

Úvod do simulace dynamiky sypkých hmot

Lukáš Pospíšil

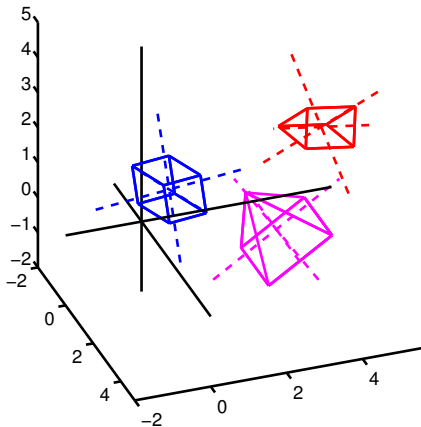
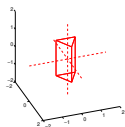
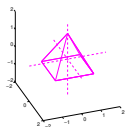
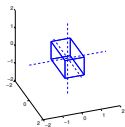
Katedra aplikované matematiky,
VŠB - Technická Univerzita Ostrava

Seminář aplikované matematiky, 1. 4. 2014

- formulace problému
 - transformace lokálních souřadnic
 - Eulerovy úhly
 - jednotkové kvaterniony rotace
 - od pozice k rychlosti
- kontaktní úlohy
 - bez tření, reformulace na QP
 - krátce o Coulombovském tření

Přednáška obsahuje 4 videa, jeden příklad a jeden důkaz.

Formulace problému



Vztah mezi lokálním a globálním systémem

$T := [T_x, T_y, T_z]^T$ - poloha těžiště v globálním souřadnicovém systému,
 ϕ, θ, ψ - Eulerovy úhly rotace.

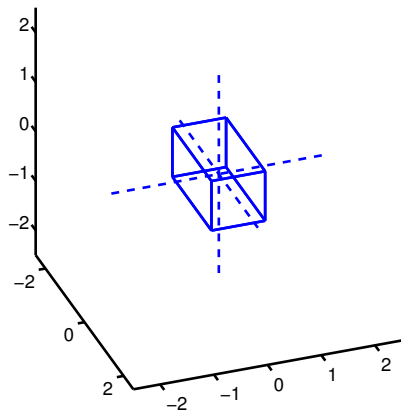
$$r_{glob} = T + Rr_{lok}$$

$r_{lok} \in \mathbb{R}^3$ souřadnice bodu v lokálním systému,

$r_{glob} \in \mathbb{R}^3$ souřadnice bodu v globálním systému.

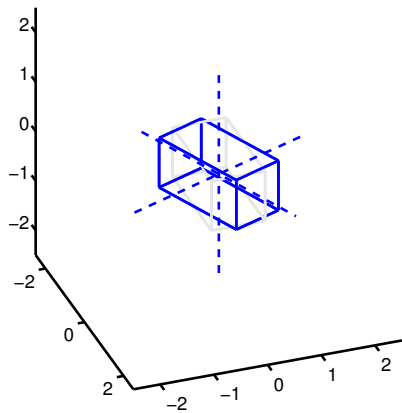
$R \in \mathbb{R}^{3,3}$ matice rotace (z ϕ, θ, ψ).

