

České vysoké učení technické v Praze

Stavební fakulta

Katedra mechaniky

Fuzzy množiny, fuzzy čísla a jejich aplikace v inženýrství

Jaroslav Kruis, Petr Štemberk

Obsah

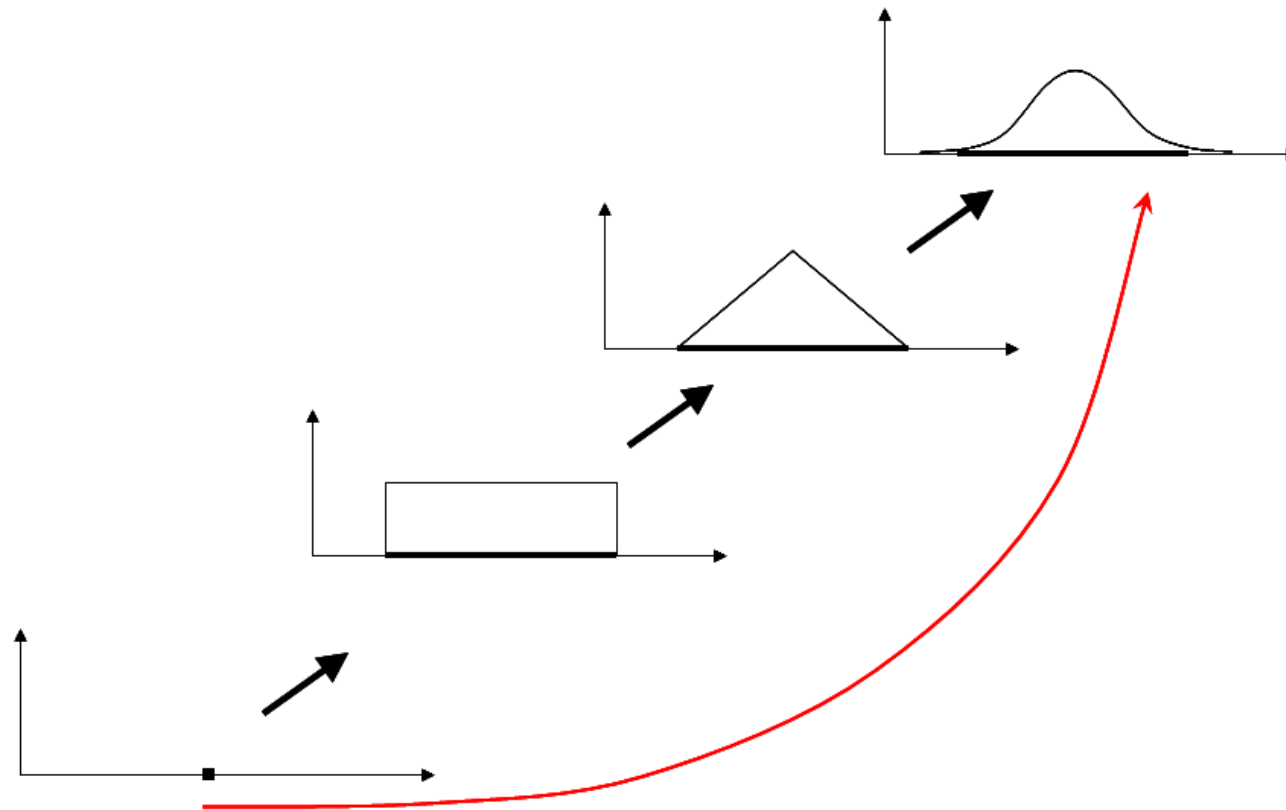
- Nejistoty
- Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika
- Teorie fuzzy množin
- Aplikace ve vybraných úlohách (kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti, vlastní kmitání rámové konstrukce, vynucené kmitání rámové konstrukce, fuzzyfikace Chenova modelu plasticity, vedení tepla stěnou)
- Paralelizace

Nejistoty

nejistota x náhodná veličina

teorie fuzzy množin není konkurent teorie pravděpodobnosti

obě teorie se mohou vhodně doplňovat



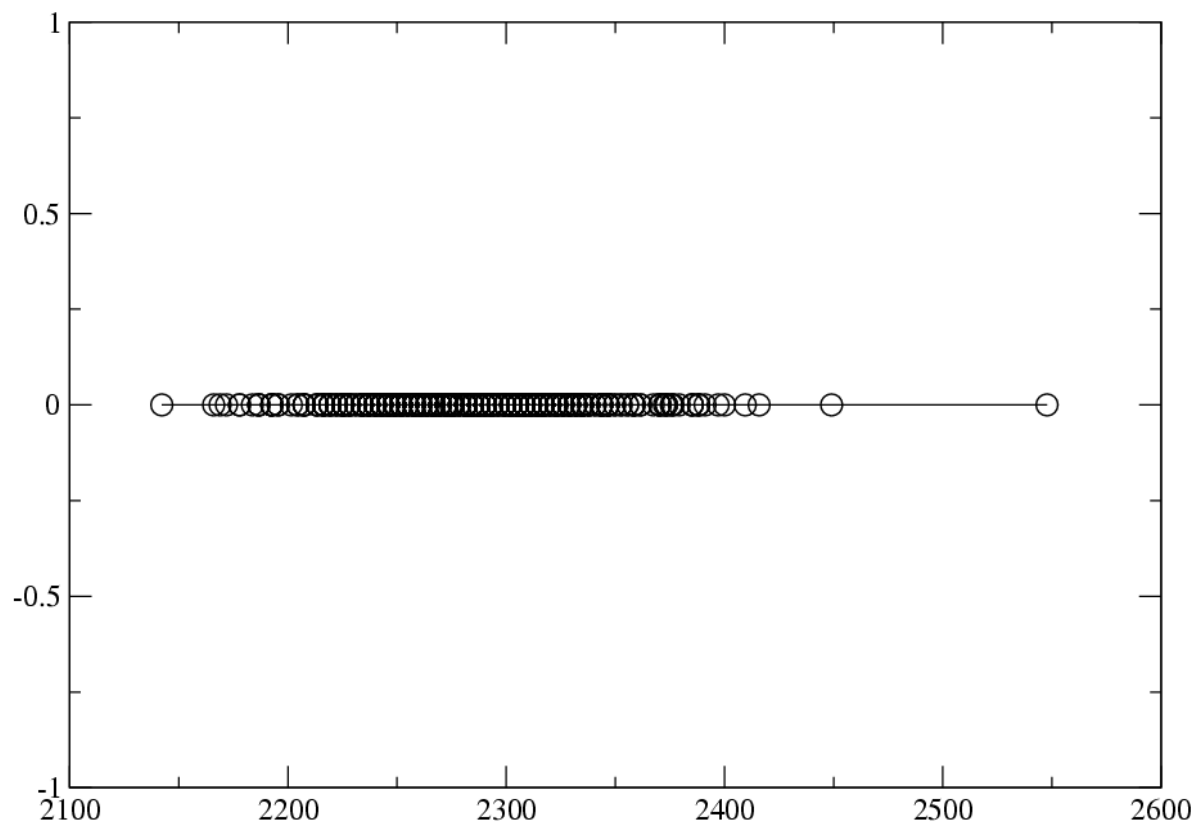
Nejistoty v mechanice

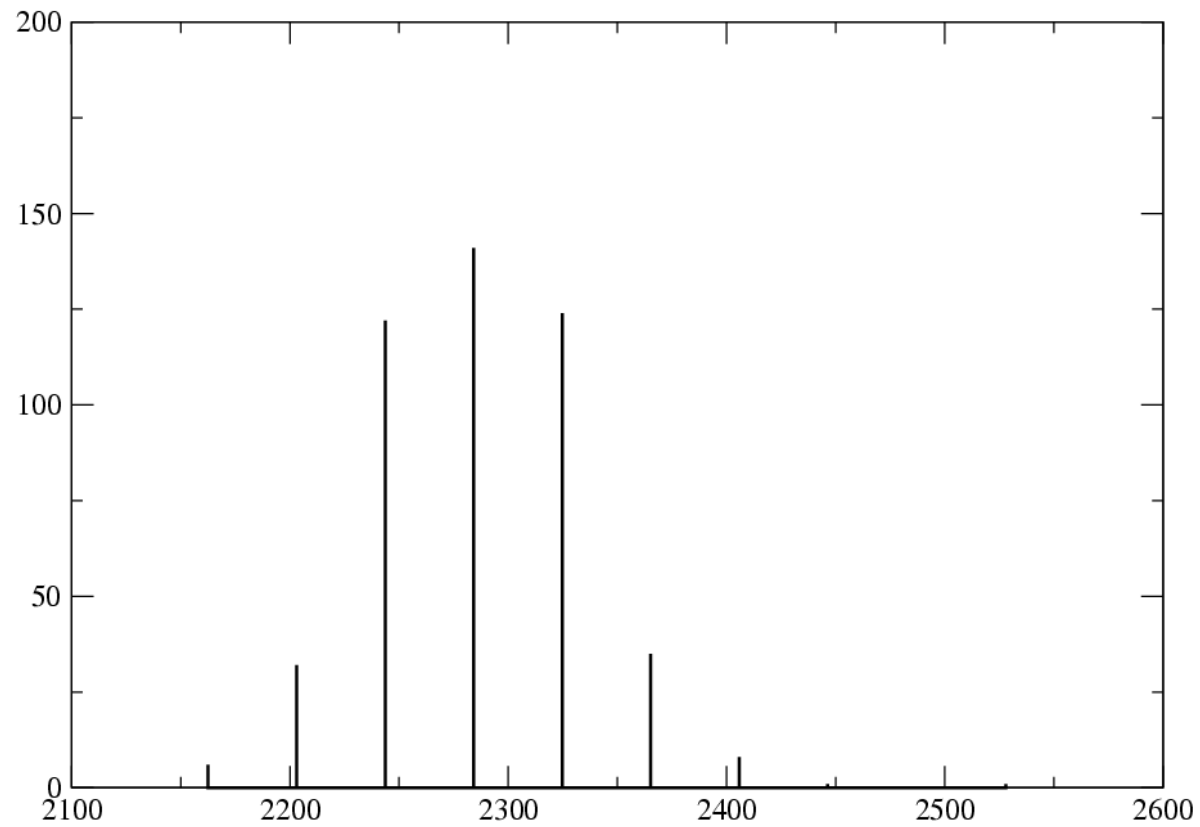
- geometrie (rozměry nosníků, tloušťky desek, rozměry těles)
- materiálové parametry (moduly pružnosti, hustoty, meze plasticity, lomová energie)
- zatížení (velikosti sil, působiště sil, orientace sil, změny v čase)

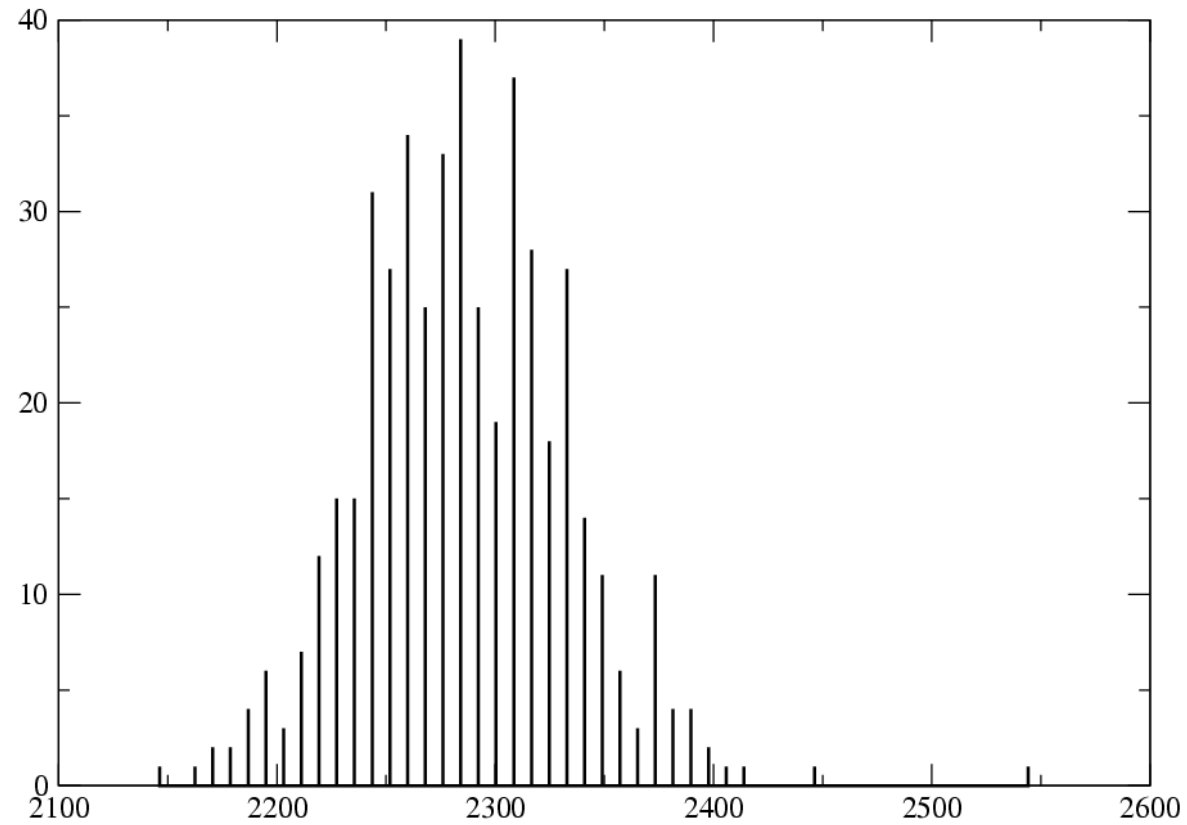
Reálná data

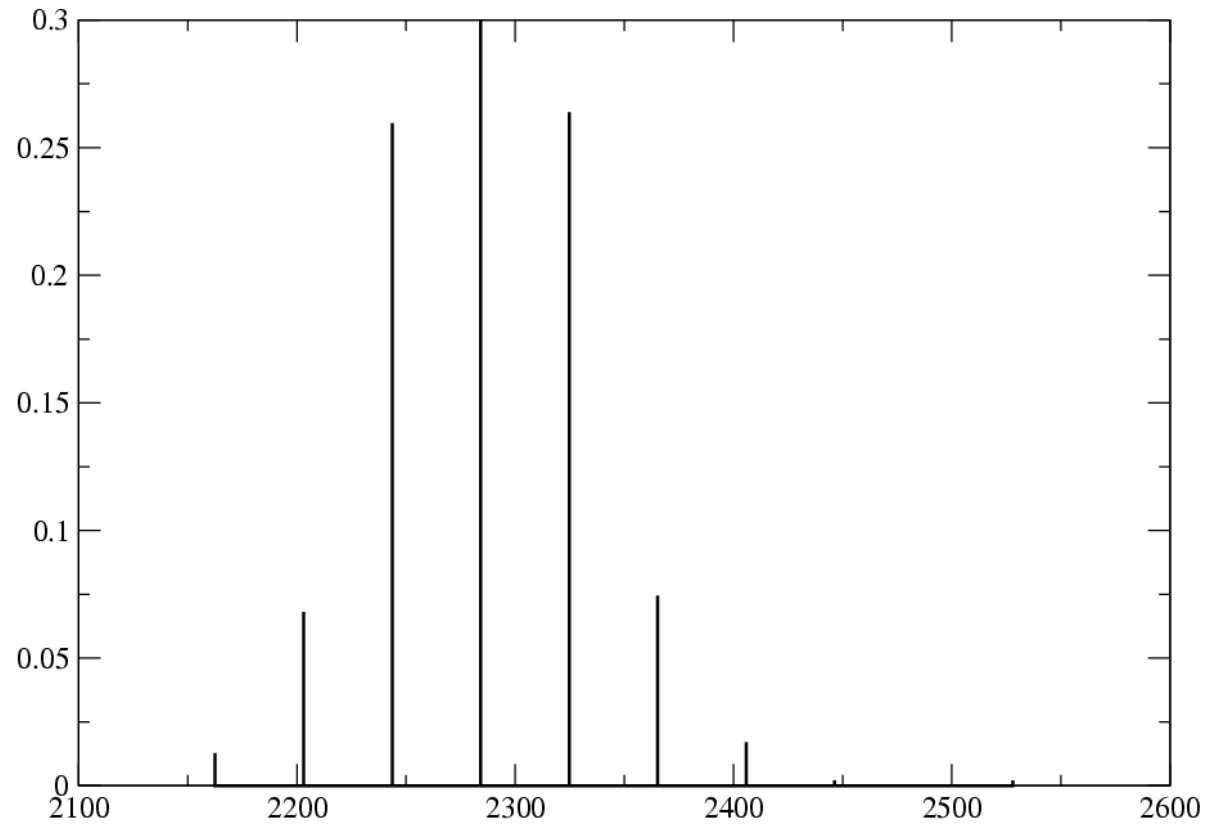
Objemové hmotnosti betonu z kontrolních měření na betonárce za jeden rok (kg/m³).

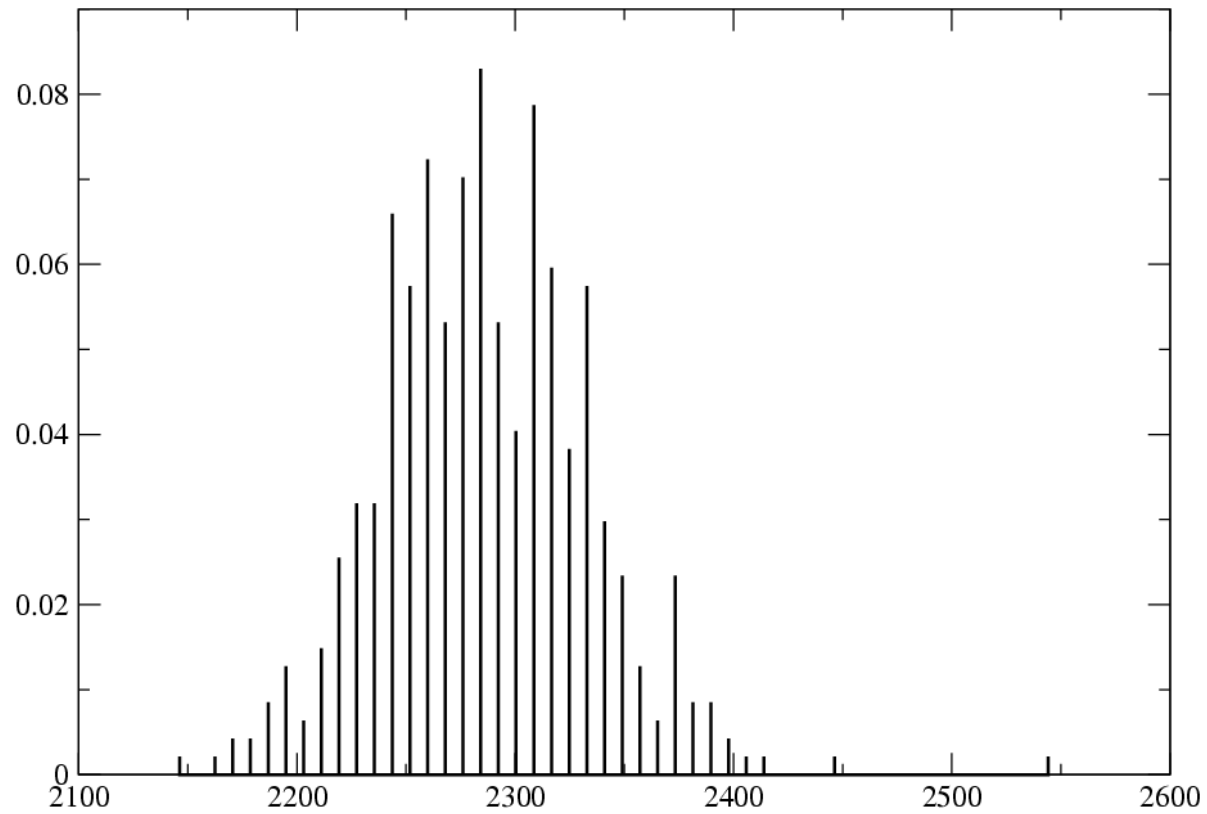
počet dat	470	465
nejmenší hodnota	2142,22	2165,59
průměrná hodnota	2285,78	2284,63
největší hodnota	2547,73	2400,00
směrodatná odchylka	48,19	45,03
median	2284,44	2281,48
modus	2332,81	2388,79

