

4 NÁHODNÁ VELIČINA

Náhodná veličina je veličina, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu (je-li tento výsledek dán reálným číslem). Jde o reálnou funkci definovanou na základním prostoru a charakterizovanou distribuční funkcí.

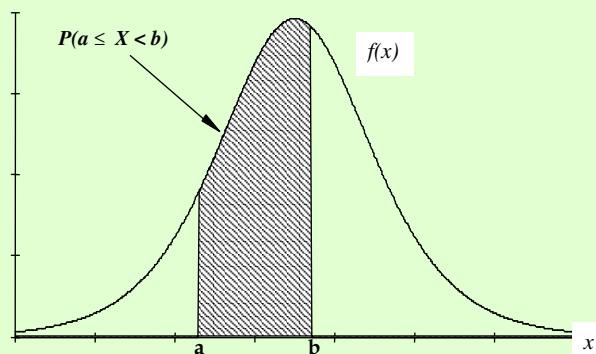
Distribuční funkce je definována jako $F(x) = P(X < x)$, jde tedy o funkci, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než toto reálné číslo.

Pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu určujeme na základě těchto vztahů:

$$P(X < a) = F(a)$$

$$P(X \geq b) = 1 - F(b)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$



Podle toho, jakých může náhodná veličina nabýt hodnot (resp. z jakého intervalu), rozlišujeme spojitou a diskrétní náhodnou veličinu, přesněji řečeno náhodnou veličinu se **spojitým a diskrétním rozdělením**.

Diskrétní náhodná veličina je náhodnou veličinou, která může nabývat pouze konečného nebo spočetně nekonečného množství hodnot (např. výsledek hodu kostkou). Diskrétní náhodnou veličinu popisujeme prostřednictvím **pravděpodobnostní funkce**, popř. **distribuční funkce**.

Spojité náhodné veličiny je náhodnou veličinou, která může nabývat všech hodnot z libovolného konečného nebo nekonečného intervalu (např. životnost žárovky). Pro popis spojité náhodné veličiny používáme **distribuční funkci**, **hustotu pravděpodobnosti** a v případě, že jde o nezápornou spojitou náhodnou veličinu používáme také **intenzitu poruch**. Intenzita poruch má pro většinu výrobků z technické praxe charakteristický tvar vanové křivky.

V mnoha případech je výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině do několika čísel, které charakterizují některé vlastnosti náhodné veličiny, případně umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny**. Mezi základní číselné charakteristiky řadíme např. **střední hodnotu**, **rozptyl**, **směrodatnou odchylku**, **kvantily**, **modus**, **šikmost** a **špičatost**.

V případě, že $g(x)$ je nějaká prostá reálná funkce, definovaná na základním souboru náhodné veličiny X , můžeme snadno odvodit rozdělení **transformované náhodné veličiny** $Y = g(X)$.

Diskrétní náhodná veličina

4.1. Mějme náhodnou veličinu X definovanou jako výsledek hodu klasickou pravidelnou kostkou. Určete typ NV, její pravděpodobnostní a distribuční funkci (zakreslete).

Řešení:

X ... výsledek hodu kostkou

Základní soubor NV X (množina všech možných výsledků): $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Vzhledem k tomu, že základní soubor je tvořen konečně mnoha (šesti) hodnotami, jedná se o **diskrétní NV**

Pravděpodobnostní funkce této NV je uvedena v následující tabulce:

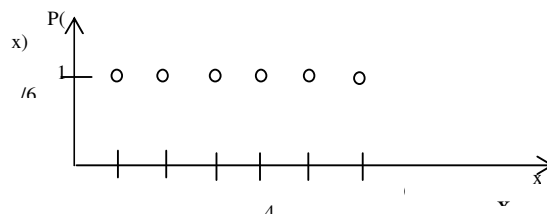
x_i	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

(např. $P(X=1)$ čteme: pravděpodobnost, že výsledek hodu kostkou je 1). V tabulce jsou přitom uvedeny pouze **nenulové** hodnoty pravděpodobnostní funkce. Je zřejmé, že platí:

$$\forall x_i \in R \setminus \Omega : P(X = x_i) = 0$$

(např. $P(X=1,5)=P(X=-3)= \dots = 0$). Všimněte si zároveň, že je splněna 2. část definice **diskrétní NV**: $\sum_{(i)} P(X = x_i) = 1$

Na následujícím obrázku pak vidíme grafickou podobu pravděpodobnostní funkce (izolované body).