Eulerovy úhly rotace



$$r_{lok} \in \mathbb{R}^3$$

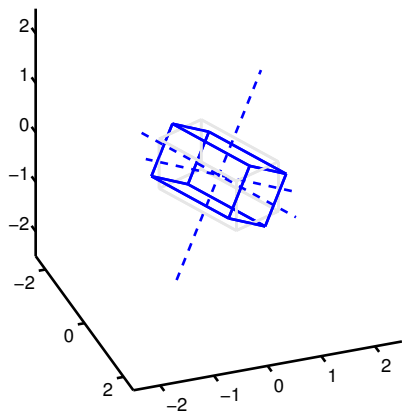
Eulerovy úhly rotace



$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 r_{lok}$

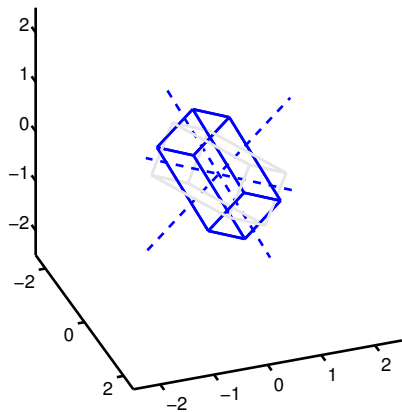
Eulerovy úhly rotace



$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$R_2 R_1 r_{lok}$

Eulerovy úhly rotace



$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 R_2 R_1 r_{lok}$

Eulerovy úhly rotace

$$r_{glob} = T + \underbrace{R_3 R_2 R_1}_{=:R} r_{lok}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \cos \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Úloha se mění v čase $(T_x(t), T_y(t), T_z(t), \phi(t), \theta(t), \psi(t))$, tj. okamžitá poloha bodu v čase $t \in \mathbb{R}^+$

$$r_{glob}(t) = T(t) + R(t)r_{lok}$$

$$r_{glob}(t) = T(t) + R(t)r_{lok}$$

Okamžitá rychlost

Okamžitou rychlost získáme derivací dle t

$$\dot{r}_{glob} = \dot{T} + \dot{R}r_{lok}$$

$$\dot{R} = ?$$

R je ortogonální, tj.

$$R^T R = I,$$

derivací

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0.$$

Úpravou

$$\begin{aligned}\dot{R}R^T &= -R\dot{R}^T \\ \dot{R}R^T &= -(\dot{R}R^T)\end{aligned}$$

\Rightarrow matice $\dot{R}R^T$ je antisymetrická.
Je to matice vektorového součinu.

Matrice vektorového součinu

Mějme $u = [u_1, u_2, u_3]^T \in \mathbb{R}^3$, $v = [v_1, v_2, v_3]^T \in \mathbb{R}^3$.

Pak

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3)i + (u_3 v_1 - u_1 v_3)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

Lze však také maticově

$$u \times v = \tilde{u}v = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

kde $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{3,3}$ je matice vektorového součinu

$$\tilde{u} := \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tato matice je antisymetrická, tj. $\tilde{u} = -\tilde{u}^T$

Označme

$$\tilde{\omega} := R^T \dot{R}.$$

Pak úpravou

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= R^T \dot{R} \\ R\tilde{\omega} &= RR^T \dot{R} \\ R\tilde{\omega} &= \dot{R}\end{aligned}$$

Dosazením

$$\begin{aligned}\dot{r}_{glob} &= \dot{T} + \dot{R}r_{lok} \\ \dot{r}_{glob} &= \dot{T} + R\tilde{\omega}r_{lok} \\ \dot{r}_{glob} &= \dot{T} + R(\dot{\omega} \times r_{lok})\end{aligned}$$

kde $\dot{\omega} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3$ je úhlová rychlost.

Motivace

$$\begin{aligned}r_{glob} &= T + Rr_{lok} \\ \dot{r}_{glob} &= \dot{T} + R(\dot{\omega} \times r_{lok})\end{aligned}$$

Vyčíslit R znamená vyčíslit goniometrické funkce.

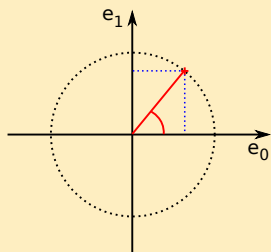
Jednotkový kvaternion rotace

$$\mathbb{R}^3 \ni [\phi, \theta, \psi] := \omega \quad \leftrightarrow \quad e := [e_0, e_1, e_2, e_3] \in \mathbb{R}^4, \quad \|e\| = 1$$

Díky této reprezentaci nebude nutno vyčíslovat goniometrické funkce.