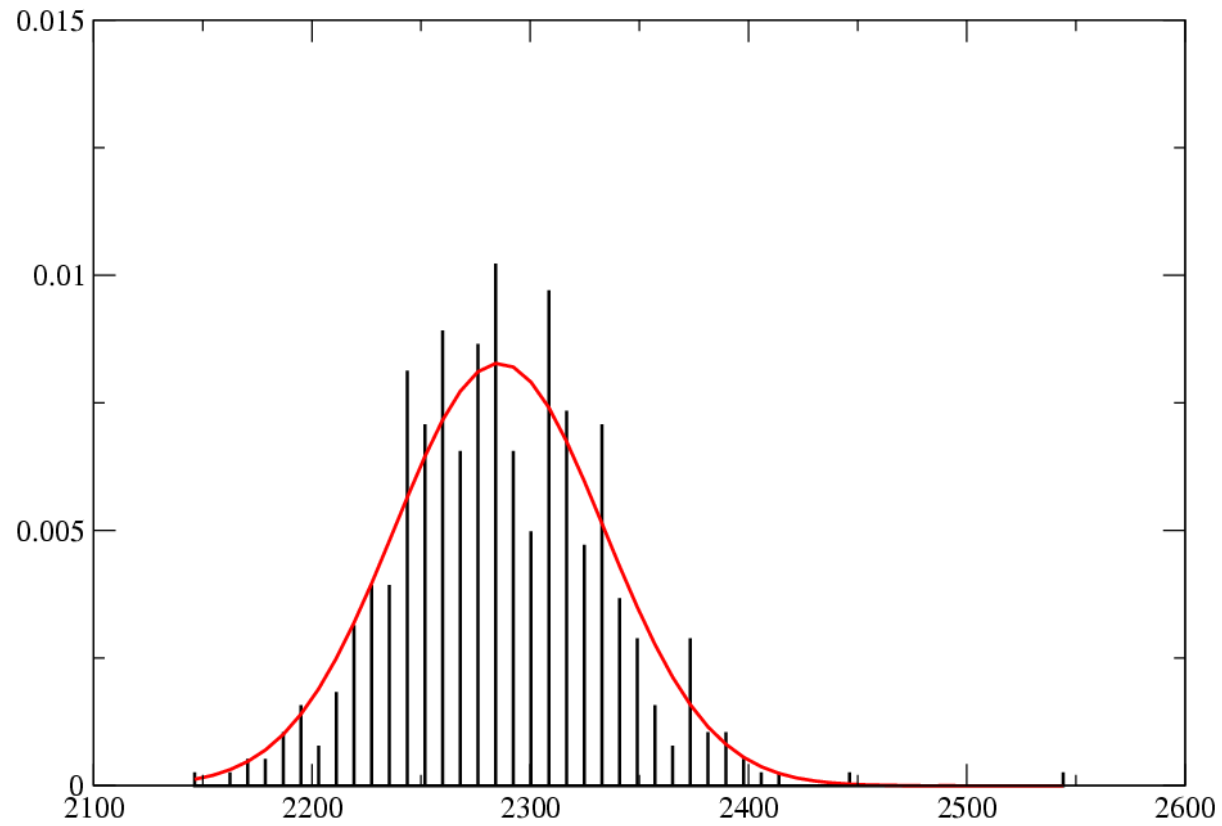












Test dobré shody - normální rozdělení

i	$n\Delta\Phi(x_i)$		$n\Delta\Phi(x_i)$
1	5,983789		5,730882
2	36,141110		17,215111
3	107,544974		39,470382
4	157,667482		69,072631
5	113,882642		92,260082
6	40,526241		94,057806
7	7,105236		73,189540
8	0,613739	< 5	43,468671
9	0,026119	< 5	19,705020
10	0,000520	< 5	6,645456

vypuštěný prvek	počet vypuštěných prvků	počet neodpovídajících intervalů	testová hodnota χ_0^2
žádný	0	3	1927,877841
2547,73	1	2	3,488365
2449,04	2	2	6,789602
2415,87	3	1	13,933338
2142,22	4	1	13,265698
2409,52	5	0	7,507428

počet stupňů volnosti $\nu = 10 - 2 - 1 = 7$

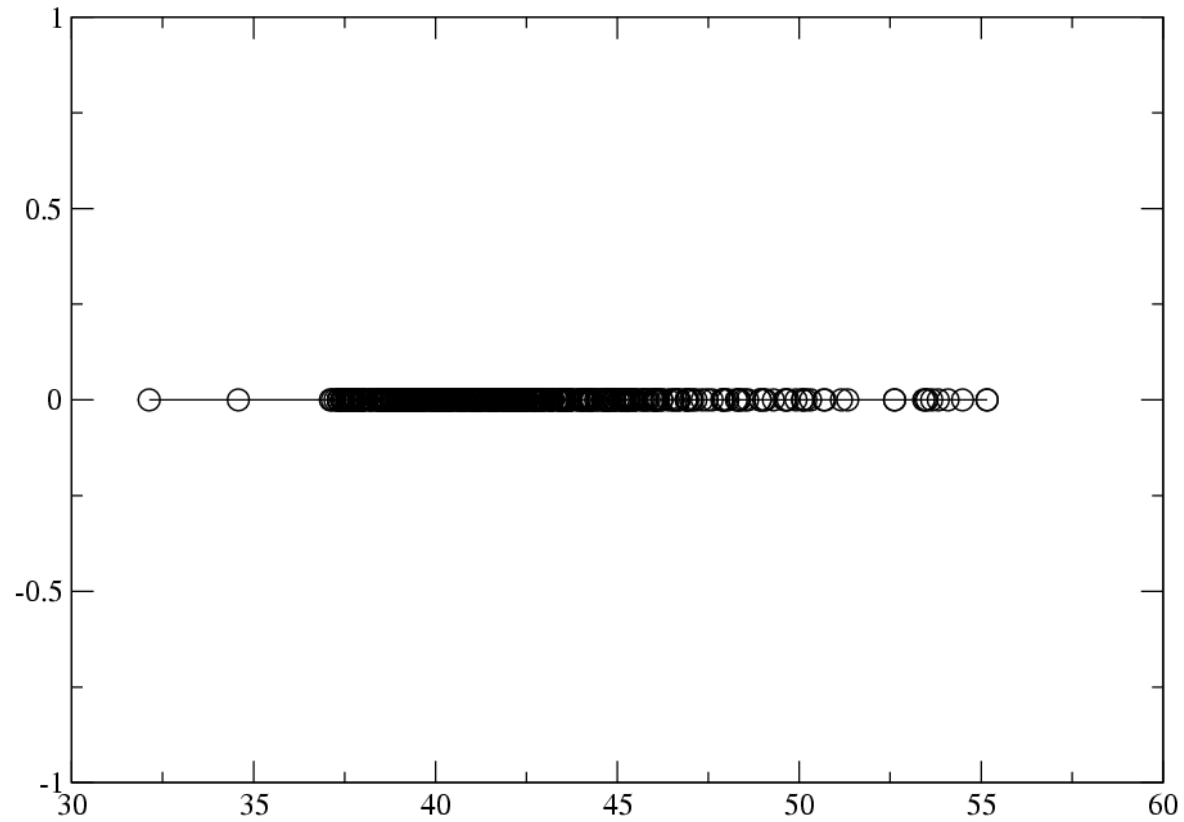
(10 intervalů, 2 parametry v rozdělení),

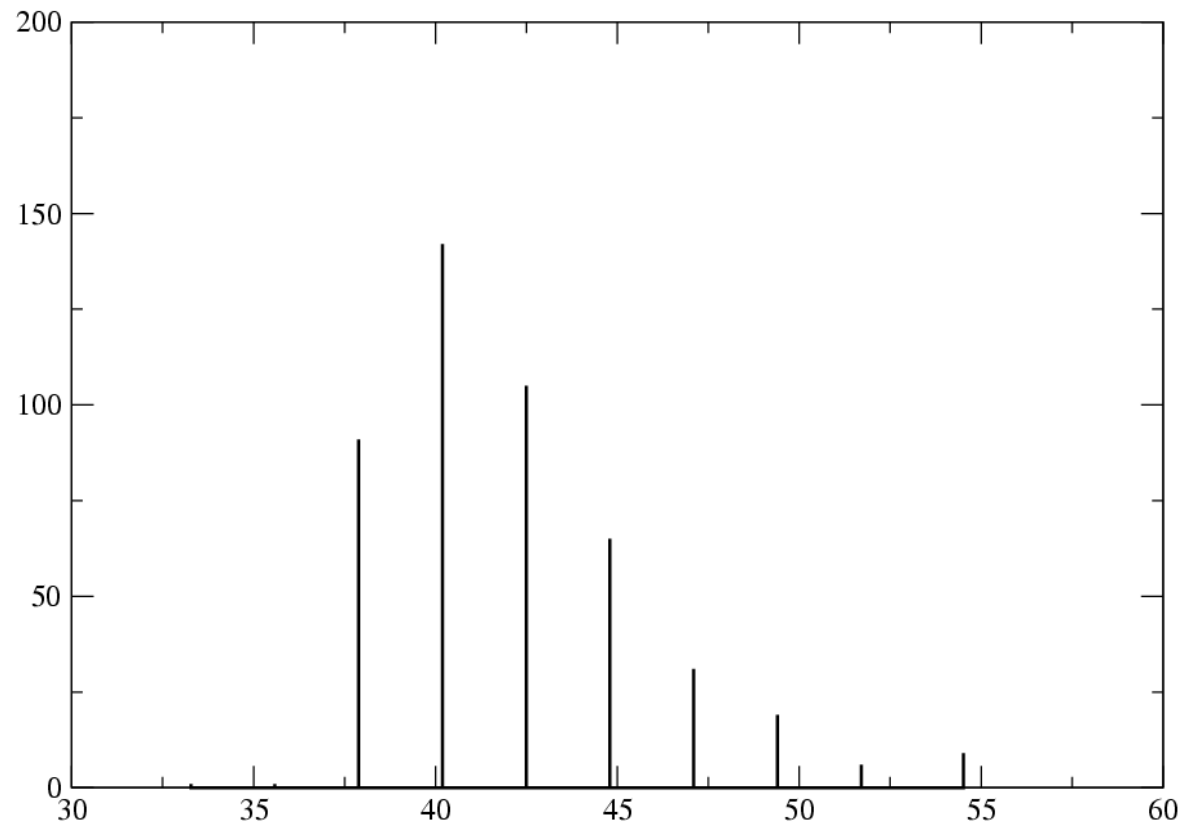
p_2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$\chi_{p_2}^2$	12,2	14,07	18,48	20,28	24,32

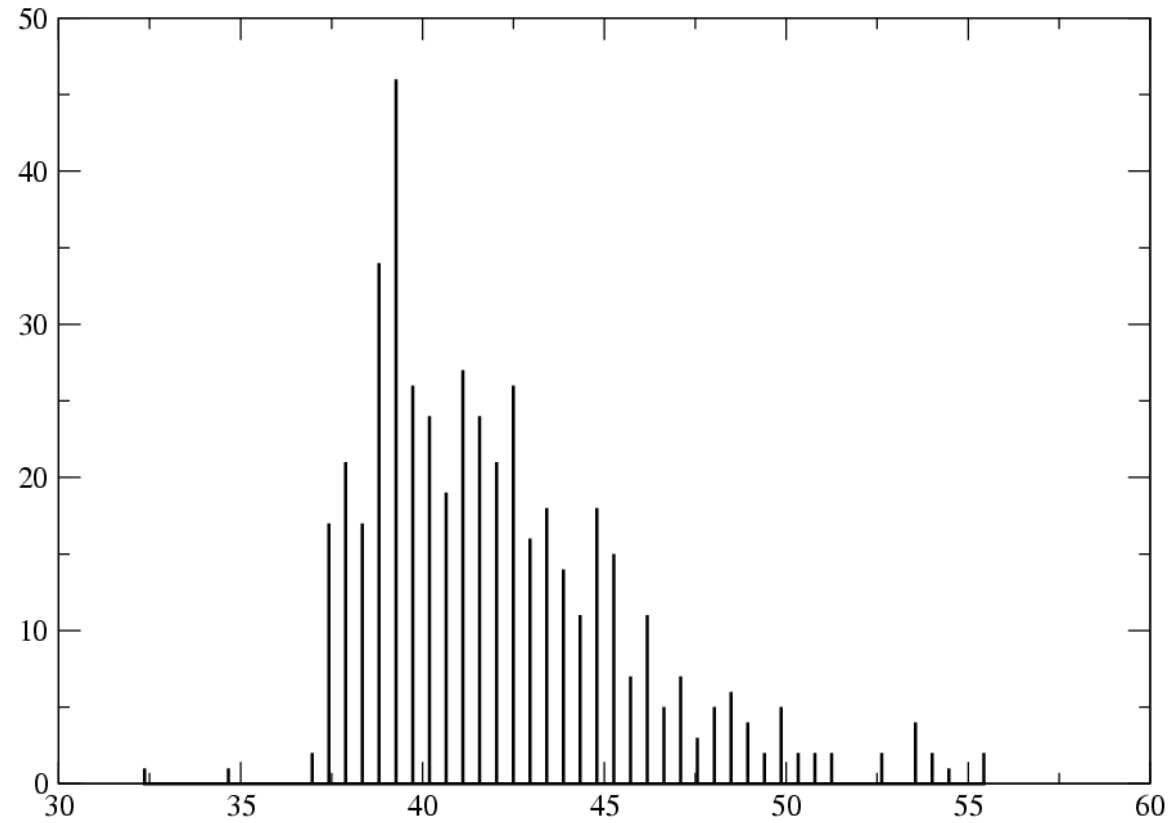
počet vypuštěných prvků	testová hodnota χ_0^2	kritická hodnota $< \chi_{p_2}^2$	hladina významnosti
5	7,507428	12,2	0,1

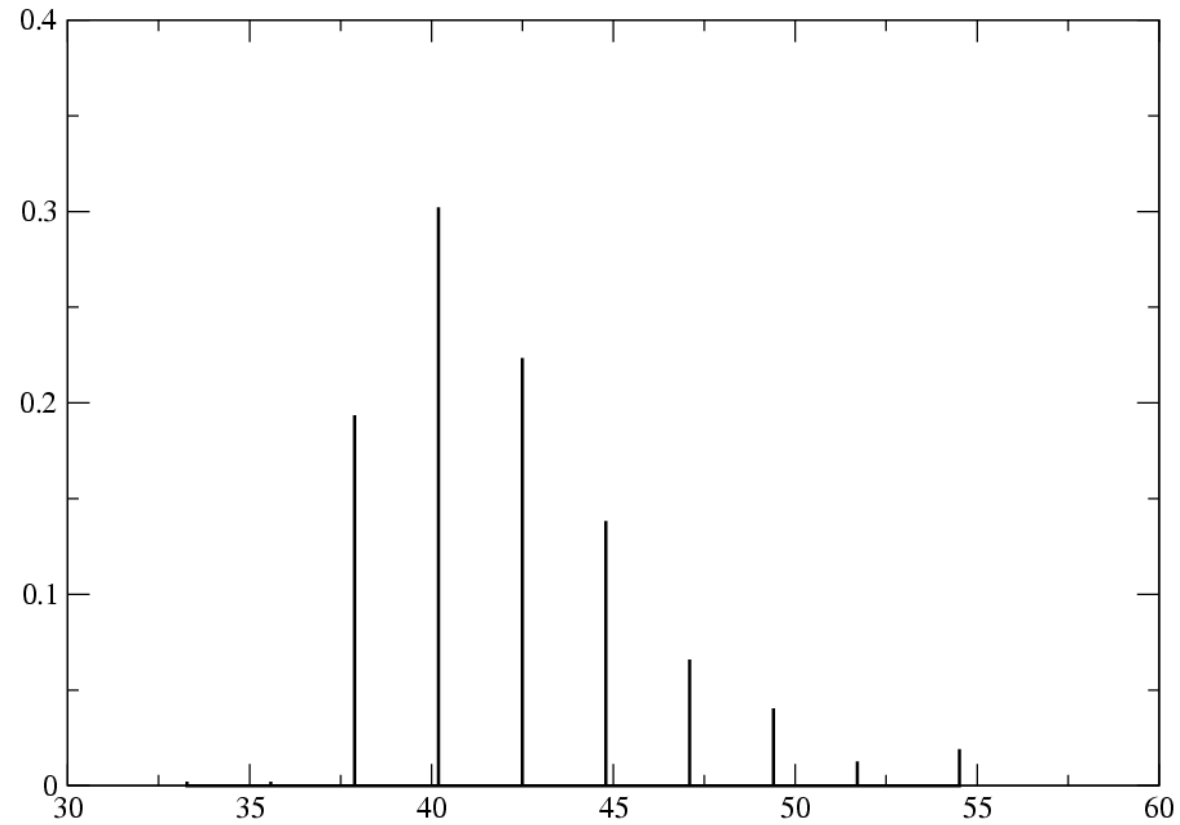
Pevnosti betonu z kontrolních měření na betonárce za jeden rok (MPa).

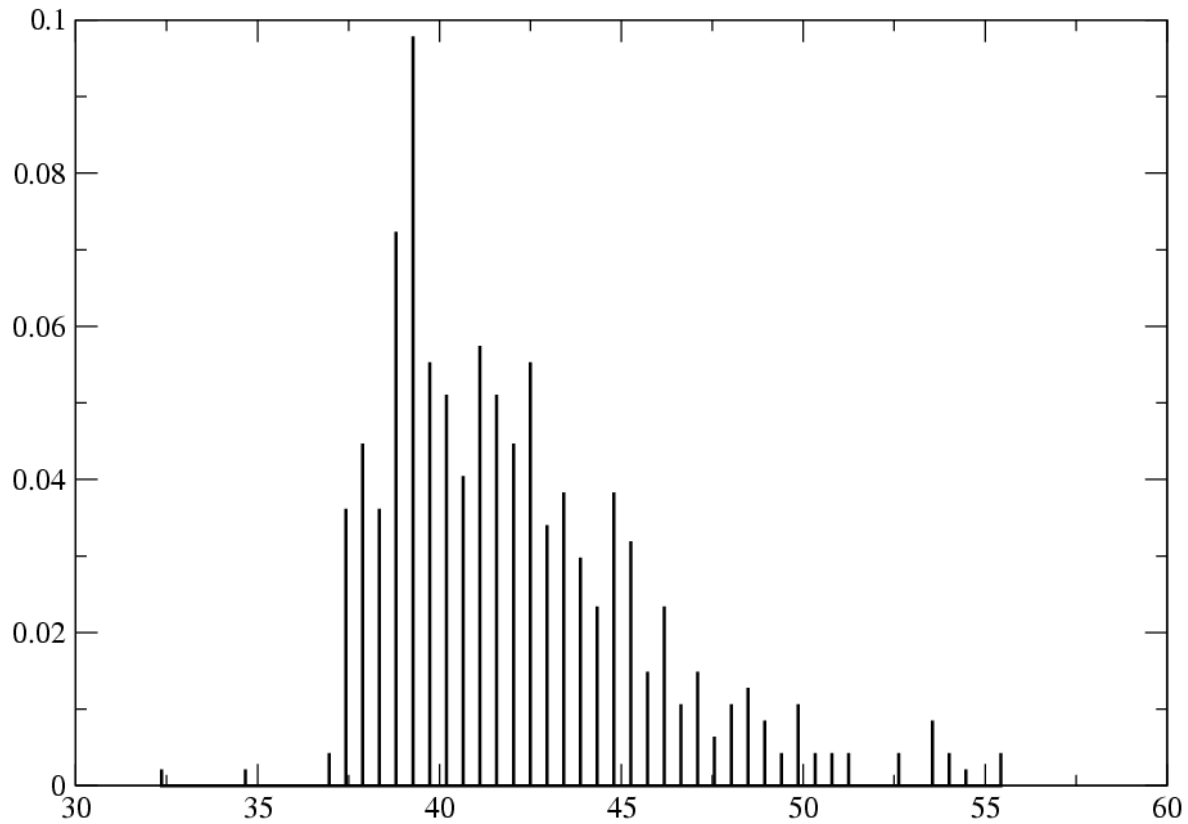
počet dat	470
nejmenší hodnota	32,13
průměrná hodnota	42,074
největší hodnota	55,16
směrodatná odchylka	3,6466
median	41,38
modus	42,49











Klasická teorie množin

Množina je určena svými prvky.

Prvek x náleží do množiny A se zapisuje $x \in A$.

Množina je někdy definována pomocí vlastnosti prvků. Množina prvků x , které mají vlastnost $V(x)$, se označuje $\{x; V(x)\}$.

Pro každou množinu A lze definovat funkci μ_A zvanou funkce příslušnosti takto:

$$\mu_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$$

$$\mu_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A$$

Obor hodnot funkce příslušnosti μ_A je množina $\{0, 1\}$.

Klasická teorie množin je pro některé úlohy příliš “těsná a neohrabaná”.

L.A. Zadeh: Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes. IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., 1, 1973.

Princip inkompatibility: Roste-li složitost systému, klesá naše schopnost formulovat přesné a významné soudy o jeho chování, až je dosaženo hranice, za níž jsou přesnost a relevantnost prakticky vzájemně se vylučující charakteristiky.

Teorie fuzzy množin

Uvedení teorie fuzzy množin:

L.A. Zadeh: Fuzzy Sets. Information and Control, 8, p. 338-353, 1965.

