Lineární algebra s Matlabem – cvičení 7

Soustavy lineárních rovnic – lineární iterační řešiče

Příklad 1.

1. Mějme soustavu A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$, kde

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   a) Nalezněte přibližné řešení této soustavy pomocí tří iterací Jacobiho metody (ručně). Jako počáteční vektor volte vektor samých jedniček.

$$\boldsymbol{x}_{\text{Jacobi}} =$$

   b) Nalezněte přibližné řešení této soustavy pomocí tří iterací Gaussovy-Seidelovy metody (ručně). Počáteční vektor volte stejně.

$$\boldsymbol{x}_{\text{Gauss-Seidel}} =$$

   c) Určete přesné řešení $\boldsymbol{x}$ pomocí Matlabu (operátorem zpětného lomítka). Pomocí něj vypočtěte normy chyb a reziduí vámi nalezených řešení:

$$\|\boldsymbol{e}_{\text{Jacobi}}\| = \|\boldsymbol{x}_{\text{Jacobi}} - \boldsymbol{x}\| =$$
$$\|\boldsymbol{e}_{\text{Gauss-Seidel}}\| = \|\boldsymbol{x}_{\text{Gauss-Seidel}} - \boldsymbol{x}\| =$$
$$\|\boldsymbol{r}_{\text{Jacobi}}\| = \|\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}_{\text{Jacobi}}\| =$$
$$\|\boldsymbol{r}_{\text{Gauss-Seidel}}\| = \|\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}_{\text{Gauss-Seidel}}\| =$$

2. Naprogramujte Jacobiho iterační metodu. Na vstupu vytvořené funkce bude matice A, vektor pravé strany $\boldsymbol{b}$, relativní přesnost `tol` a maximální počet iterací. Funkce vrátí vektor řešení, skutečný počet iterací a dosaženou přesnost.
   Ukončovací podmínku volte ve tvaru relativní změny rezidua:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} < \text{tol}$$

   Můžete vyjít např. z následujícího pseudokódu:

```
Choose an initial guess x^(0) to the solution x.
for k = 1, 2, ...
    for i = 1, 2, ..., n
        x̄_i = 0
        for j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n
            x̄_i = x̄_i + a_{i,j} x_j^(k-1)
        end
        x̄_i = (b_i - x̄_i)/a_{i,i}
    end
    x^(k) = x̄
    check convergence; continue if necessary
end
```

3. Na základě zdrojového kódu pro Jacobiho metodu naprogramujte Gaussovu-Seidelovu metodu. Funkce bude mít stejné vstupní a výstupní argumenty.

Choose an initial guess $x^{(0)}$ **to the solution** x.

for $k = 1, 2, \ldots$

  for $i = 1, 2, \ldots, n$

    $\sigma = 0$

    for $j = 1, 2, \ldots, i-1$

      $\sigma = \sigma + a_{i,j} x_j^{(k)}$

    end

    for $j = i+1, \ldots, n$

      $\sigma = \sigma + a_{i,j} x_j^{(k-1)}$

    end

    $x_i^{(k)} = (b_i - \sigma)/a_{i,i}$

  end

  check convergence; continue if necessary

end

4. Pomoci vámi vytvořených metod vyřešte soustavu z příkladu 1 a určete, kolik iterací je zapotřebí k dosažení relativních přesností:

	Počet iterací	
`tol`	Jacobi	Gauss-Seidel
0,01		
0,0001		
1e-8		

Příklad 2.

1. Naprogramujte Richardsonovu iterační metodu. Na vstupu přibude parametr `omega`. Pokud nebude zadán, vypočtěte jeho optimální hodnotu z nejmenšího a největšího vlastního čísla vstupní matice (k jejich výpočtu použijte matlabovskou funkci `eigs`).
2. Metodu otestujte na systému se symetrickou pozitivně definitní maticí (např. z metody sítí nebo symetrickou diagonálně dominantní).