$$[\phi] \leftrightarrow [e_0, e_1]$$

Polární souřadnice

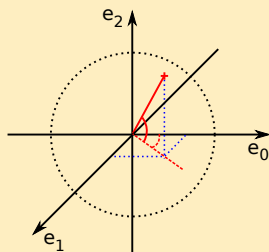


$$e_0 = \cos \phi$$
$$e_1 = \sin \phi$$

Kvaternion rotace - motivace

$$[\phi, \theta] \leftrightarrow [e_0, e_1, e_2]$$

Sférické souřadnice



$$\begin{aligned} e_0 &= \sin \phi \cos \theta \\ e_1 &= \sin \phi \sin \theta \\ e_2 &= \cos \phi \end{aligned}$$

$$[\phi, \theta, \psi] \leftrightarrow [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$$

Kvaternion rotace

$$\mathbf{e}_0 = \cos\left(\frac{1}{2}(\phi + \theta)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\psi\right)$$

$$\mathbf{e}_1 = \cos\left(\frac{1}{2}(\phi - \theta)\right) \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)$$

$$\mathbf{e}_2 = \sin\left(\frac{1}{2}(\phi - \theta)\right) \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin\left(\frac{1}{2}(\phi + \theta)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\psi\right)$$

Zaved' me matice

$$E := \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} = [-e_{123}, \check{e}_{123} + e_0 I]$$
$$G := \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} = [-e_{123}, -\check{e}_{123} + e_0 I]$$

kde

$$e_{123} = [e_1, e_2, e_3]^T, \quad e = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T = [e_0, e_{123}^T]^T$$

Platí

$$Ee = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = 0$$
$$Ge = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = 0$$

Platí

$$EE^T = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & e_0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} = I \in \mathbb{R}^3$$

(Matice E má ortonormální řádky)

$$E^T E = \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & e_0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} = I - ee^T \in \mathbb{R}^4$$

Obdobně

$$GG^T = I, \quad G^T G = I - ee^T$$

Platí (!)

$$\begin{aligned}
 EG^T &= \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2e_1e_2 - 2e_0e_3 & 2e_1e_3 + 2e_0e_2 \\ 2e_1e_2 + 2e_0e_3 & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2e_2e_3 - 2e_1e_0 \\ 2e_1e_3 - 2e_0e_2 & 2e_2e_3 + 2e_1e_0 & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \end{bmatrix} \\
 &= \dots = R
 \end{aligned}$$

Obdobně se dá ukázat

$$E\dot{G}^T = \dot{E}G^T$$

Pak

$$\dot{R} = \dot{E}G^T + E\dot{G}^T = 2E\dot{G}^T$$

Kvaterniony místo Eulerových úhlů

Pro derivaci kvaternionů platí (dá se ukázat z vlastností vektorového součinu)

$$\dot{e} = \frac{1}{2} E^T \dot{\omega}$$

Proto dále budeme popisovat polohu lokálních souřanic v globálním systému pomocí *zobecněného vektoru pozice* a *zobecněného vektoru rychlosti*

$$q_i := \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7, \quad v_i := \begin{bmatrix} \dot{T}_x \\ \dot{T}_y \\ \dot{T}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

Časové schéma

Aproximace derivace diferencí

$$\dot{q}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(t+h) - q(t)}{h} \approx \dot{q}(t) = \frac{q(t+h) - q(t)}{h} .$$

Časové schéma má pak tvar

$$q(t+h) = q(t) + h\dot{q}(t) ,$$

kde $h \in \mathbb{R}^+$ je *dostatečně malý* časový krok.

S kvaternionem rotace pak

$$q(t+h) = q(t) + h \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E^T \end{bmatrix}}_{=:Q} v(t) .$$

Dáno $q(0) \in \mathbb{R}^{7nb}$, $v(0) \in \mathbb{R}^{6nb}$.

Zvol časový krok $h > 0$

$t := 0$

dokud $t < t_{\max}$

$q(t+h) := q(t) + hQv(t)$

spočti $v(t+h)$

$t := t + h$

konec dokud

pust' animaci.