Definice fuzzy množiny: Necht U je univerzum a L je podmnožina reálných čísel (prakticky vždy je to interval $\langle 0; 1 \rangle$). Fuzzy množina A v univerzu U je zobrazení $A : U \rightarrow L$.

V. Novák: Fuzzy množiny a jejich aplikace. Matematický seminář SNTL 23, SNTL, Praha, 1990.

Definice fuzzy množiny: Necht U je univerzum a L je podmnožina reálných čísel (prakticky vždy je to interval $\langle 0, 1 \rangle$). Podmnožina A v univerzu U společně se zobrazením $\mu_A : U \rightarrow L$ se nazývá fuzzy množina A . Zobrazení μ_A se nazývá funkce příslušnosti.

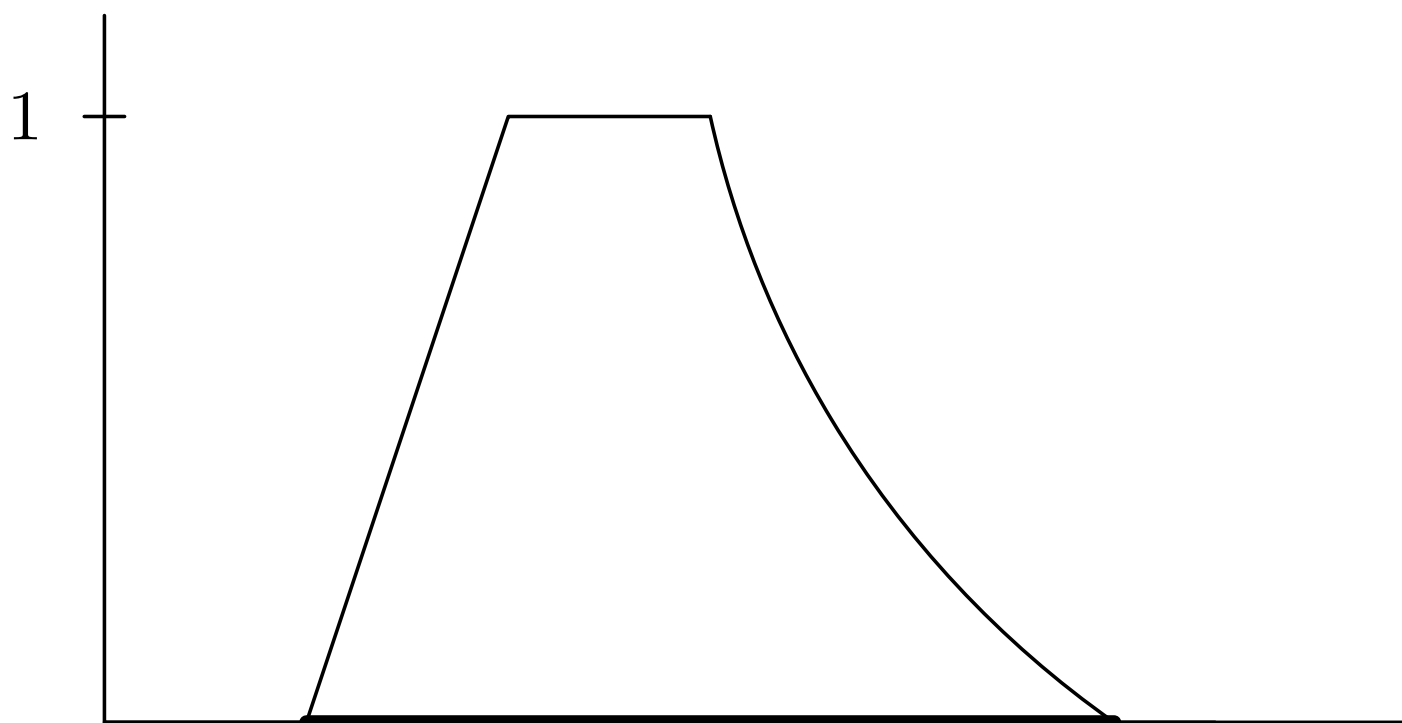
$\mu_A(x) = 0$ prvek x do množiny A nepatří

$\mu_A(x) = 1$ prvek x do množiny A patří

$\mu_A(x) = 0,3$ prvek x do množiny A patří částečně

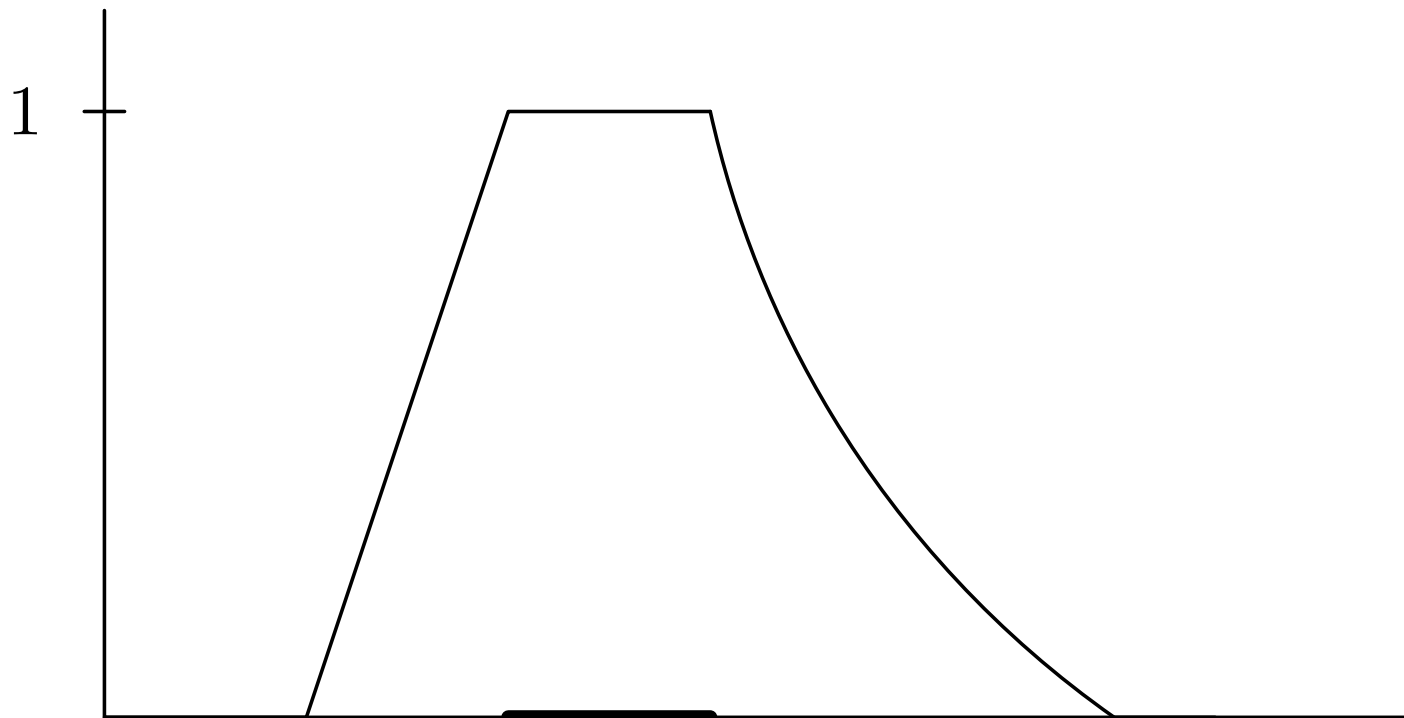
Nosič fuzzy množiny A je klasická množina

$$\text{supp } A = \{x; \mu_A(x) > 0\}.$$

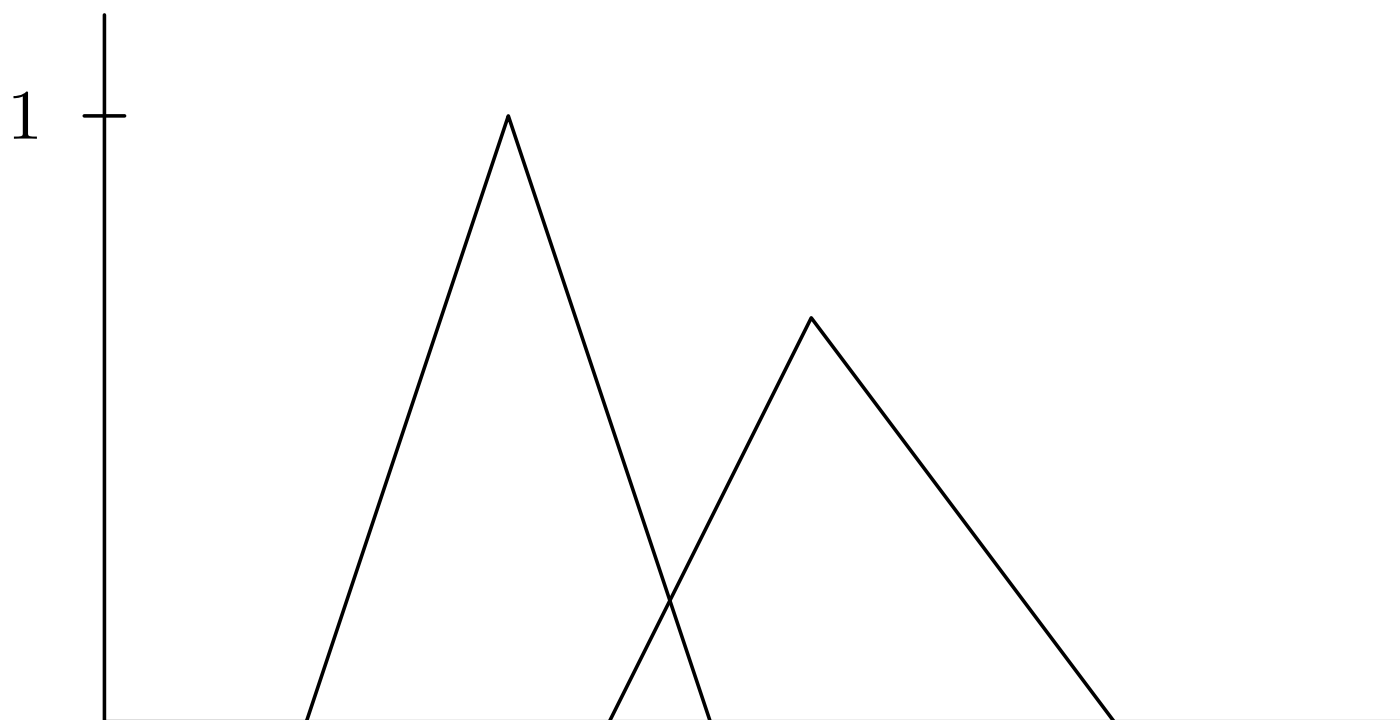


Jádro fuzzy množiny A je klasická množina

$$\ker A = \{x; \mu_A(x) = 1\}.$$



Fuzzy množina se nazývá normální právě tehdy, když $\ker A \neq \emptyset$.
Jinak se nazývá subnormální.



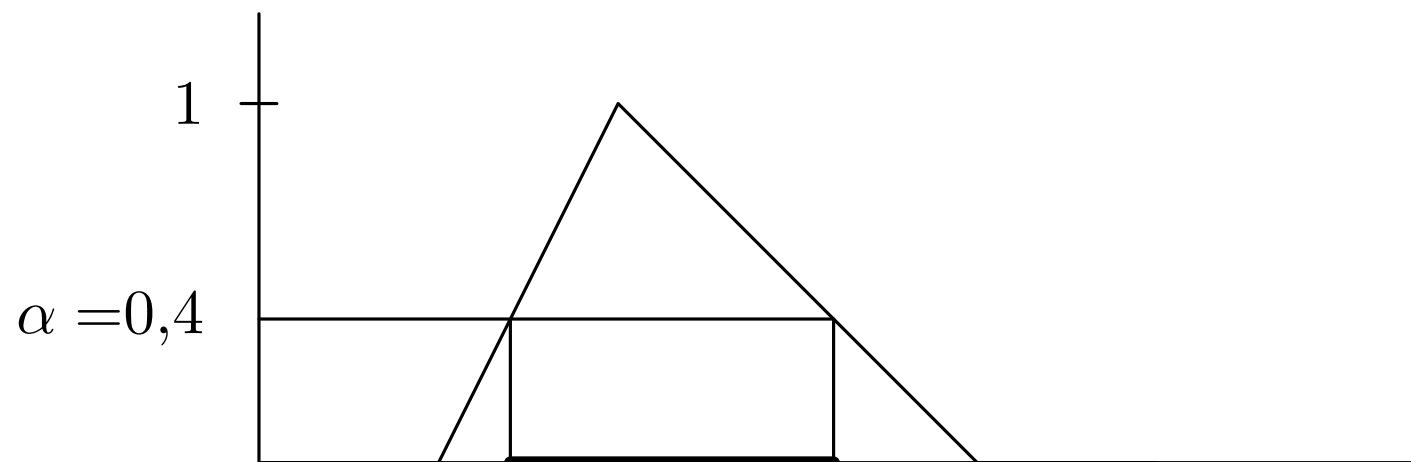
Výška fuzzy množiny A je

$$\text{hgt}A = \max_{x \in U} \mu_A(x)$$

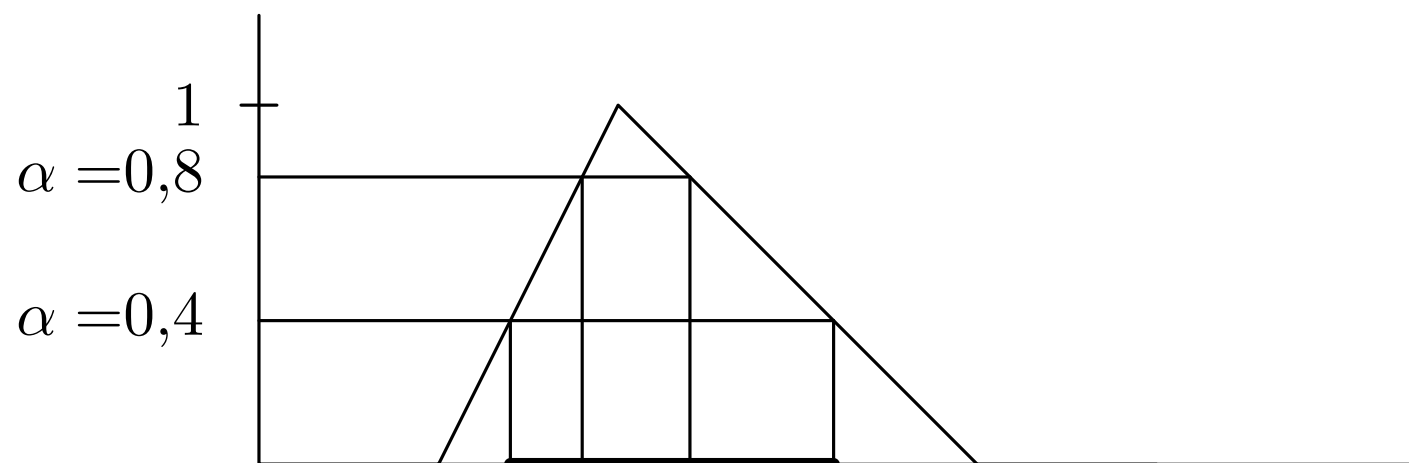
Je-li $\ker A \neq \emptyset$, je $\text{hgt}A = 1$.

α -řez fuzzy množiny A , kde $\alpha \in L$, je klasická množina

$$A_\alpha = \{x; \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

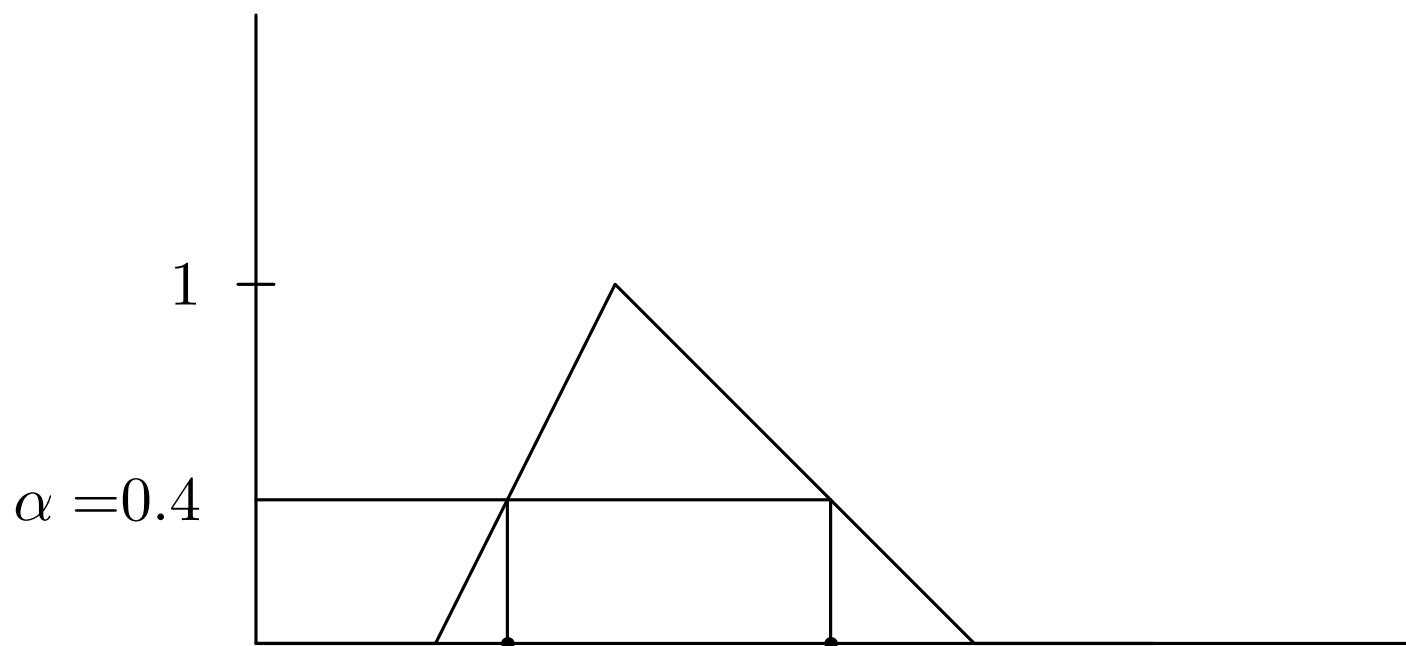


Jestliže pro $\alpha_1, \alpha_2 \in L$ platí $\alpha_1 \leq \alpha_2$, pak platí $A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$



α -hladina fuzzy množiny A , kde $\alpha \in L$, je klasická množina

$$A^\alpha = \{x; \mu_A(x) = \alpha\}.$$



Operace s fuzzy množinami

Sjednocení fuzzy množin A a B je množina $C = A \cup B$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_C(x) = \max_{x \in U} \{ \mu_A(x); \mu_B(x) \} .$$

Průnik fuzzy množin A a B je množina $C = A \cap B$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_C(x) = \min_{x \in U} \{ \mu_A(x); \mu_B(x) \} .$$

Doplněk fuzzy množiny A je množina $\bar{A} = U - A$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) .$$

Nechť U je lineární prostor. Fuzzy množina $A \subset U$ se nazývá konvexní právě tehdy, když všechny její α -řezy jsou konvexní množiny, tj. pro každé prvky $x, y \in A$ a číslo $0 \leq \lambda \leq 1$ platí $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Věta. Fuzzy množina $A \subset U$ je konvexní, právě když pro každé dva prvky $x, y \in U$ a každé $0 \leq \lambda \leq 1$ platí

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x); \mu_A(y)\}$$

Princip rozšíření

Umožňuje převést kteroukoliv operaci v klasických množinách na operaci ve fuzzy množinách.

Princip rozšíření. Necht U a V jsou univerza, $f : U \rightarrow V$ funkce a $A \subset U$ je fuzzy množina v univerzu U . Fuzzy množina A indukuje fuzzy množinu $f(A) \subset V$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \\ 0, & \text{pokud : } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

pro všechna $y \in V$.

Fuzzy čísla

Fuzzy číslo je normální konvexní fuzzy množina, jejíž funkce příslušnosti μ je spojitá a existují body $a_l \leq a'_l \leq a'_r \leq a_r$ takové, že platí

$$\forall x \in (-\infty, a_l) \cup (a_r, \infty) : \mu(x) = 0$$

$$\forall x \in (a'_l, a'_r) : \mu(x) = 1$$

v intervalu (a_l, a'_l) je $\mu(x)$ rostoucí, v intervalu (a'_r, a_r) je $\mu(x)$ klesající.

