n) = \tilde{a}(j{:}n) - L(j{:}n, 1{:}j-1) \cdot z$
    end
    $U(j, j) = v(j)$
    $L(j+1{:}n, j) = v(j+1{:}n)/v(j)$
end

Řešení soustav lineárních rovnic

- LU rozklad (s **úplnou** pivotizací)
  - Málokdy se používá (je časově mnohem náročnější)
  - Největší pivot vybíráme ze submatice A(*j*:*n*, *j*:*n*)
  - Před každou eliminací permutujeme řádky (násobení maticí P zleva) i sloupce (násobení maticí Q zprava)
  - Odvození velmi podobné částečné pivotizaci



$$L_{m-1}P_{m-1}\cdots L_2P_2L_1P_1AQ_1Q_2\cdots Q_{m-1} = U.$$

$$(L'_{m-1}\cdots L'_2L'_1)(P_{m-1}\cdots P_2P_1)A(Q_1Q_2\cdots Q_{m-1}) = U.$$

$$L = (L'_{m-1}\cdots L'_2L'_1)^{-1} \qquad P = P_{m-1}\cdots P_2P_1 \qquad Q = Q_1Q_2\cdots Q_{m-1}$$

$$PAQ = LU.$$

Řešení soustav lineárních rovnic

- LU rozklad
  - Pivotizaci lze použít v případě řídké matice A také k přeuspořádání matice tak, aby výsledné matice L, U měly minimální zaplnění
  - Matlab funkce
    - `[L, U] = lu(sparse(A), 0)` – bez pivotizace, LU = A
    - `[L, U, P] = lu(A)` – s částečnou pivotizací, LU = PA
    - `Y = lu(A)` – uloží výsledek do jedné matice Y = U + L – I
    - `[L, U, P, Q] = lu(sparse(A))` – s pivotizací a řídkým přeuspořádáním, LU = PAQ