Výpočet rychlosti

Úkolem je tedy nalézt vektor aktuální rychlosti $v(t)$, jehož přírůstek oproti $v(t - h)$ je závislý na

- hmotnosti jednotlivých těles,
- působících vnějších silách $F(t, q, v)$,
- kontaktech a omezujících podmínkách.

$$M\dot{v} = F_C + F_{ext} \quad M(v(t + h) - v(t)) = h(F_{ext} + F_C),$$

kde

- M je zobecněná matice hmotnosti (diagonální),
- F_C je vektor sil vyvolaných omezením,
- F_{ext} je vektor vnějších sil.

Úpravou

$$v(t + h) = v(t) + hM^{-1}(F_{ext} + F_C)$$

$$F_g = m \cdot g, \quad m = \rho \cdot V$$

$$F_{ext} = [0, 0, -F_g, 0, 0, 0]^T$$

Dáno $q(0) \in \mathbb{R}^{7nb}$, $v(0) \in \mathbb{R}^{6nb}$.

Zvol časový krok $h > 0$

$t := 0$

dokud $t < t_{max}$

$$q(t+h) := q(t) + hQv(t)$$

$$v(t+h) := v(t) + M^{-1}(F_{ext} + F_C)$$

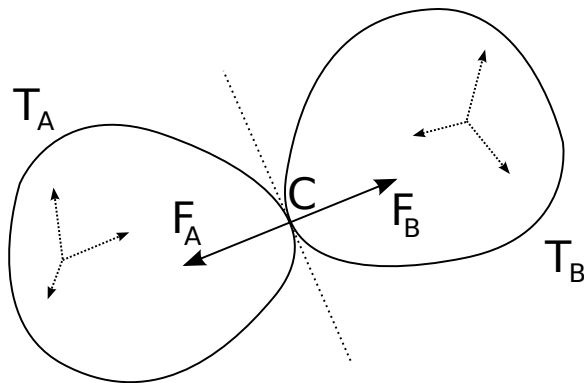
$t := t + h$

konec dokud

pusť další skvělou animaci.

Kontakt a omezení

Uvažujme kontakt mezi tělesy T_A a T_B .



Kontakt a omezení

Označme $n_A(C)$ jako vnější jednotkovou normálu tělesa T_A v bodě kontaktu C v globálním souřadnicovém systému.

Změna pozice těžiště

Těleso T_A působí na těleso T_B silou

$$F_B := \bar{\gamma} n_A(C) ,$$

kde $\bar{\gamma} \geq 0$ je neznámá velikost působící síly.

Tato síla ovlivní změnu polohy tělesa T_B (složky rychlosti tělesa odpovídající poloze těžiště).

Změna rotace tělesa

Změnu rotace tělesa T_B ovlivňuje kroutící moment

$$M_B := C^B \times F_B ,$$

kde C^B jsou souřadnice bodu C v lokálním souřadnicovém systému tělesa T_B .

Úpravou

$$M_B = C^B \times F_B = \bar{\gamma}(C^B \times n_A(C)) = \bar{\gamma}\tilde{C}^B n_A(C) .$$

Naopak na těleso T_A působí opačná síla

$$F_A := -\bar{\gamma}n_A(C) ,$$

a kroutící moment

$$M_A := C^A \times F_A = -\bar{\gamma}\tilde{C}^A n_A(C) .$$

Připomeňme

$$F_C := \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ F_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\gamma} n_A(C) \\ -\tilde{\gamma} \tilde{C}^A n_A(C) \\ \tilde{\gamma} n_A(C) \\ \tilde{\gamma} \tilde{C}^B n_A(C) \end{bmatrix} = \tilde{\gamma} D ,$$

kde

$$D := \begin{bmatrix} -n_A(C) \\ -\tilde{C}^A n_A(C) \\ n_A(C) \\ \tilde{C}^B n_A(C) \end{bmatrix} .$$