Intervalová aritmetika

$$A = [a_l; a_c; a_r]$$

$$B = [b_l; b_c; b_r]$$

součet

$$A + B = [a_l + b_l; a_c + b_c; a_r + b_r]$$

rozdíl

$$A - B = [a_l - b_r; a_c - b_c; a_r - b_l]$$

součin

$$c_l = \min\{a_l b_l, a_l b_r, a_r b_l, a_r b_r\}$$

$$c_r = \max\{a_l b_l, a_l b_r, a_r b_l, a_r b_r\}$$

$$A.B = C = [c_l; a_c b_c; c_r]$$

podíl

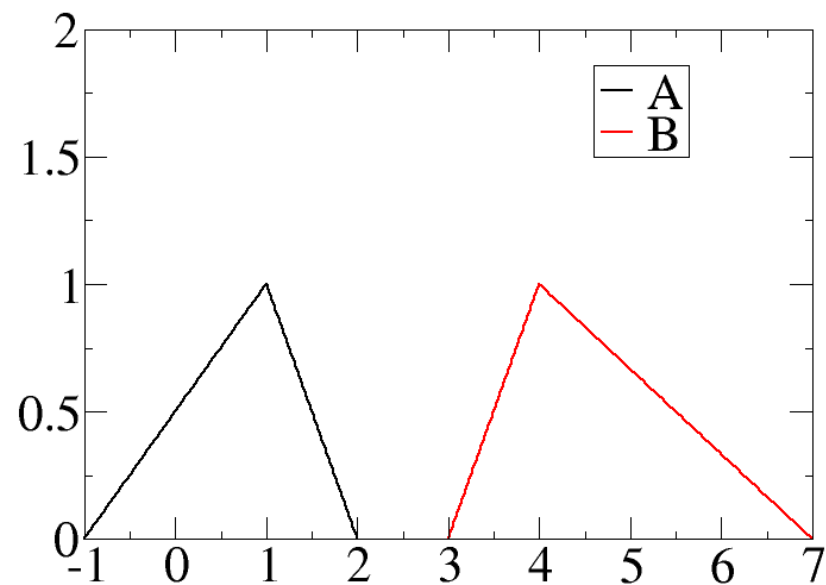
$$c_l = \min\{a_l/b_l, a_l/b_r, a_r/b_l, a_r/b_r\}$$

$$c_r = \max\{a_l/b_l, a_l/b_r, a_r/b_l, a_r/b_r\}$$

$$A/B = C = [c_l; a_c/b_c; c_r]$$

α -řezy

$$A = [2\alpha - 1; -\alpha + 2] \quad B = [\alpha + 3; -3\alpha + 7]$$

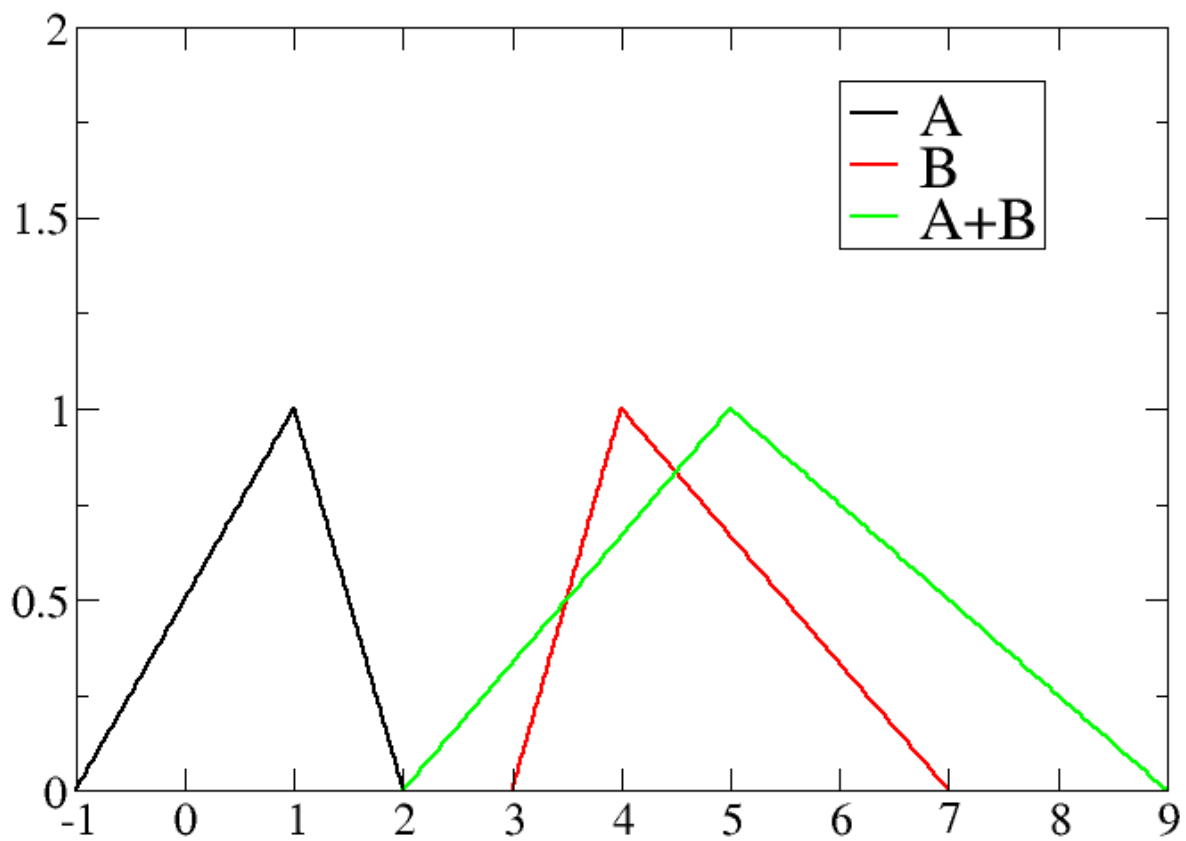


Součet $A + B$

$$A = [2\alpha - 1; -\alpha + 2]$$

$$B = [\alpha + 3; -3\alpha + 7]$$

$$A + B = [3\alpha + 2; -4\alpha + 9]$$

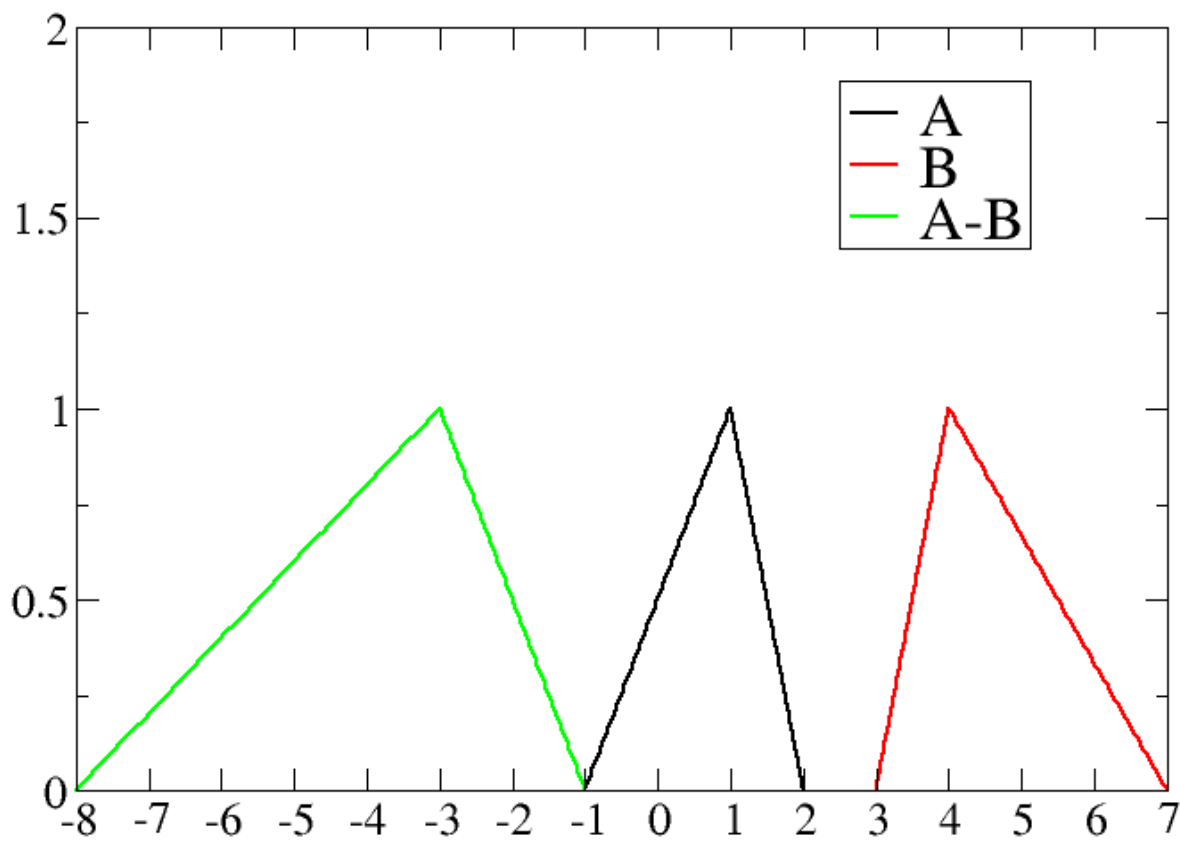


Rozdíl $A - B$

$$A = [2\alpha - 1; -\alpha + 2]$$

$$B = [\alpha + 3; -3\alpha + 7]$$

$$A - B = [5\alpha - 8; -2\alpha - 1]$$



Součin $A.B$

$$A = [2\alpha - 1; -\alpha + 2]$$

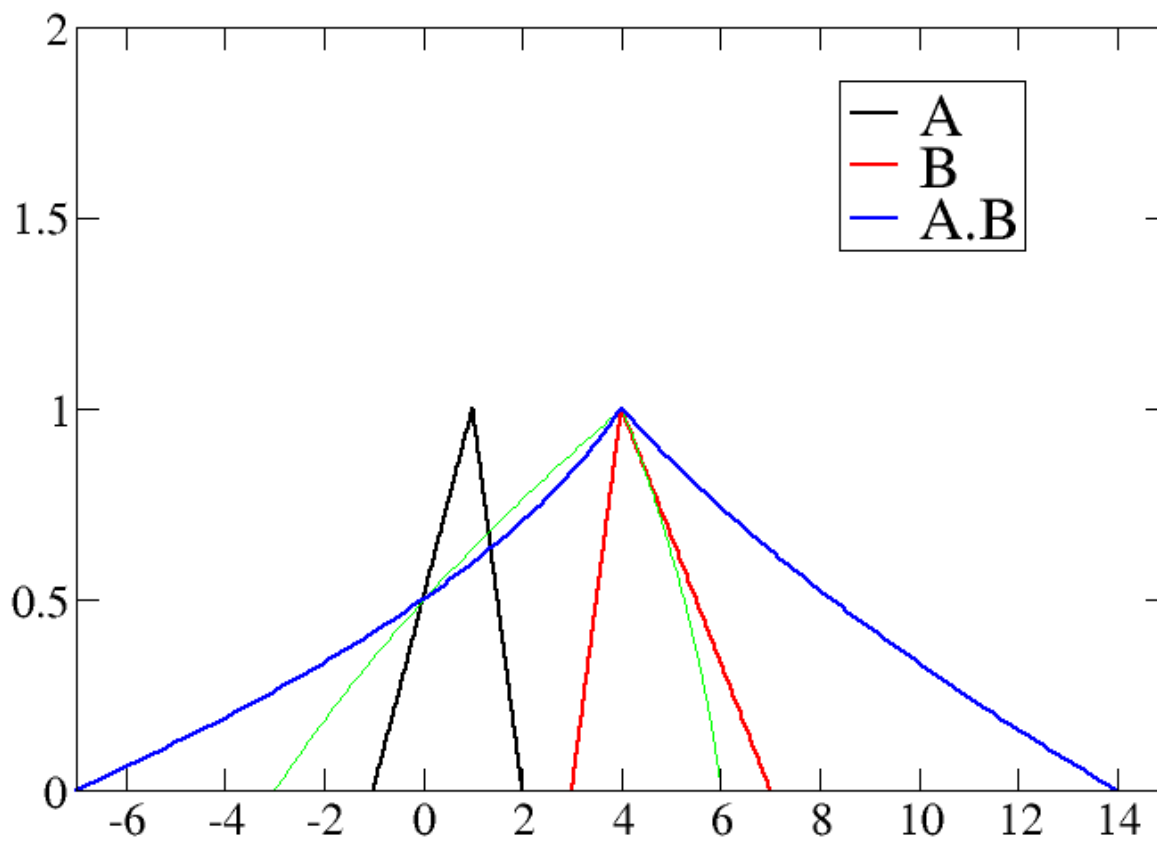
$$B = [\alpha + 3; -3\alpha + 7]$$

$$(2\alpha - 1)(\alpha + 3) = 2\alpha^2 + 5\alpha - 3$$

$$(2\alpha - 1)(-3\alpha + 7) = -6\alpha^2 + 17\alpha - 7$$

$$(-\alpha + 2)(\alpha + 3) = -\alpha^2 - \alpha + 6$$

$$(-\alpha + 2)(-3\alpha + 7) = 3\alpha^2 - 13\alpha + 14$$

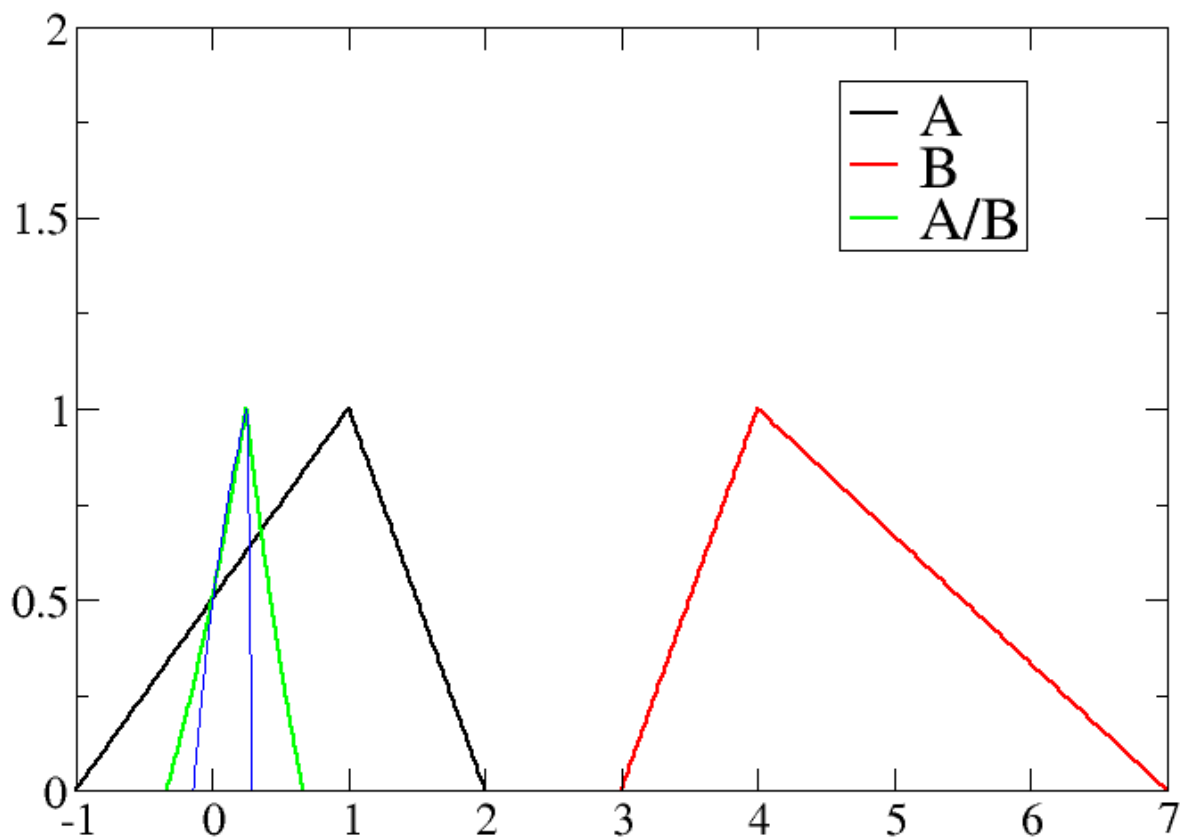


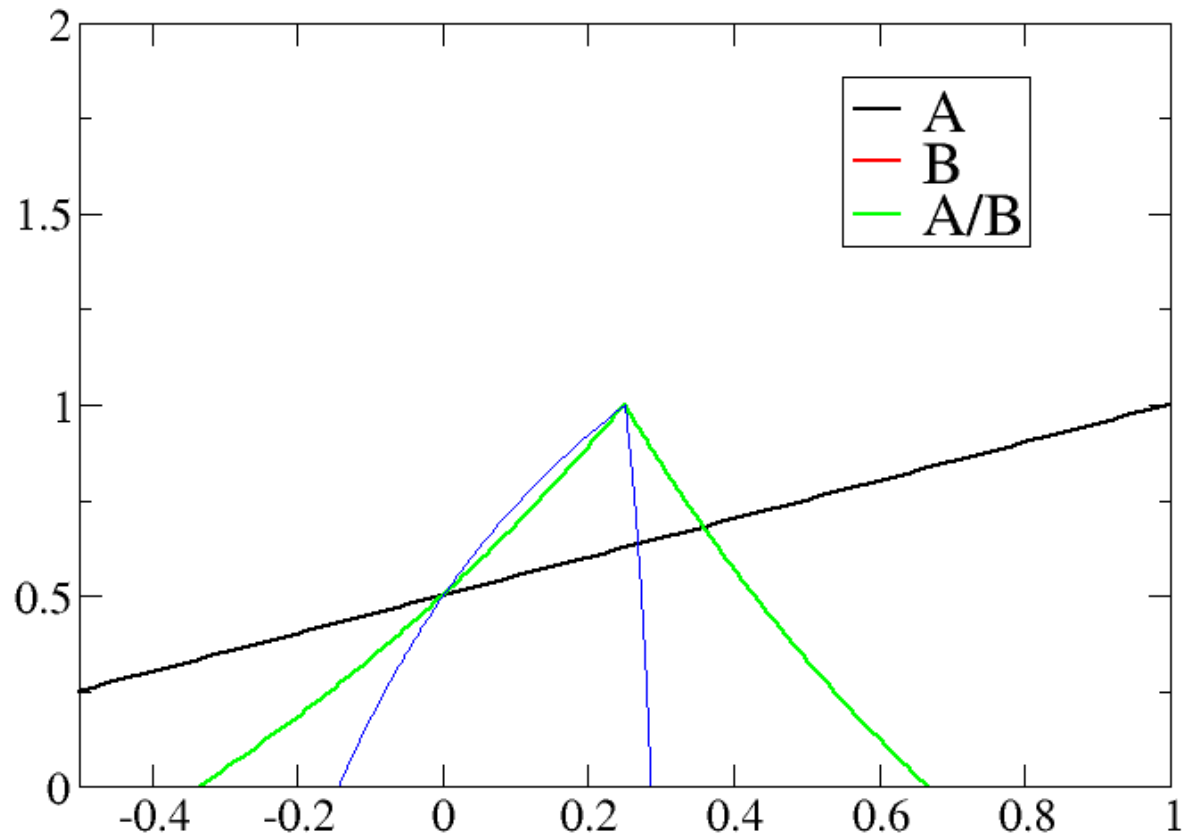
Podíl A/B

$$A = [2\alpha - 1; -\alpha + 2]$$

$$B = [\alpha + 3; -3\alpha + 7]$$

$$\frac{2\alpha - 1}{\alpha + 3}$$
$$\frac{2\alpha - 1}{-3\alpha + 7}$$
$$\frac{-\alpha + 2}{\alpha + 3}$$
$$\frac{-\alpha + 2}{-3\alpha + 7}$$





Kmitání s vlivem nejistot

Pro jednoduchost bude uvažováno netlumené kmitání jednoho stupně volnosti (hmota připevněná k pružině).

pohybová rovnice

$$m \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + kw(t) = 0$$

$m > 0$ je hmotnost a $k > 0$ je tuhost pružiny

vlastní kruhová frekvence

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

pohybová rovnice

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} + \omega_0^2 w(t) = 0$$

řešení

$$w(t) = w_A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

w_A je amplituda výchylky, ϕ je fázový posun

počáteční podmínky

$$w(0) = d, \quad \frac{dw(0)}{dt} = v$$

d je počáteční výchylka, v je počáteční rychlost

případ 1.