Dále se pokusíme na základě definice určit distribuční funkci. Z vlastností distribuční funkce vyplývá, že body nespojitosti této funkce jsou ty body, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová ($P(X = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0)$). Proto si určíme hodnoty distribuční funkce na všech intervalech vymezených body nespojitosti.

např.:

$\forall x \in (-\infty; 1): F(x) = P(X < x) = 0$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 1)

$\forall x \in (1; 2): F(x) = P(X < x) = 1/6$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 2)

$\forall x \in (2; 3): F(x) = P(X < x) = 2/6$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 3)

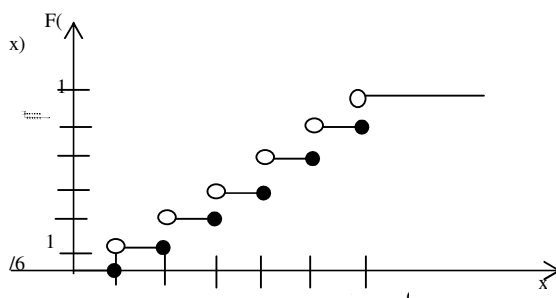
.....

Hodnoty distribuční funkce na celém definičním oboru (\mathbb{R}) jsou uvedeny v následující tabulce.

x_i	$F(x_i)$
$(-\infty; 1>$	0
$(1; 2>$	1/6
$(2; 3>$	2/6
$(3; 4>$	3/6
$(4; 5>$	4/6
$(5; 6>$	5/6
$(6; \infty)$	1

Na grafu distribuční funkce si všimněte jejich vlastností:

- neklesající
- zleva spojitá
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $P(X = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} F(x) - F(x_0)$, tj.:
 - distribuční funkce je nespojitá v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová
 - velikost „skoku“ v bodech nespojitosti je rovna příslušné pravděpodobnosti



4.2. V osudí je 5 bílých a 7 červených míčků. Náhodná veličina X představuje počet bílých míčků mezi pěti vybranými. Vytvořte pravděpodobnostní a distribuční funkci této náhodné veličiny.

Řešení:

Náhodná veličina X nabývá hodnot $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

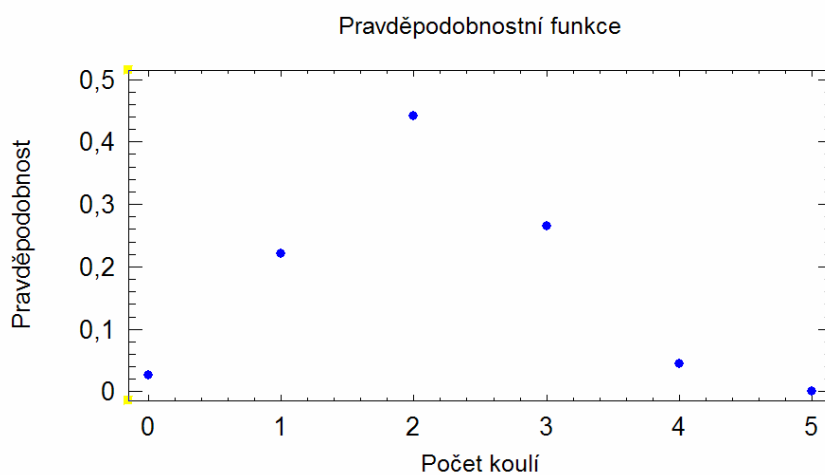
Z teorie pravděpodobnosti víme, že se jedná o opakované závislé pokusy. Je zřejmé, že jde o diskrétní náhodnou veličinu, můžeme tedy sestavit **pravděpodobnostní funkci**:

$$p(x_i) = \frac{\binom{5}{x_i} \cdot \binom{7}{5-x_i}}{\binom{12}{5}}$$

Dosažením jednotlivých hodnot náhodné veličiny do pravděpodobnostní funkce získáme **pravděpodobnostní tabulku**:

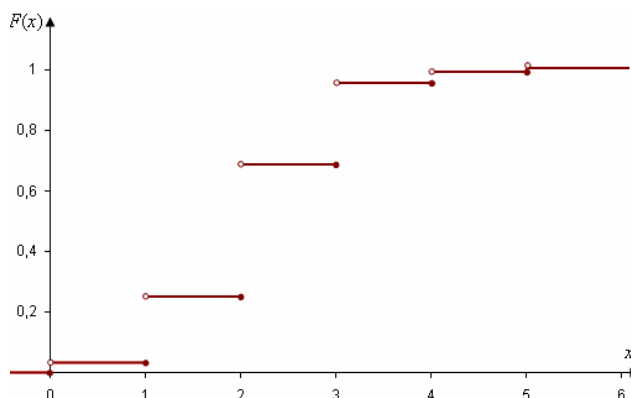
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	$\frac{21}{792}$	$\frac{175}{792}$	$\frac{350}{792}$	$\frac{210}{792}$	$\frac{35}{792}$	$\frac{1}{792}$

Grafické zobrazení pravděpodobnostní funkce (bodový graf):



Distribuční funkce:

x_i	$F(x_i)$
$(-\infty; 0>$	0
$(0; 1>$	$21/792$
$(1; 2>$	$196/792$
$(2; 3>$	$546/792$
$(3; 4>$	$756/792$
$(4; 5>$	$791/792$
$(5; \infty)$	$792/792=1$