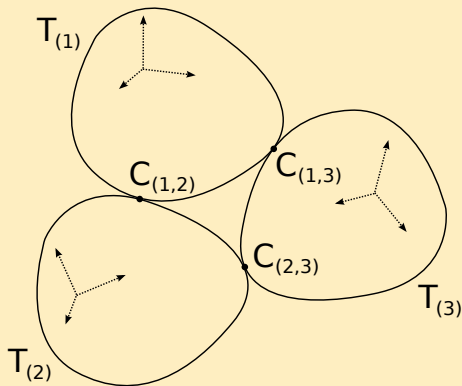
Pokud se nám podaří určit velikost působící síly $\tilde{\gamma}$, pak výslednou změnu rychlosti lze spočítat z rovnice

$$M(v(t+h) - v(t)) = hF_{\text{ext}} + D\gamma ,$$

kde $\gamma := h\tilde{\gamma}$.

Příklad

Uvažujme systém tří těles $T_{(1)}$, $T_{(2)}$, $T_{(3)}$.



- vektor zobecněné polohy $q = [q_{(1)}^T, q_{(2)}^T, q_{(3)}^T]^T \in \mathbb{R}^{3*7}$
- vektor zobecněné rychlosti $v = [v_{(1)}^T, v_{(2)}^T, v_{(3)}^T]^T \in \mathbb{R}^{3*6}$.

Hledáme velikosti šesti neznámých sil:

- síla, kterou působí těleso $T_{(1)}$ na těleso $T_{(2)}$,
- síla, kterou působí těleso $T_{(2)}$ na těleso $T_{(1)}$,
- síla, kterou působí těleso $T_{(2)}$ na těleso $T_{(3)}$,
- síla, kterou působí těleso $T_{(3)}$ na těleso $T_{(2)}$,
- síla, kterou působí těleso $T_{(1)}$ na těleso $T_{(3)}$,
- síla, kterou působí těleso $T_{(3)}$ na těleso $T_{(1)}$,

čili hledáme $\gamma = [\gamma_{(1,2)}, \gamma_{(2,1)}, \gamma_{(2,3)}, \gamma_{(3,2)}, \gamma_{(1,3)}, \gamma_{(3,1)}]^T \in \mathbb{R}^6$.

Matice $D \in \mathbb{R}^{3 \times 6, 6}$ má blokovou strukturu

$$D = \begin{bmatrix} -n_{(1)}(C_{(1,2)}) & n_{(2)}(C_{(1,2)}) & 0 \\ -\tilde{c}_{(1,2)}^{(1)} n_{(1)}(C_{(1,2)}) & \tilde{c}_{(1,2)}^{(1)} n_{(2)}(C_{(1,2)}) & 0 \\ n_{(1)}(C_{(1,2)}) & -n_{(2)}(C_{(1,2)}) & -n_{(2)}(C_{(2,3)}) \\ \tilde{c}_{(1,2)}^{(2)} n_{(1)}(C_{(1,2)}) & -\tilde{c}_{(1,2)}^{(2)} n_{(2)}(C_{(1,2)}) & -\tilde{c}_{(2,3)}^{(2)} n_{(2)}(C_{(2,3)}) \\ 0 & 0 & n_{(2)}(C_{(2,3)}) \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{(2,3)}^{(3)} n_{(2)}(C_{(2,3)}) \\ \\ 0 & -n_{(1)}(C_{(1,3)}) & n_{(3)}(C_{(1,3)}) \\ 0 & -\tilde{c}_{(1,3)}^{(1)} n_{(1)}(C_{(1,3)}) & \tilde{c}_{(1,3)}^{(1)} n_{(3)}(C_{(1,3)}) \\ n_{(3)}(C_{(2,3)}) & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{(2,3)}^{(2)} n_{(3)}(C_{(2,3)}) & 0 & 0 \\ -n_{(3)}(C_{(2,3)}) & n_{(1)}(C_{(1,3)}) & -n_{(3)}(C_{(1,3)}) \\ -\tilde{c}_{(2,3)}^{(3)} n_{(3)}(C_{(2,3)}) & \tilde{c}_{(1,3)}^{(3)} n_{(1)}(C_{(1,3)}) & -\tilde{c}_{(1,3)}^{(3)} n_{(3)}(C_{(1,3)}) \end{bmatrix}$$

Podmínku nepronikání těles T_A a T_B popisuje tzv. *gap funkce*

$$\Phi : \mathbb{R}^{7+7} \rightarrow \mathbb{R}$$

\approx "vzdálenost těles" (nejmenší vzdálenost bodů jednoho a druhého tělesa).