hmotnost, tuhost a počáteční rychlost jsou ostrá čísla, počáteční výchylka je fuzzy číslo

$$m > 0, \quad k > 0, \quad v = 0, \quad d_f = [d^-, d^+]$$

řešení pohybové rovnice má tvar

$$w(t) = d_f \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

příklad

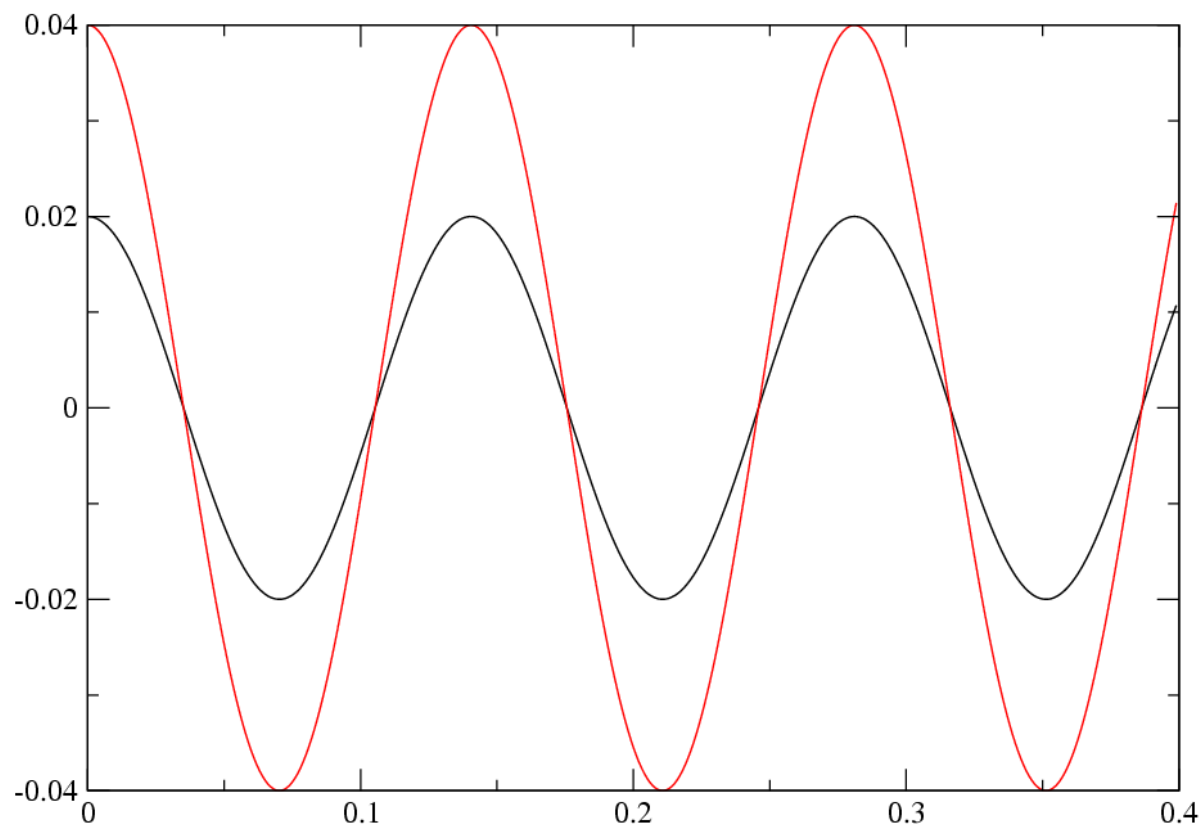
$$m = 20$$

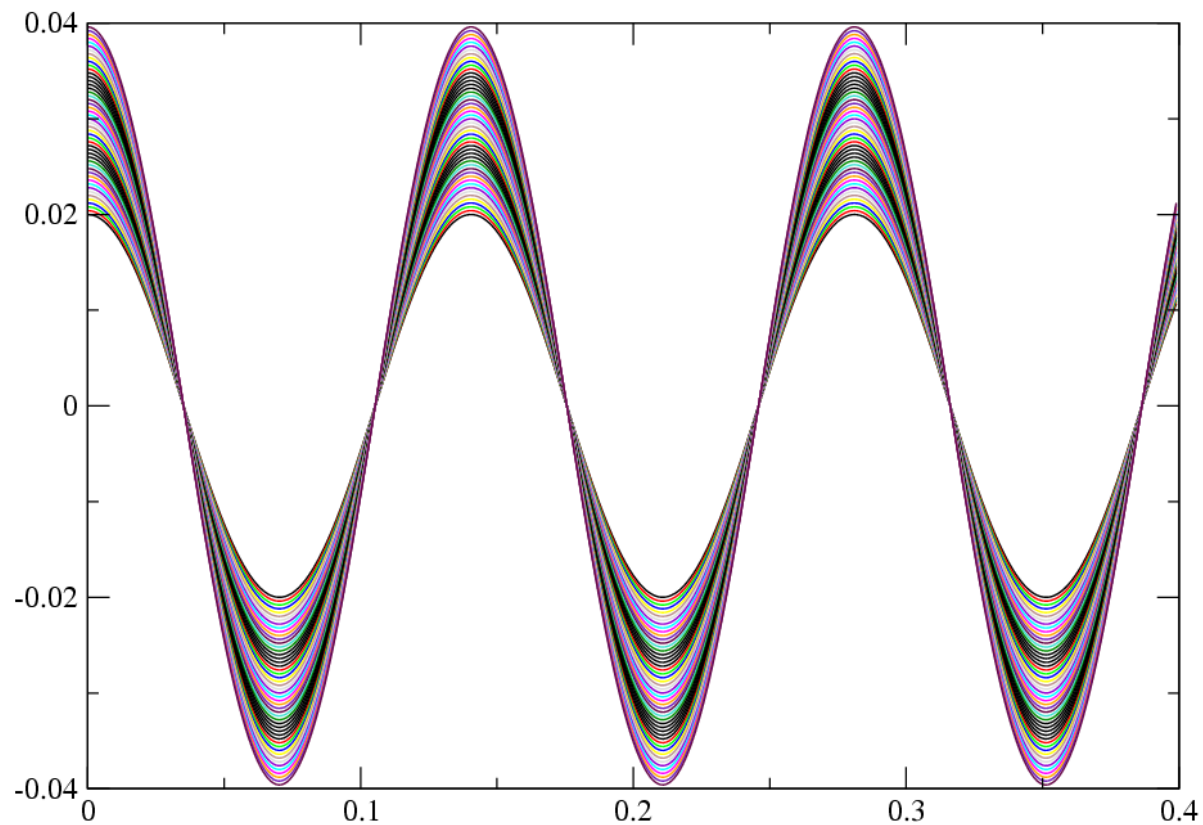
$$k = 40000$$

$$d^- = 0.02 \quad d^+ = 0.04$$

$$v = 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$





případ 2.

hmotnost, tuhost a počáteční výchylka jsou ostrá čísla, počáteční rychlost je fuzzy číslo

$$m > 0, \quad k > 0, \quad d = 0, \quad v_f = [v^-, v^+]$$

řešení pohybové rovnice má tvar

$$w(t) = \frac{v_f}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

případ 3.

hmotnost, počáteční výchylka a počáteční rychlost jsou ostrá čísla,
tuhost je fuzzy číslo

$$m > 0, \quad d \neq 0, \quad v = 0, \quad k_f = [k^-, k^+]$$

vlastní kruhová frekvence je také fuzzy číslo

$$\omega_{0f} = \sqrt{k_f/m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^- = \sqrt{k^-/m}, \quad \omega_0^+ = \sqrt{k^+/m}$$

řešení pohybové rovnice má tvar

$$w(t) = d \sin\left(\omega_{0f}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$d \sin\left(\omega_0^- (t_f + T) + \frac{\pi}{2}\right) = d \sin\left(\omega_0^+ t t_f + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2\pi = (\omega_0^+ - \omega_0^-) t_f \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{2\pi}{\omega_0^+ - \omega_0^-}$$

příklad

$$m = 20$$

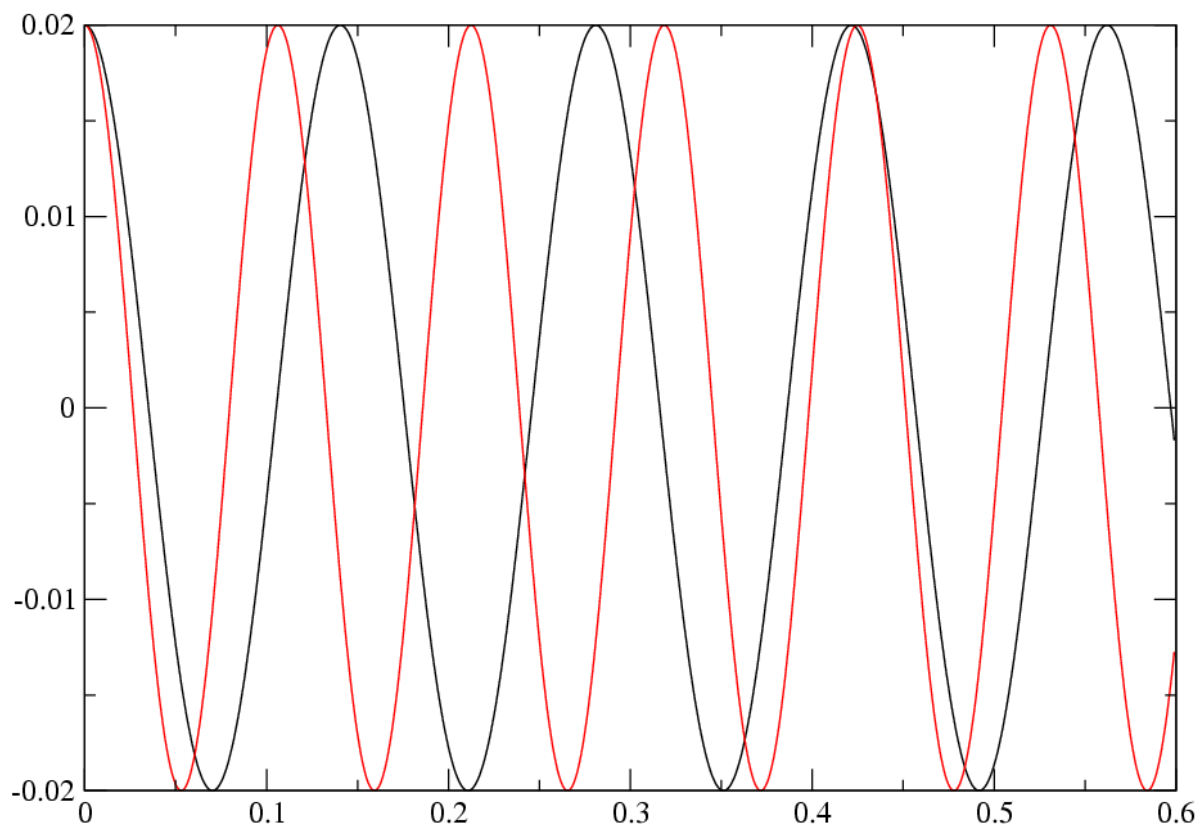
$$k^- = 40000 \quad k^+ = 70000$$

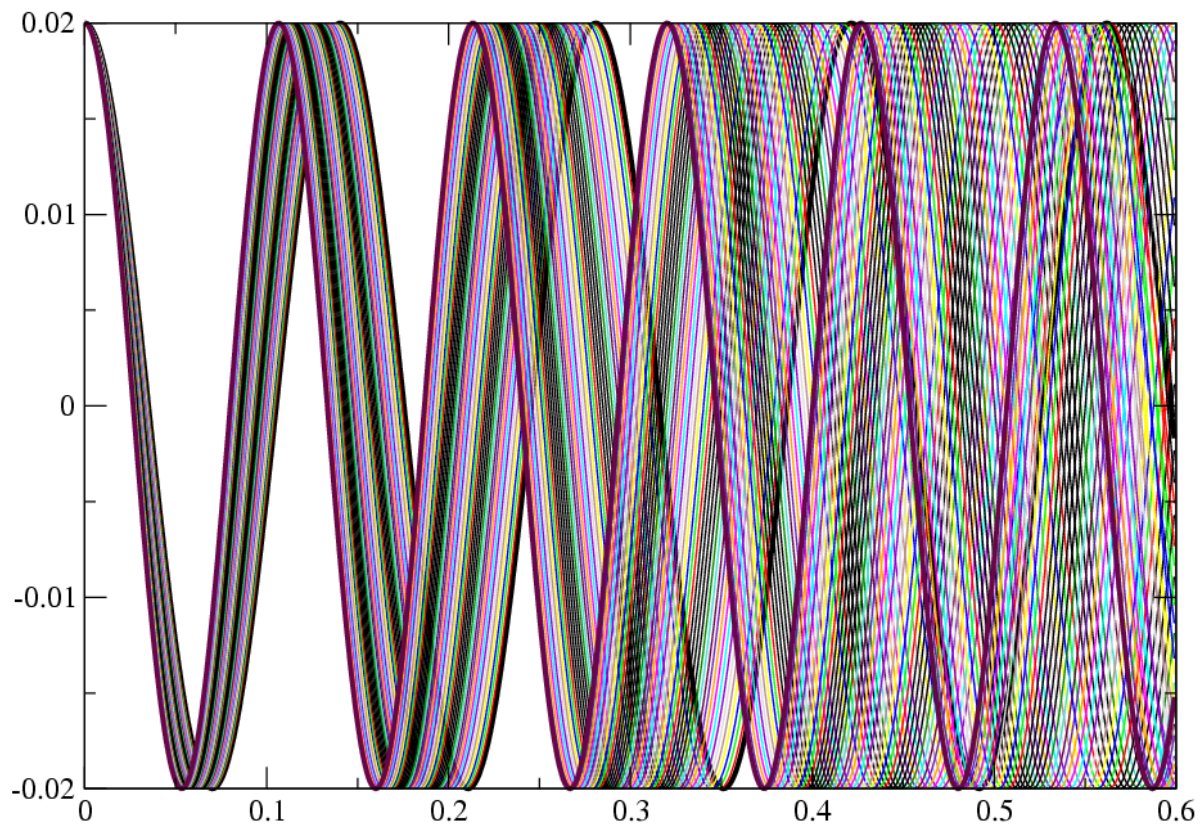
$$d = 0.02$$

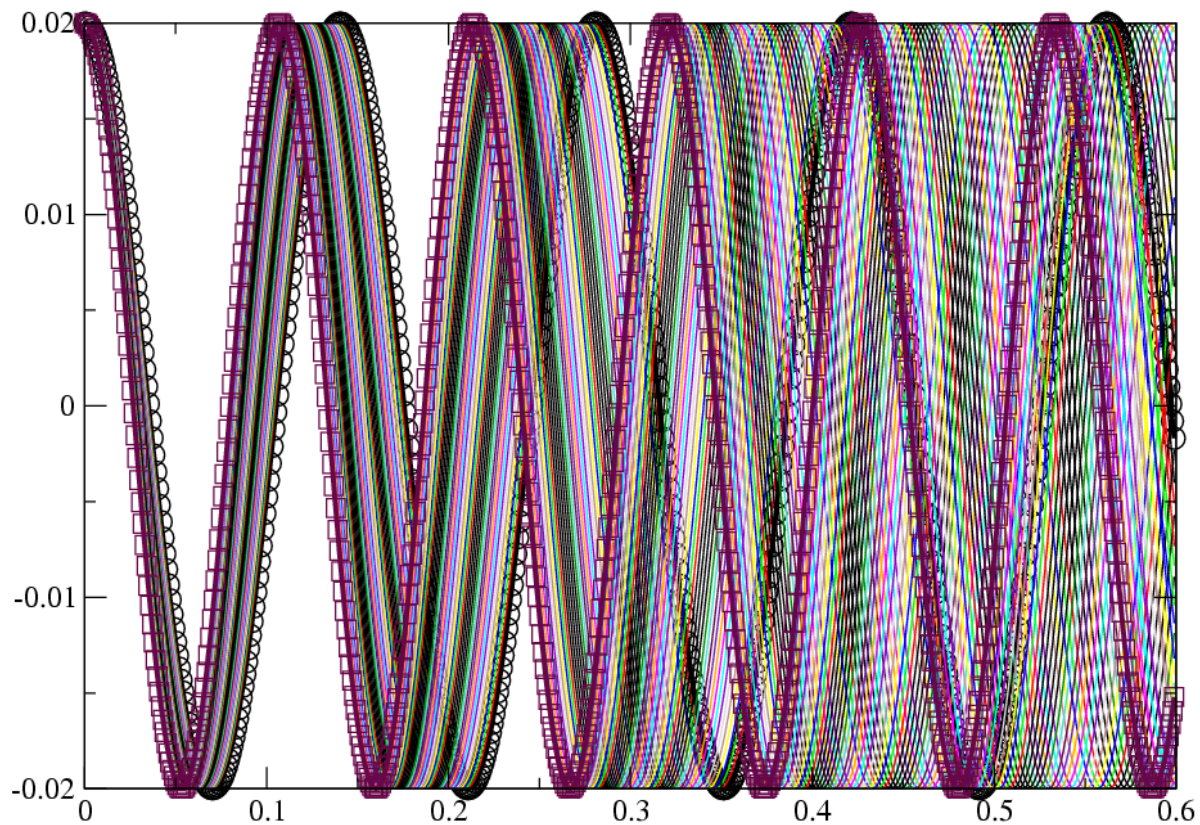
$$v = 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$t_f = 0.435141$$







Vlastní kmitání rovinné rámové konstrukce

Zadání rovinné rámové konstrukce

výška	16 m
šířka	10 m
sloupy	0,5 x 0,5 m
trámy	0,5 x 0,5 m
modul pružnosti	30 GPa \pm 10%
hustota materiálu	2500 kg/m ³ \pm 10%

rovnice vlastního kmitání

$$(\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

\mathbf{K} matice tuhosti

\mathbf{M} matice hmotnosti

ω_0 vlastní kruhová frekvence

\mathbf{v} vlastní tvar (vektor) kmitání

řešení metodou iterace podprostoru s Gramovou-Schmidtovou ortonormalizací

Funkce plochy odezvy (response surface function)

\tilde{X} prostor vstupních dat

\tilde{Y} prostor výstupních dat

X m -dimenzionální prostor vstupních dat

Y n -dimenzionální prostor výstupních dat

odezva systému (konstrukce)

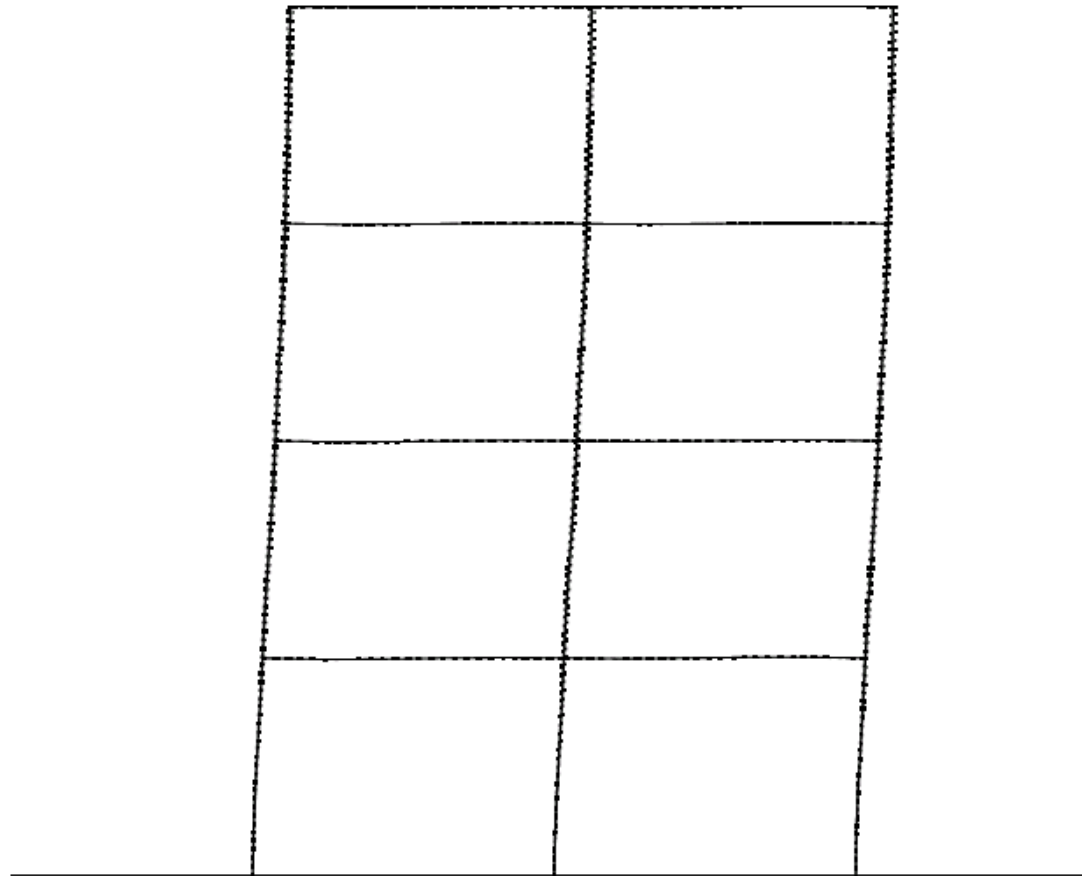
$$\tilde{y} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x})$$

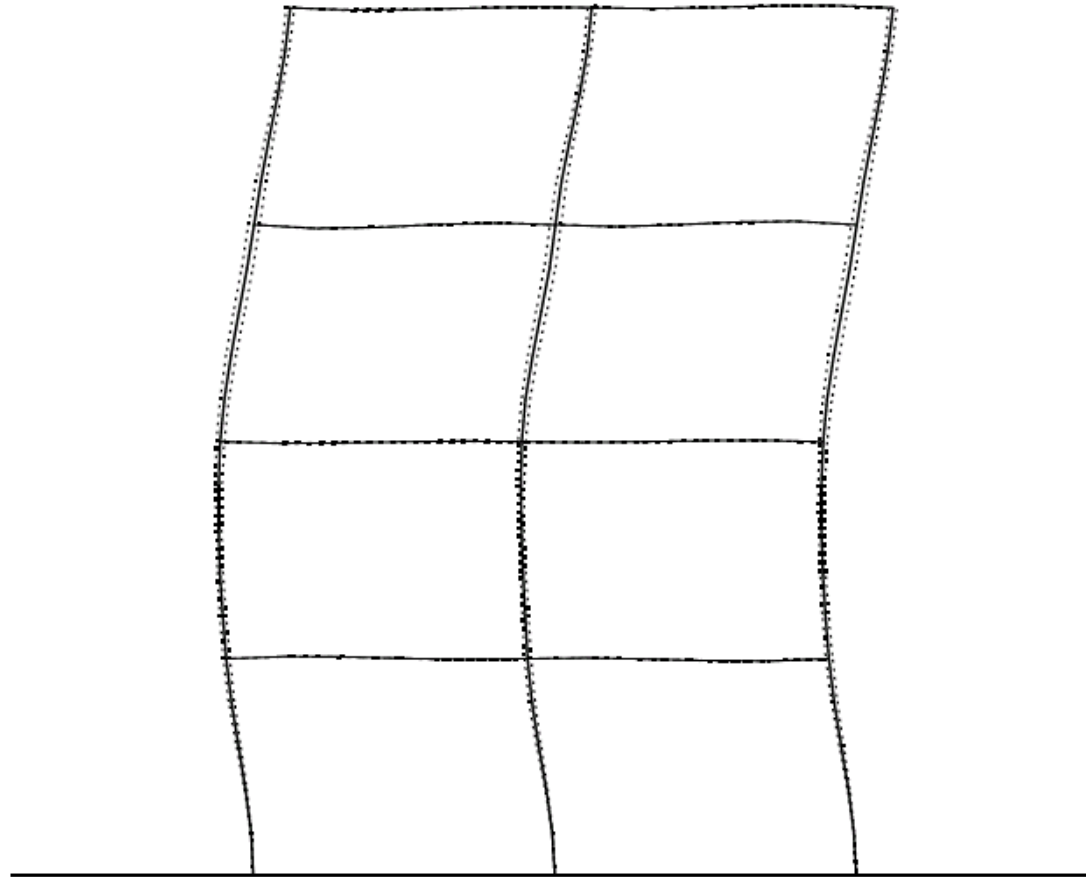
$$y = \tilde{F}(x)$$

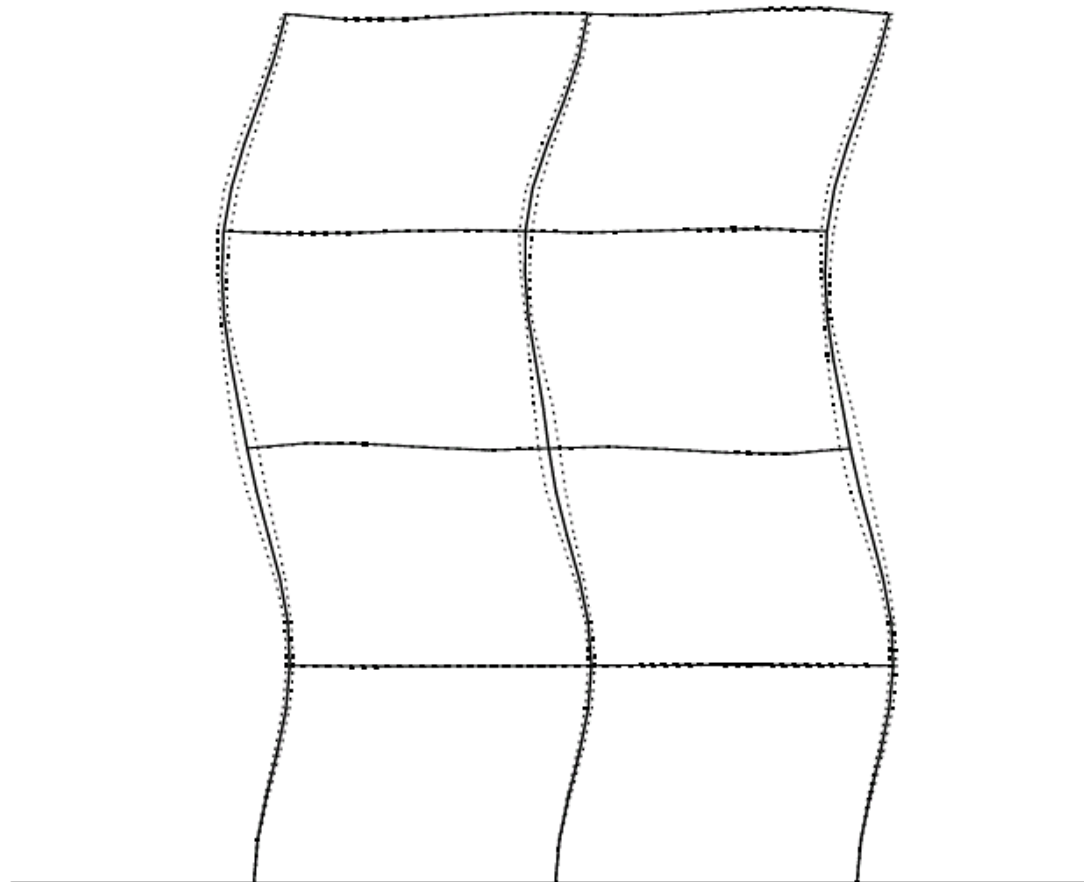
$$y_k^{[l]} = \tilde{\mathbf{F}}_k(\mathbf{x}^{[l]})$$

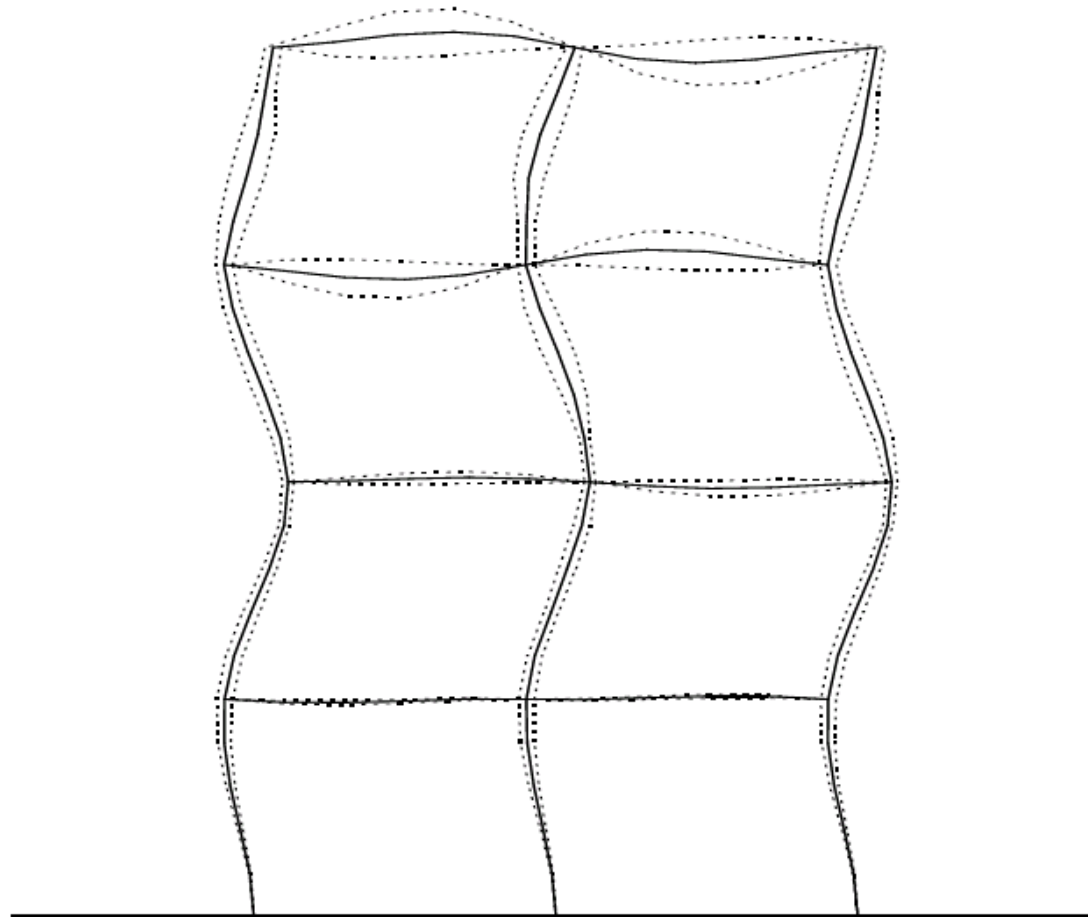
$$f^{(k)} = a^{(k)} + \sum_{i=1}^{i=m} b_i^{(k)} x_i + \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=m} c_{ij}^{(k)} x_i x_j$$

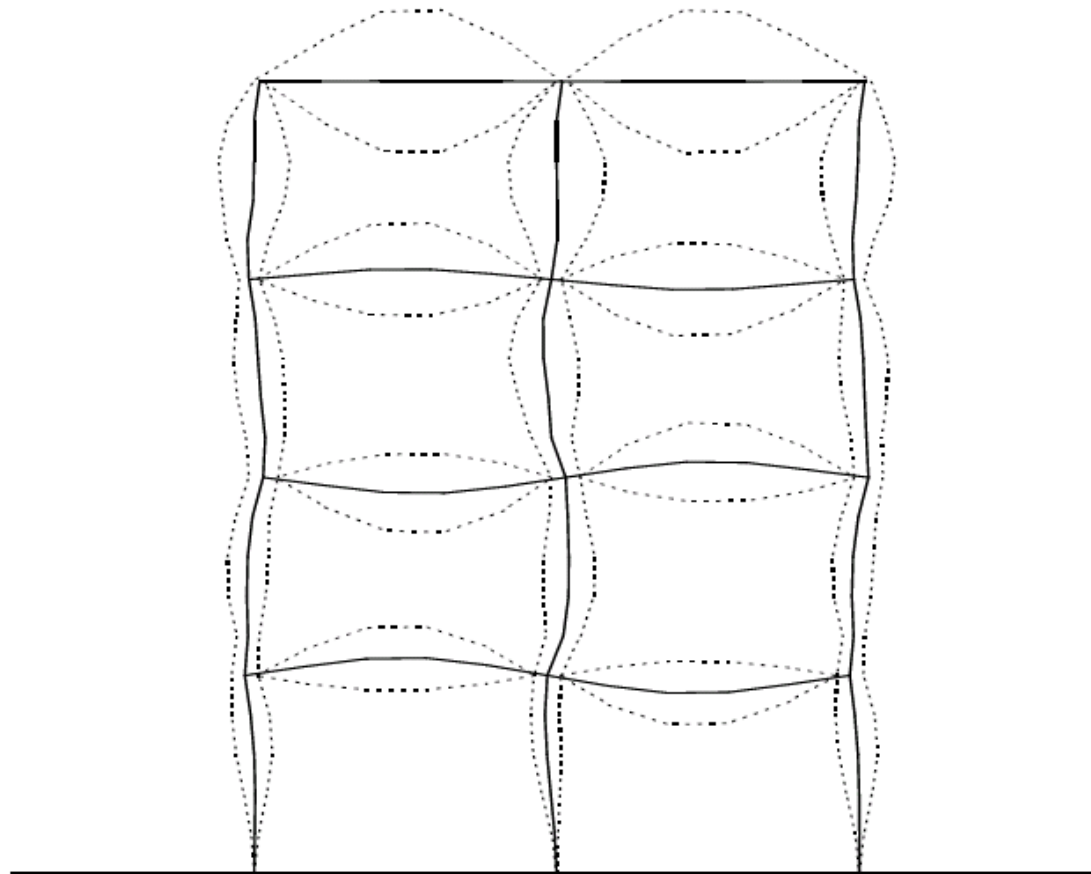
$$F^{(k)}(a^{(k)}, b_i^{(k)}, c_{ij}^{(k)}) = \sum_{l=1}^{l=s} (f^{(k)}(\mathbf{x}^{[l]}) - y_k^{[l]})^2$$

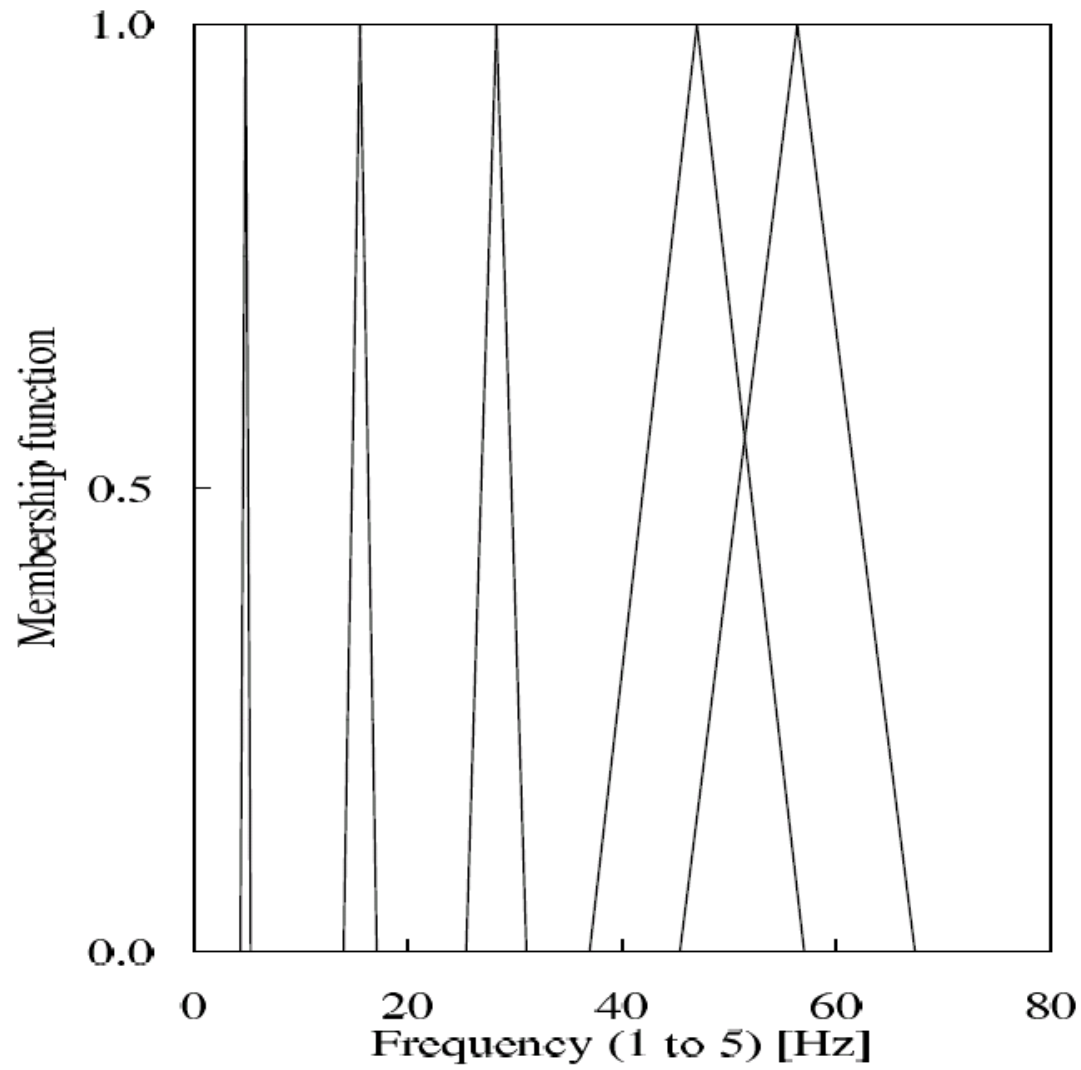


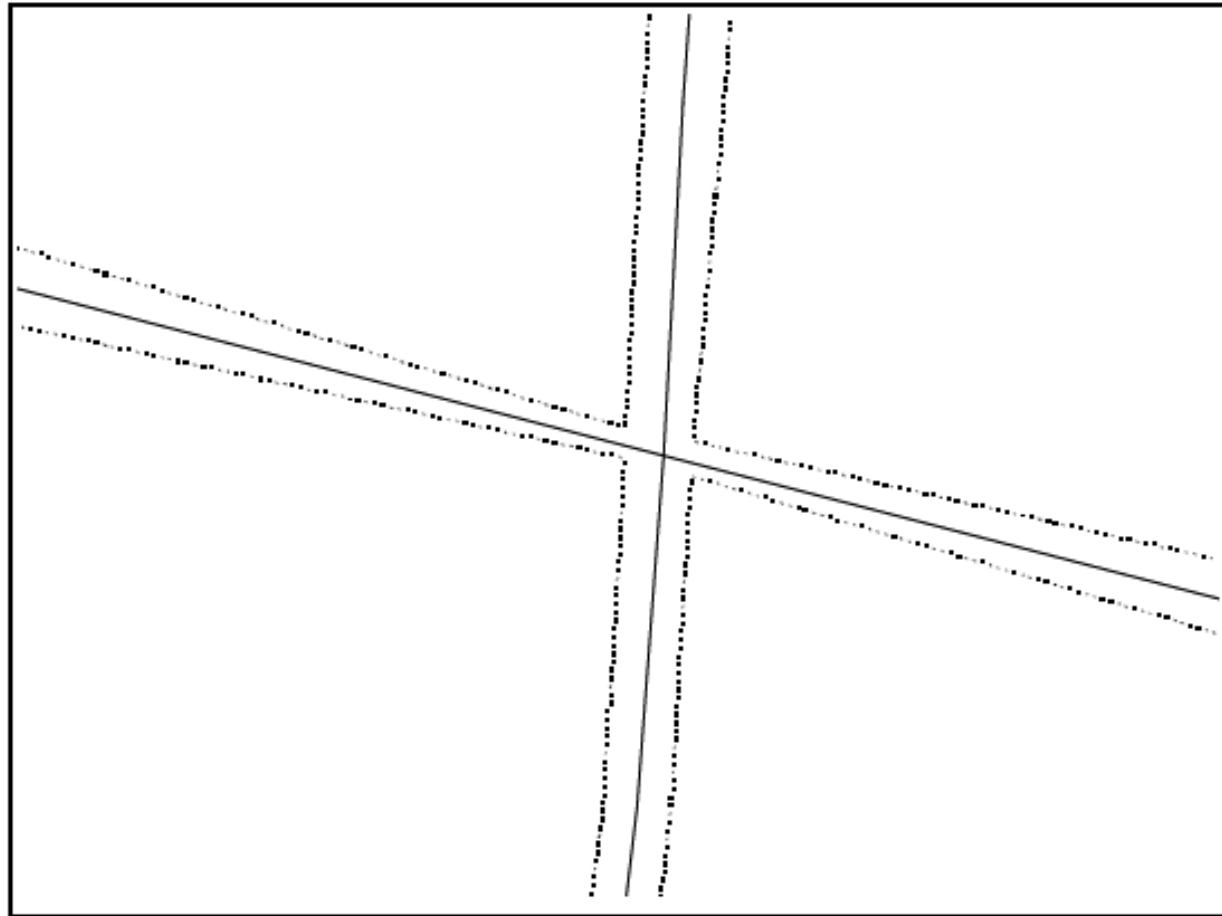


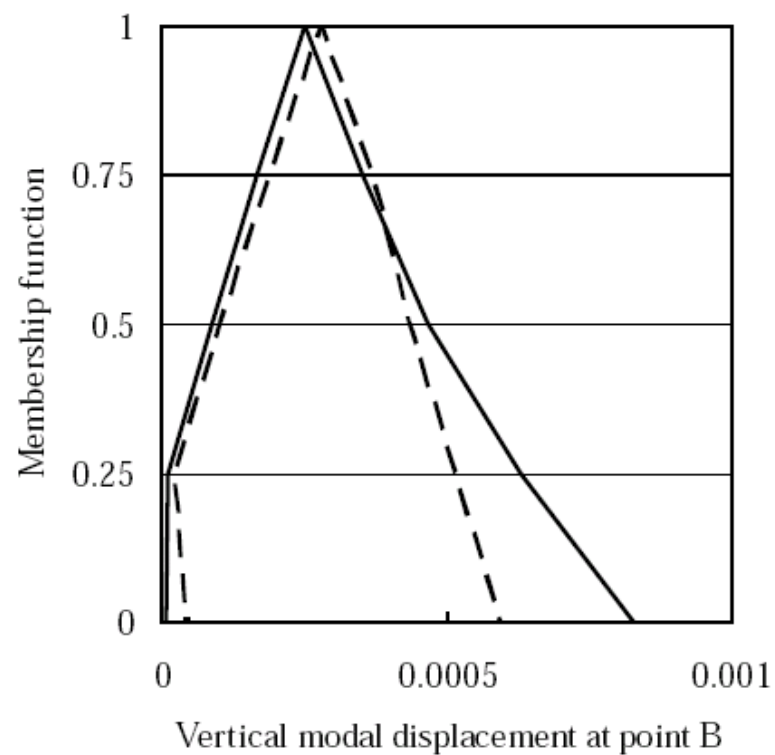
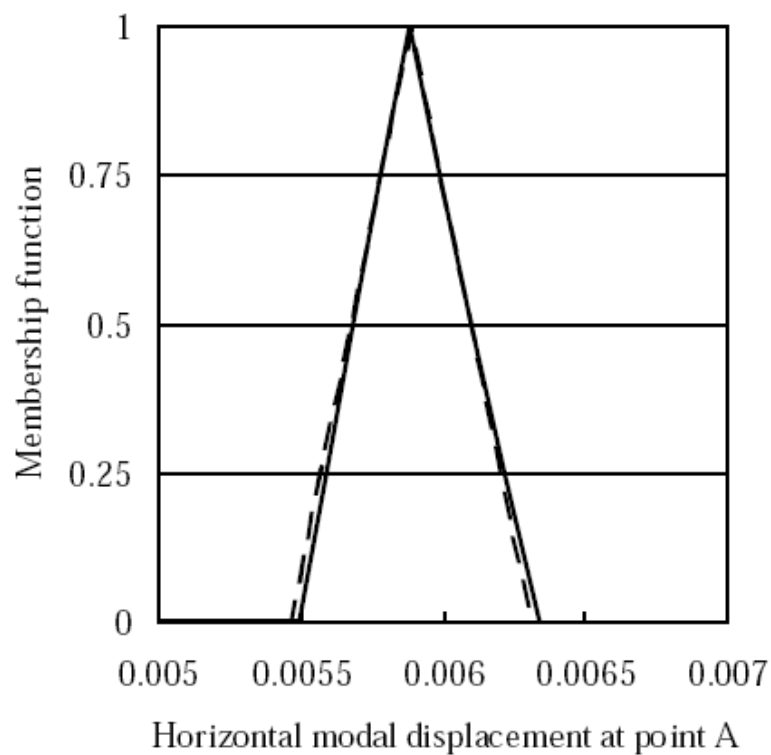