Platí

- $\Phi([q_A, q_B]) = 0$ pokud jsou tělesa v kontaktu,
- $\Phi([q_A, q_B]) > 0$ pokud tělesa nejsou v kontaktu,
- $\Phi([q_A, q_B]) < 0$ pokud tělesa "pronikla do sebe".

Pro normálové napětí v bodě kontaktu platí

- pokud jsou tělesa v kontaktu, normálové napětí existuje,
- pokud tělesa nejsou v kontaktu, normálové napětí neexistuje.

Získáme podmínku komplementarity a tedy užitím gap funkce lze definovat podmínky pro výpočet velikosti působících sil

$$0 \leq \Phi(q) \perp \gamma \geq 0 .$$

\Leftrightarrow (numericky stabilnější)

$$0 \leq \frac{1}{h} \Phi(q) + D^T v(t+h) \perp \gamma \geq 0 .$$

Linear complementarity problem

Úkolem je tedy řešit následující problém.

Linear complementarity problem (LCP)

$$M(v(t+h) - v(t)) = hF_{\text{ext}} + D\gamma \quad (1a)$$

$$\frac{1}{h}\Phi(q) + D^T v(t+h) \geq 0 \quad (1b)$$

$$\frac{1}{h}\Phi(q) + D^T v(t+h) \perp \gamma \quad (1c)$$

$$\gamma \geq 0 \quad (1d)$$

Ne.

Theorem

Řešení optimalizační úlohy

$$\min_{\gamma \geq 0} \frac{1}{2} \gamma^T N \gamma + r^T \gamma, \quad (2)$$

kde

$$N := D^T M^{-1} D \quad (3a)$$

$$r := \frac{1}{h} \Phi + D^T M^{-1} k \quad (3b)$$

$$k := Mv(t) + h \cdot F_{\text{ext}} \quad (3c)$$

je ekvivalentní s řešením původní úlohy (LCP).

Důkaz

Lagrangeova funkce má tvar

$$L(\gamma, \lambda) = \frac{1}{2} \gamma^T N \gamma + r^T \gamma - \lambda^T \gamma$$

a odpovídající KKT podmínky

$$N\gamma + r - \lambda = 0 \tag{4a}$$

$$\gamma \geq 0 \tag{4b}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{4c}$$

$$\gamma^T \lambda = 0 \tag{4d}$$

Podmínky (4b) a (1d) jsou stejné. Z podmínky (4a) přímo plyne

$$\lambda = N\gamma + r \tag{5}$$

a spolu s (3a),(3b),(3c) a dosazením do (4d) získáme

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma^T \lambda = \gamma^T (N\gamma + r) \\ &= \gamma^T (D^T M^{-1} D \gamma + \frac{1}{h} \Phi + D^T M^{-1} k) \\ &= \gamma^T (D^T M^{-1} D \gamma + \frac{1}{h} \Phi + D^T M^{-1} (M v(t) + h F_{\text{ext}})) \\ &= \gamma^T (\frac{1}{h} \Phi + D^T (v(t) + M^{-1} D \gamma + h M^{-1} F_{\text{ext}})) \end{aligned}$$

Následně užitím (1a) získáme

$$0 = \gamma^T \left(\frac{1}{h} \Phi + D^T(v(t) + M^{-1}D\gamma + h.M^{-1}F_{ext}) \right)$$

což je podmínka (1c).