Kmitání rovinné rámové konstrukce způsobené zemětřesením

pohybová rovnice

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = f$$

rozklad do vlastních tvarů

$$d = Vu$$

pohybová rovnice v případě zatížení seismicitou

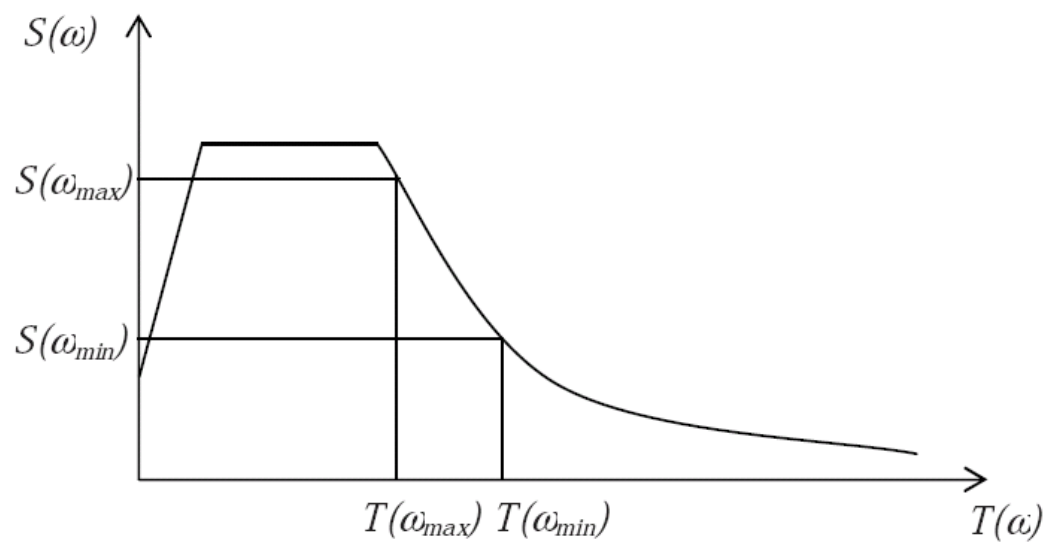
$$V^T M V \ddot{u} + V^T C V \dot{u} + V^T K V u = -V^T M s \ddot{d}_g$$

soustava nezávislých rovnic

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{\Omega}_0^2\mathbf{u} = -\mathbf{h}$$

$$\ddot{u}_i + D_i\dot{u}_i + \omega_{0,i}^2 u_i = h_i$$

$$y_i = \frac{S(\omega_{0,i})}{\omega_{0,i}^2}$$

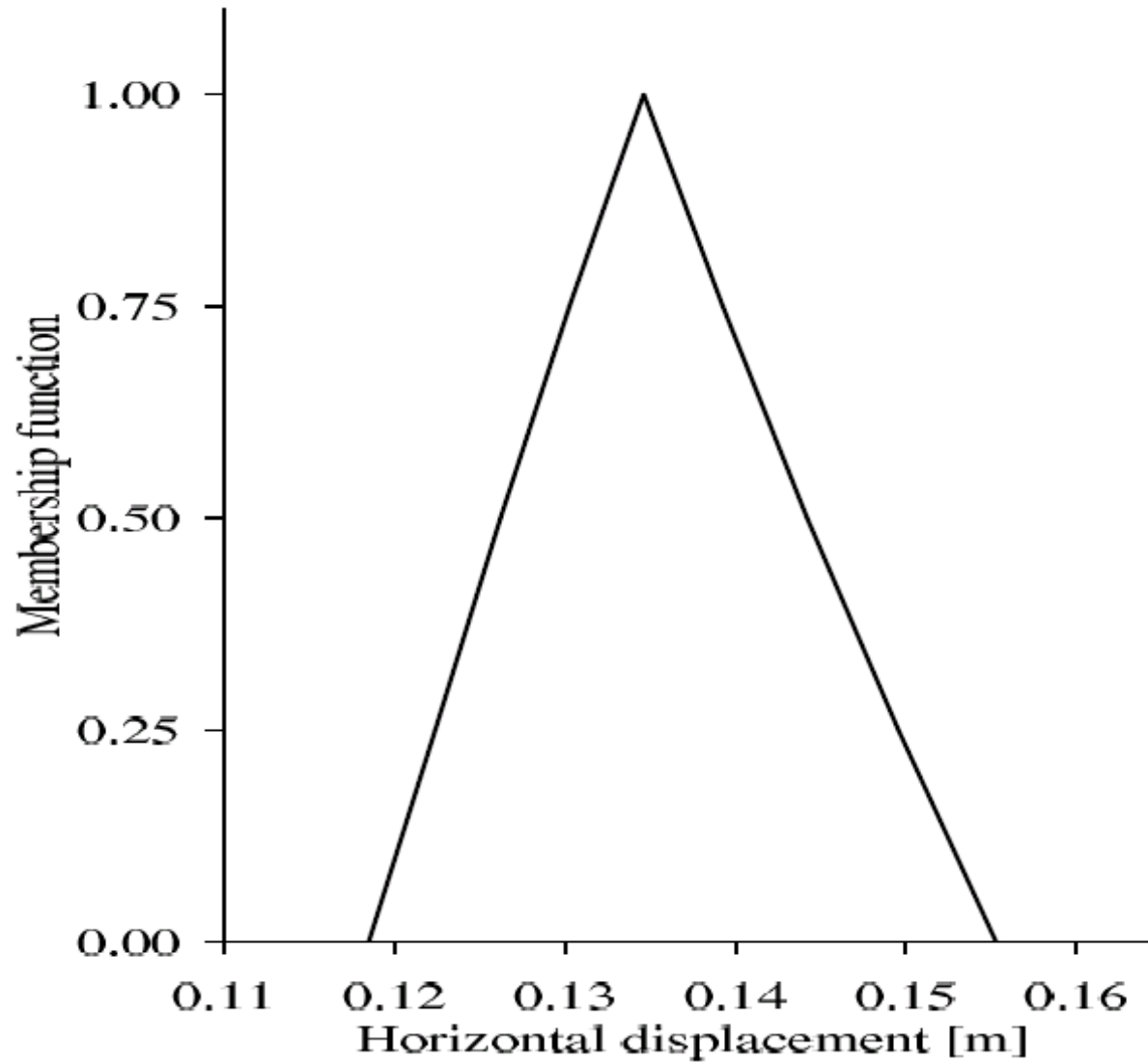


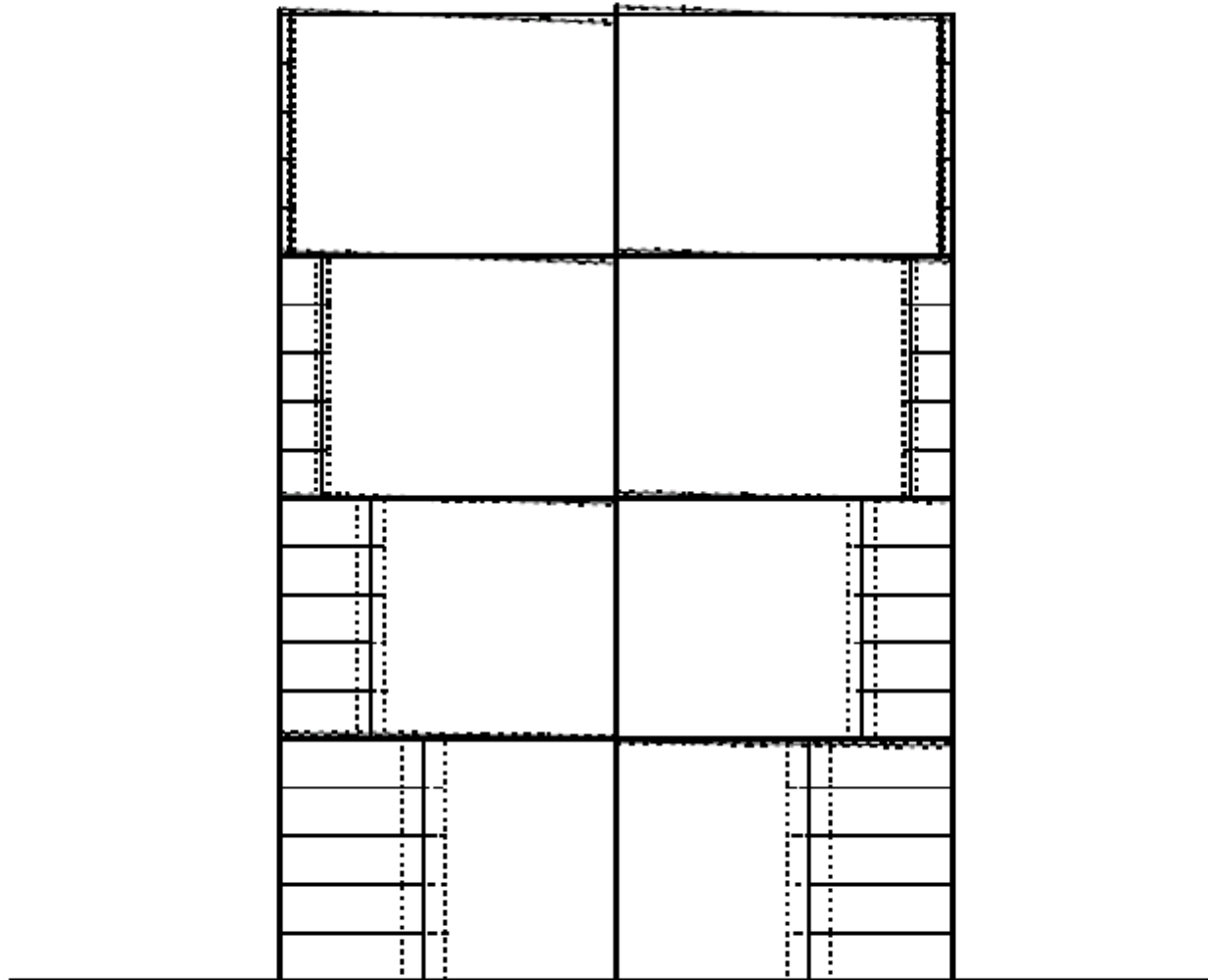
posuny

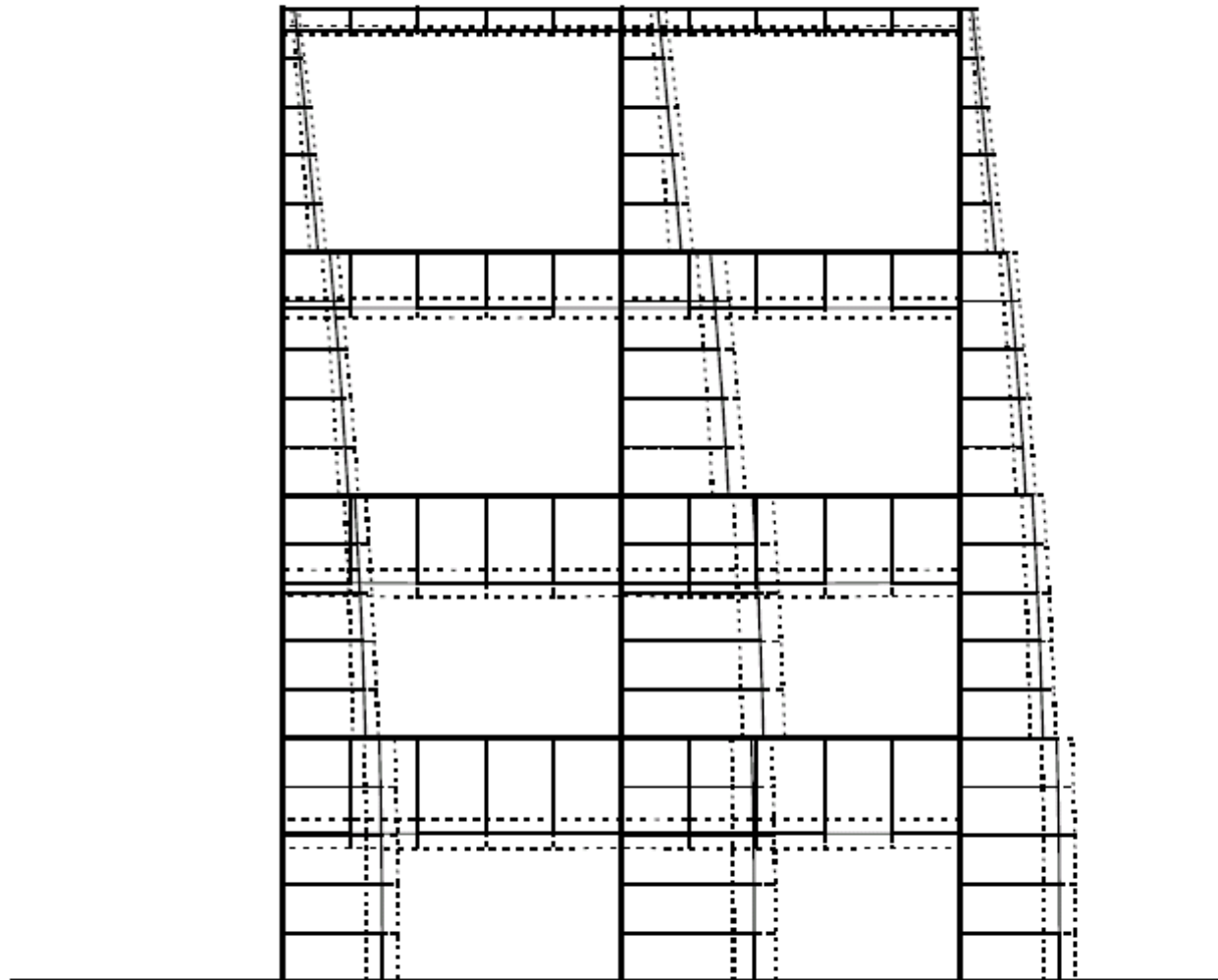
$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{i=n} (\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{s} y_i) \mathbf{v}_i$$

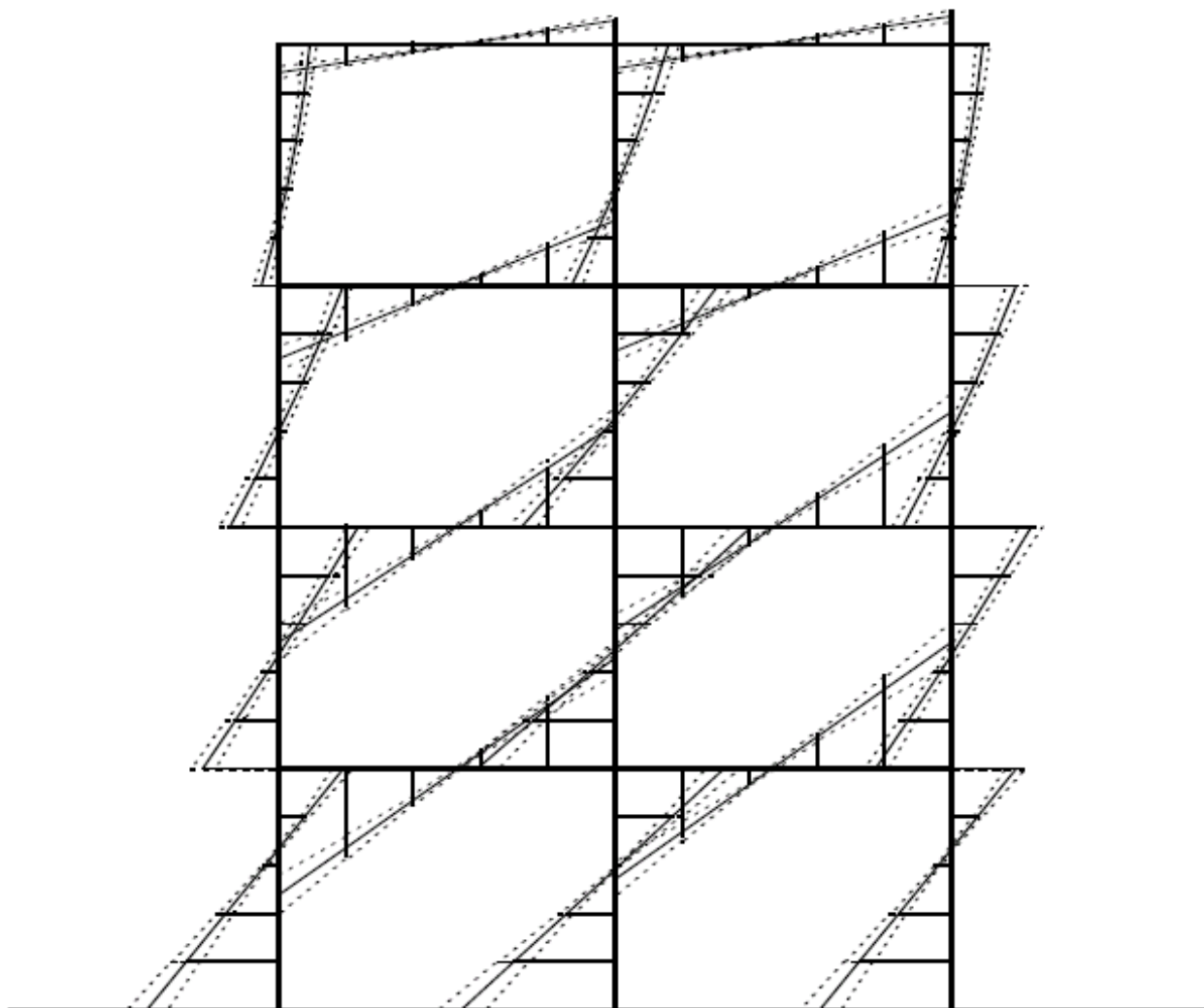
síly a momenty

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K} - \omega_0^2 \mathbf{M}) \mathbf{d}$$