Nakonec dosazením podmínky (5) do (4c) lze získat

$$0 \leq \lambda = N\gamma + r = \frac{1}{h} \Phi + D^T v(t + h) ,$$

což je podmínka (1b).

Dáno $q(0) \in \mathbb{R}^{7nb}$, $v(0) \in \mathbb{R}^{6nb}$.

Zvol časový krok $h > 0$

$t := 0$

dokud $t < t_{\max}$

$$q(t+h) := q(t) + hQv(t)$$

Nalezení kontakty.

Pokud neexistují kontakty, polož $\gamma := 0$

Pokud existují kontakty, sestav N, r a vyřeš optimalizační problém

$$v(t+h) := v(t) + M^{-1}(hF_{\text{ext}} + D\gamma)$$

$t := t + h$

konec dokud

Neflákej se a pusť další animaci.

Uvažujme (opět) kontakt mezi tělesy T_A a T_B .

Označme

- $n \in \mathbb{R}^3$ jednotkový normálový vektor kontaktu v globálních souřadnicích,
- $u, w \in \mathbb{R}^3$ jednotkové směrové vektory kontaktní roviny v globálních souřadnicích.

Očividně $\{n, u, w\}$ je množina ortonormálních vektorů (a tvoří bázi tečného prostoru).

Třecí sílu působící v bodě kontaktu na těleso A pak můžeme vyjádřit jako

$$F = F_n + F_T = \gamma_n n + \gamma_u u + \gamma_w w ,$$

kde

- $F_n = \gamma_n n \in \mathbb{R}^3$ je normálová složka třecí síly,
- $F_T = \gamma_u u + \gamma_w w \in \mathbb{R}^3$ je tečná složka třecí síly,
- $\gamma_n > 0$ je velikost normálové složky třecí síly F ,
- $\gamma_u, \gamma_w \in \mathbb{R}$ jsou velikosti tečných složek třecí síly F .

Vztah mezi jednotlivými složkami třecí síly popisuje například *Coulombův model tření*.

Coulombův model tření

$$\gamma_n \geq 0, \quad \Phi(\mathbf{q}) \geq 0, \quad \Phi(\mathbf{q})\gamma_n = 0, \quad (6a)$$

$$\sqrt{\gamma_u^2 + \gamma_w^2} \leq \mu\gamma_n, \quad (6b)$$

$$\|v_T\| \left(\mu\gamma_n - \sqrt{\gamma_u^2 + \gamma_w^2} \right) = 0, \quad (6c)$$

$$\langle F_T, v_T \rangle = -\|F_T\| \cdot \|v_T\|. \quad (6d)$$

Objasněme význam jednotlivých rovnic.

$$\gamma_n \geq 0, \quad \Phi(q) \geq 0, \quad \Phi(q)\gamma_n = 0$$

podmínka komplementarity *gap funkce* Φ a velikosti normálové složky γ_n

- normálová složka třecí síly je vždy nezáporná (pokud uvažujeme kontakt, pak těleso A nemůže působit na těleso B silou, která směřuje "od tělesa" B),
- hodnota gap funkce je vždy nezáporná (vzdálenost těles A a B je nezáporná),
- pokud je normálová složka nenulová, pak je nulová vzdálenost těles,
- pokud je vzdálenost těles nenulová, pak je normálová složka třecí síly nulová,
- může nastat situace, že vzdálenost těles je nulová i normálová složka třecí síly je nulová (tělesa jsou "v klidu" v kontaktu).

$$\sqrt{\gamma_u^2 + \gamma_w^2} \leq \mu \gamma_n$$

rovnice vztahu mezi velikostí normálové složky třecí síly a tečné složky třecí síly, tj.

$$\|F_T\| \leq \mu \|F_N\| ,$$

kde $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$ je koeficient tření takový, že

- pokud $\mu = 1$, pak velikost tečné složky třecí síly může být maximálně rovna velikosti normálové síly,
- pokud $\mu = 0$, pak velikost tečné složky třecí síly je vždy nulová, čili síla působí pouze ve směru normály kontaktu a tedy nedochází ke tření.