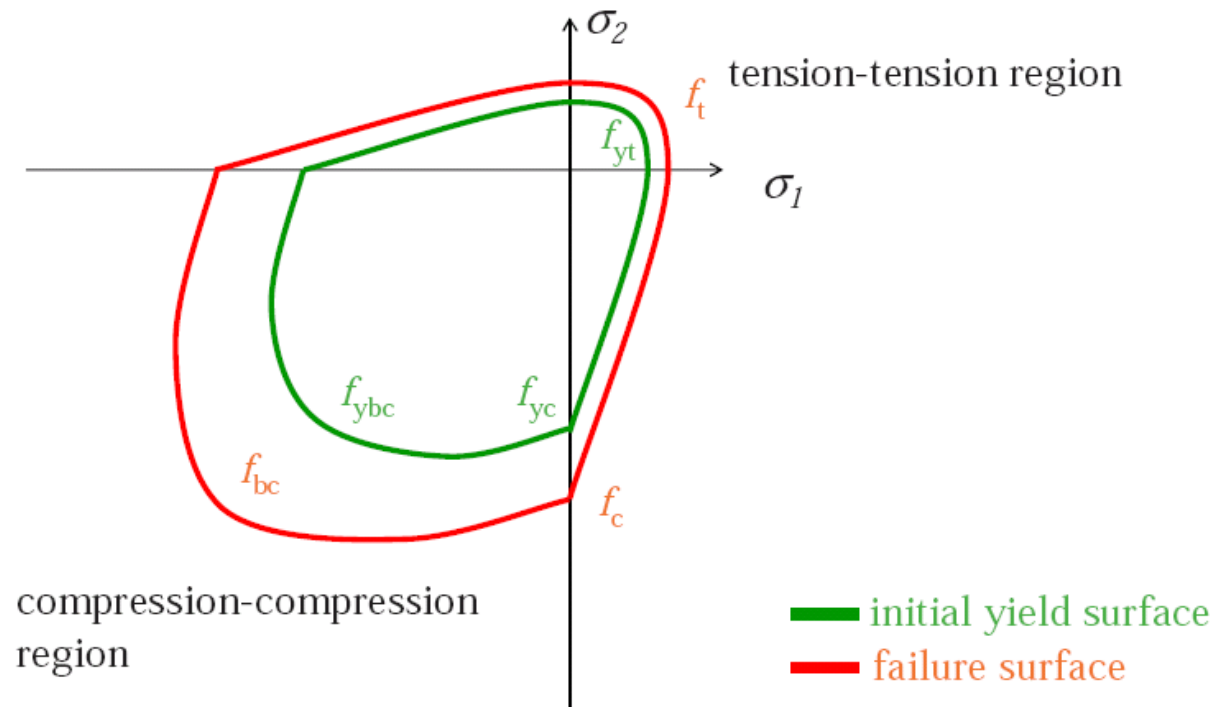






Fuzzifikace Chenova modelu plasticity

Loading surfaces of concrete in biaxial-stress plane:



Initial yield surface in compression-compression region:

$$f_0^c(\sigma) = J_2 + \frac{A_0}{3} I_1 - \tau_0^2 = 0$$

Initial yield surface in compression-compression region:

$$f_u^c(\sigma) = J_2 + \frac{A_u}{3} I_1 - \tau_u^2 = 0$$

Formulae for material constants (obtained by simple tests):

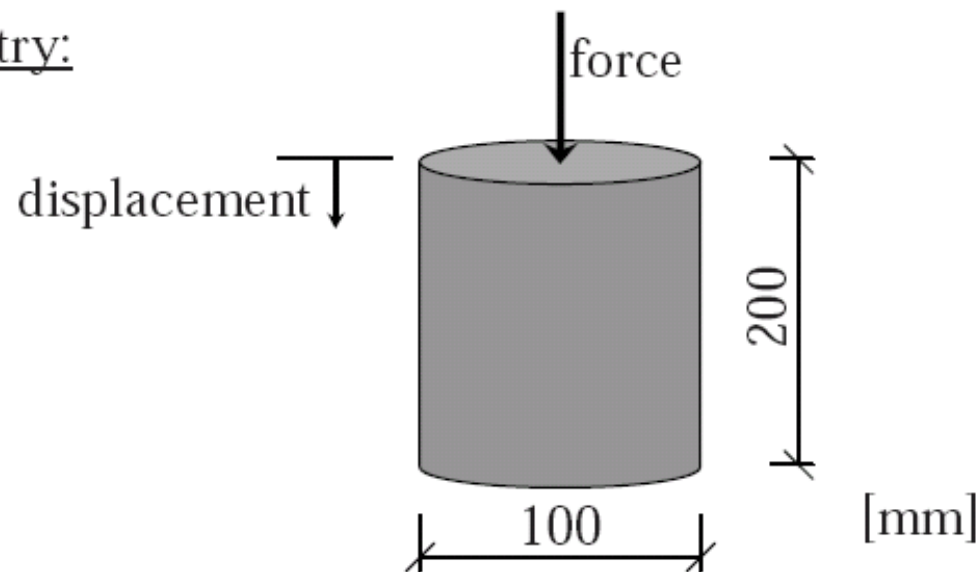
$$A_0 = \frac{f_{ybc}^2 - f_{yc}^2}{2 f_{ybc} - f_{yc}}$$

$$\tau_0^2 = \frac{f_{yc} f_{ybc} (2 f_{yc} - f_{ybc})}{3(2 f_{ybc} - f_{yc})}$$

$$A_u = \frac{f_{bc}^2 - f_c^2}{2 f_{bc} - f_c}$$

$$\tau_u^2 = \frac{f_{yc} f_{ybc} (2 f_{yc} - f_{ybc})}{3(2 f_{ybc} - f_{yc})}$$

Geometry:

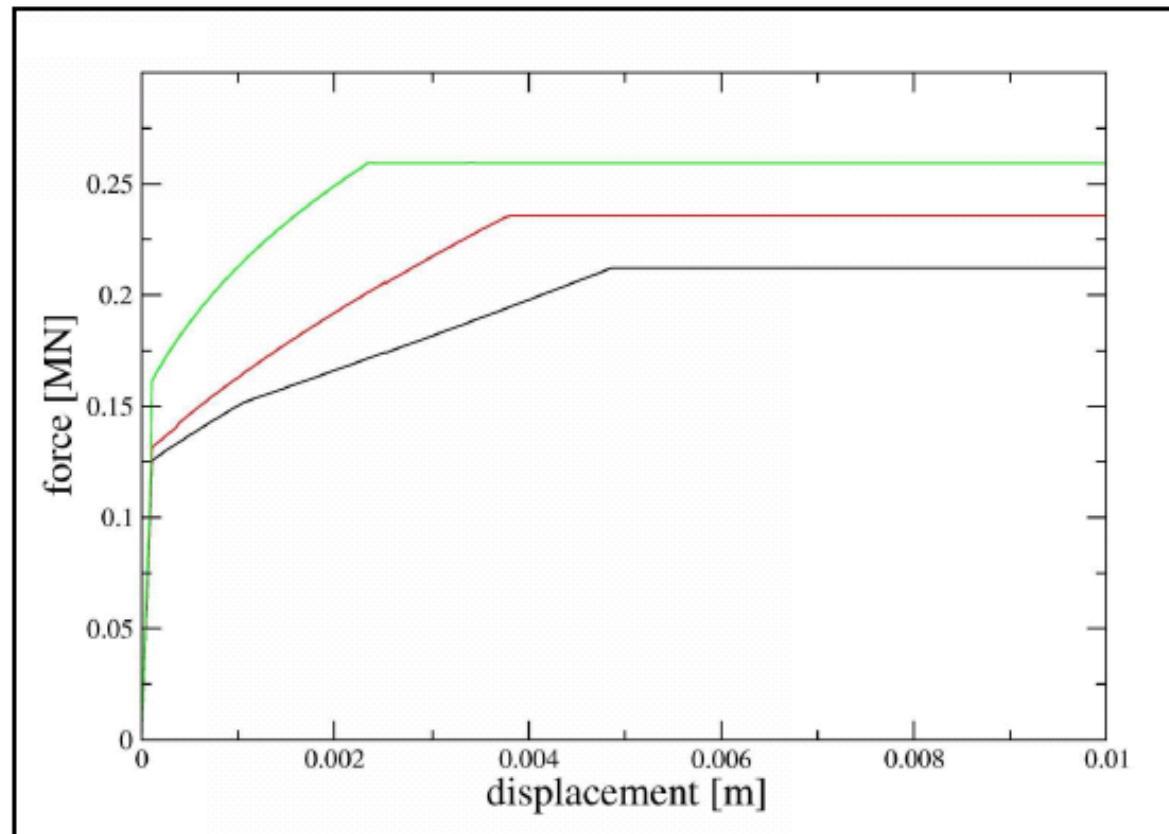


Material strength characteristics in [MPa]:

f_c	f_{yc}	f_t	f_{yt}	f_{bc}	f_{ybc}
30	18	2.7	1.6	34.8	21

← vary by $\pm 10\%$

Force-displacement diagram:



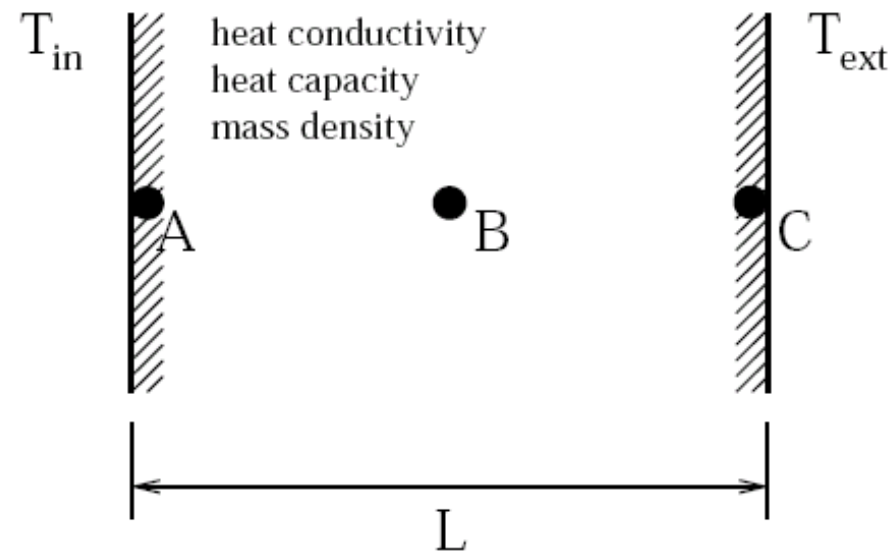
Vedení tepla stěnou

rovnice nestacionárního vedení tepla

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + z = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

conductivity	$1.67 \text{ J}/(\text{msK})$
heat capacity	$840 \text{ J}/(\text{kgK})$
mass density	$2400 \text{ kg}/\text{m}^3$

Table 1: Material characteristics



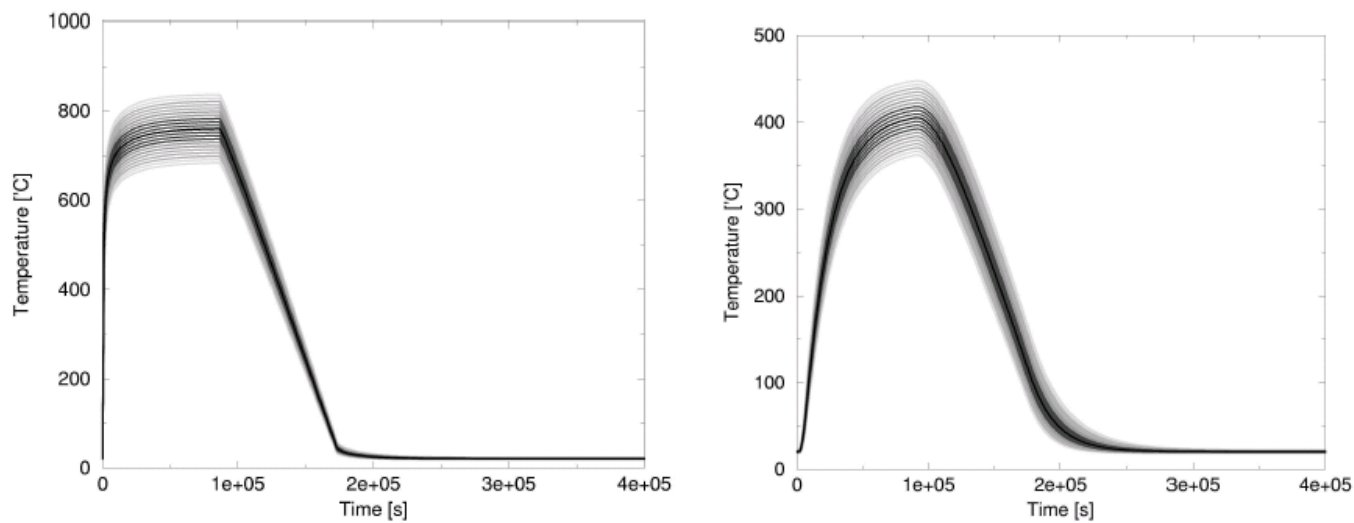


Figure 2: Temperature in A and B

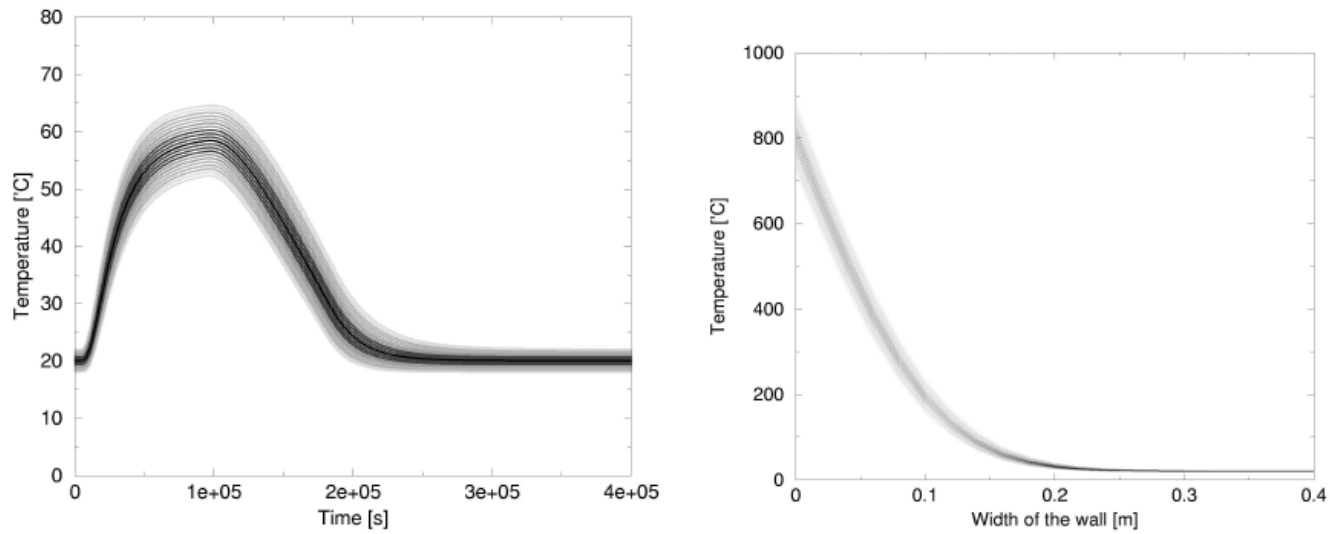


Figure 3: Temperature in C and temperature in wall after 1 hour

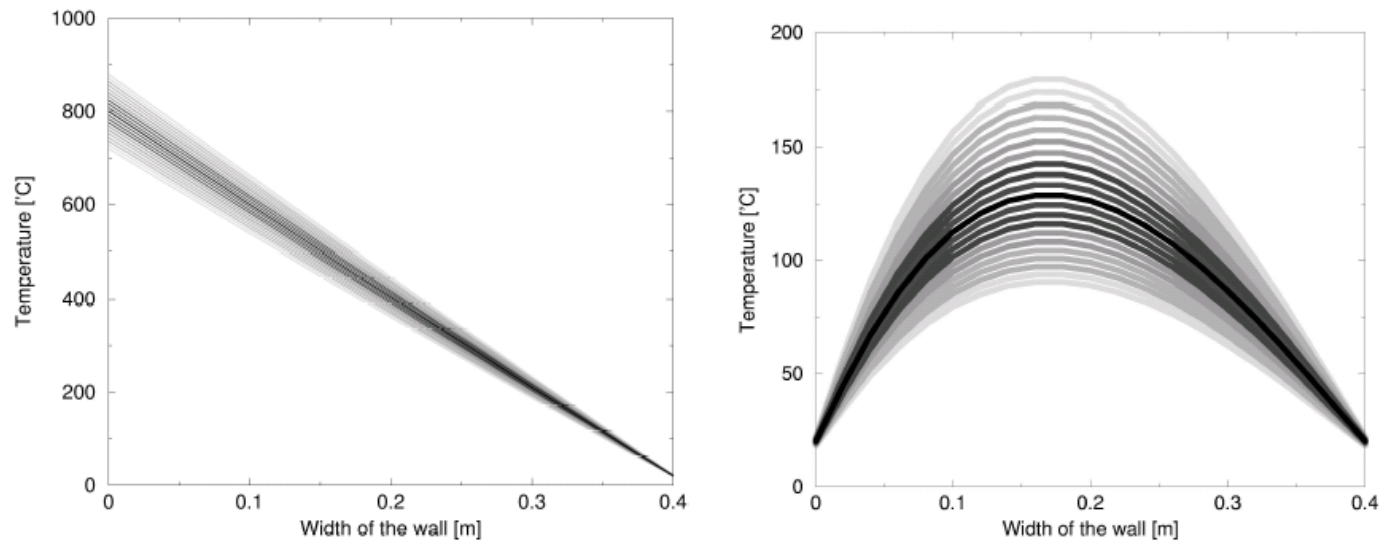


Figure 4: Temperature in wall after 1 day and 2 days

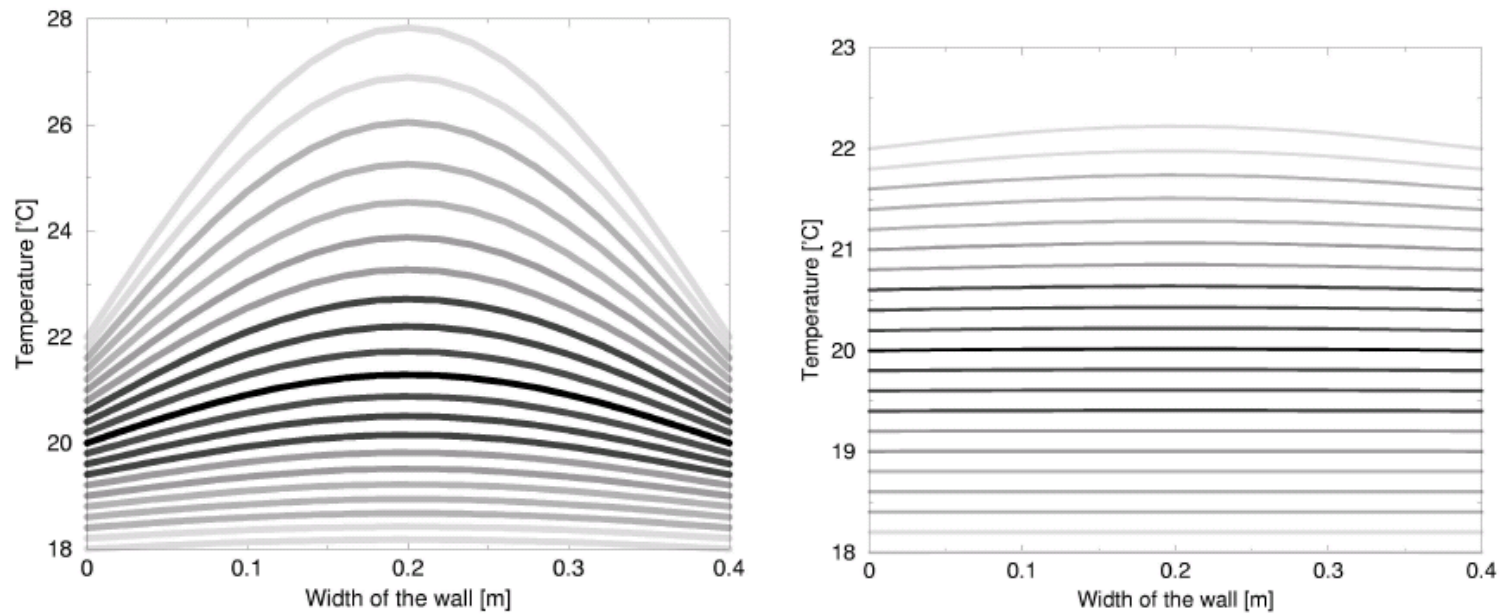


Figure 5: Temperature in wall after 3 days and 4 days

Paralelizace

- metoda α -řezů vede na velký počet výpočtů (v problému kmitání rovinné rámové konstrukce se jednalo o $3^{2 \times 4} = 6561$ a $5^{2 \times 4} = 390625$ výpočtů)
- jednotlivé výpočty jsou nezávislé
- snadná paralelizace

jednoprocesorový výpočet	333 s	
paralelní výpočet na 6 procesorech	58 s	55,5 s
paralelní výpočet na 21 procesorech	18 s	15,8 s