$$\|v_T\| \left(\mu \gamma_n - \sqrt{\gamma_u^2 + \gamma_w^2} \right) = 0$$

podmínka komplementarity mezi velikostí rychlosti pohybu tělesa v tečném směru a dosažení maximální možné velikosti třecí síly vzhledem k omezení předchozí rovnicí

- pokud nedojde k maximální možné velikosti třecí síly vzhledem k μ , tj. $\|F_T\| < \mu \|F_N\|$, pak velikost tečné rychlosti tělesa je nulová.
- pokud naopak dojde k maximální možné velikosti tečné síly, pak dochází k přesmyku a velikost tečné rychlosti může být jakákoliv.

$$\langle F_T, v_T \rangle = -\|F_T\| \cdot \|v_T\|$$

podmínka směru třecí síly a tečné rychlosti, konkrétně pro úhel mezi těmito vektory platí

$$\cos \varphi = \frac{\langle F_T, v_T \rangle}{\|F_T\| \cdot \|v_T\|} = -1, \quad \text{tj.} \quad \varphi = -\pi .$$

Čili tečná složka třecí síly má opačný směr jako vektor rychlosti přesmyku (kluzná rychlost).

Obdobně jako v úloze bez tření

$$\begin{aligned} F_A &:= -\gamma_n \mathbf{n} - \gamma_u \mathbf{u} - \gamma_w \mathbf{w} = -\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}, \\ F_B &:= \gamma_n \mathbf{n} + \gamma_u \mathbf{u} + \gamma_w \mathbf{w} = \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &:= [\gamma_n, \gamma_u, \gamma_w]^T \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{S} &:= [\mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] \in \mathbb{R}^{3,3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_A &:= C^A \times \bar{F}_A = -C^A \times (S\gamma) = -\tilde{C}^A S\gamma, \\
 M_B &:= C^B \times \bar{F}_B = C^B \times (S\gamma) = \tilde{C}^B S\gamma,
 \end{aligned}$$

Pak

$$F_C := \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \\ F_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S\gamma \\ -\tilde{C}^A S\gamma \\ S\gamma \\ \tilde{C}^B S\gamma \end{bmatrix} = D\gamma,$$

kde

$$D := \begin{bmatrix} -S \\ -\tilde{C}^A S \\ S \\ \tilde{C}^B S \end{bmatrix}.$$

Theorem

Řešení optimalizační úlohy

$$\min_{\gamma \geq \Omega} \frac{1}{2} \gamma^T N \gamma + r^T \gamma,$$

kde

$$N := D^T M^{-1} D \tag{7a}$$

$$r := \left[\frac{1}{h} \Phi, 0, 0 \right]^T + D^T M^{-1} k \tag{7b}$$

$$k := Mv(t) + h \cdot F_{\text{ext}} \tag{7c}$$

$$\tag{7d}$$

$$\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{nc} \tag{7e}$$

$$\Omega_i := \{ [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq \mu_i x \} \tag{7f}$$

je ekvivalentní s řešením původní úlohy.

Quadratic Cone Complementarity problem

Důkaz

Příště.

- $h = ?$
- efektivní implementace (GPU)
- detekce kontaktů
- domain decomposition (?)
- QP řešič

Děkuji za pozornost



Dostál, Z.: *Optimal Quadratic Programming Algorithms, with Applications to Variational Inequalities*, SOIA, first ed., vol. 23, Springer, US, New York, 2009.



Heyn T.: *On the Modeling, Simulation, and Visualization of Many-Body Dynamics Problems with Friction and Contact*. Ph.D. Thesis, 2013. online



Heyn T., Anitescu M., Tasora A., Negrut D.: *Using Krylov Subspace and Spectral Methods for Solving Complementarity Problems in Many-Body Contact Dynamics Simulation*. Int. J. Numer. Meth. Engng, 2012.



Shabana, A.: *Computational Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, Third Edition, 2010.



Haug, E. J.: *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Volume-I*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.