Spojitá náhodná veličina

4.3. Necht' Y je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti:

$$f(y) = \begin{cases} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

- a) nalezněte konstantu c ,
 b) zakreslete $f(y)$
 c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci $F(y)$,
 d) určete: $P(0 < Y < 1)$, $P(Y > 0,5)$, $P(Y=0,3)$

Řešení:

- a) pro nalezení konstanty c využijeme toho, že: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 c(1-t^2) dt + \int_1^{\infty} 0 dt = 1$$

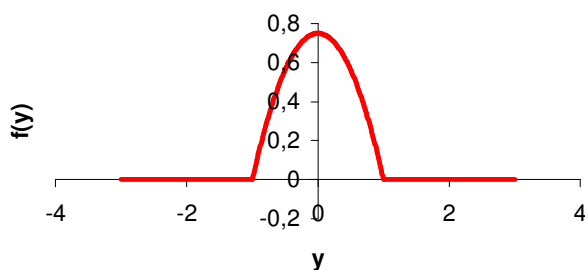
$$0 + c \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + 0 = 1$$

$$c \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)}{3}\right) \right] = 1$$

$$c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4} = 0,75$$

- b) $f(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Hustota pravděpodobnosti



- c) Distribuční funkci určíme z definice: $F(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt$ pro $-\infty < y < \infty$

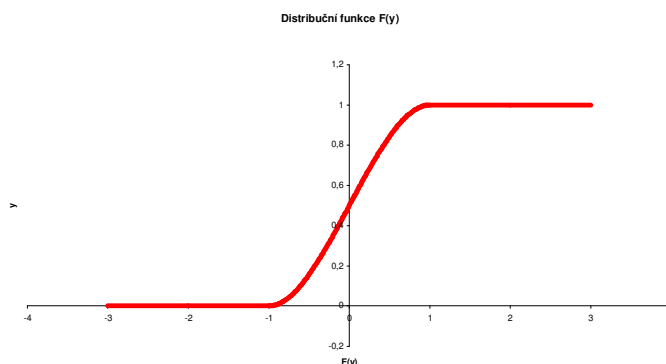
$$\text{Pro } -\infty < y < -1: \underline{\underline{F(y) = \int_{-\infty}^y 0 dt = 0}}$$

Pro $-1 \leq y < 1$:

$$\underline{\underline{F(y) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^y \frac{3}{4}(1-t^2) dt = 0 + \frac{3}{4} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^y = \frac{1}{4}(-y^3 + 3y + 2)}}$$

Pro $1 \leq y < \infty$:

$$\underline{\underline{F(y) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-t^2) dt + \int_1^y 0 dt = 0 + \frac{3}{4} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + 0 = 1}}$$



d) Pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny Y na určitém intervalu určíme pomocí příslušných vztahů:

- $\underline{\underline{P(0 < Y < 1) = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1}{4}(0 + 0 + 2) = \frac{1}{2} \sim 50\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y > 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \frac{1}{4}(-(\frac{1}{2})^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2) = 1 - \frac{27}{32} = \frac{5}{32} \sim 15,6\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y = 0,3) = 0}}$

Číselné charakteristiky diskrétní náhodné veličiny

4.4. Vraťme se k dříve definované diskrétní náhodné veličině X – hod kostkou. V jednom z výše řešených příkladu jsme si určili a zakreslili její pravděpodobnostní i distribuční funkci.

x_i	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

x_i	$F(x_i)$
$(-\infty; 1>$	0
$(1; 2>$	1/6
$(2; 3>$	2/6
$(3; 4>$	3/6
$(4; 5>$	4/6
$(5; 6>$	5/6
$(6; \infty)$	1

Nyní určíme:

- a) střední hodnotu
- b) rozptyl
- c) směrodatnou odchylku
- d) medián
- e) modus

Řešení:

$$a) \underline{EX} = \mu = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \underline{\underline{3,5}}$$

$$b) \underline{DX} = \mu_2 = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \sum_{(i)} x_i^2 P(x_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \cong 15,2$$

$$\underline{DX} = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546}{36} - \frac{441}{36} = \underline{\underline{\frac{105}{36} \cong 2,9}}$$

$$c) \underline{\sigma_x} = \sqrt{DX} = \frac{\sqrt{105}}{6} \cong 1,7$$

$$d) x_{0,5} = ?$$

$$F(x_i) = 0,5 \Leftrightarrow x_i \in (3;4)$$

$$\underline{x_{0,5}} = \sup\{(3;4)\} = \underline{4} \quad (\text{ověření: platí, že } 50\% \text{ hodnot náhodné veličiny je } \leq 4)$$

- e) modus je hodnota, pro kterou platí: $P(X = x) \geq P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots$
(tj. hodnota, které nabývá NV s největší pravděpodobností)

Protože v našem případě nabývá NV X všech hodnot se stejnou pravděpodobností, jedná se o **vícemodální rozdělení s mody {1;2;3;4;5;6}**.

Číselné charakteristiky spojité náhodné veličiny

4.5. A nyní najdeme vybrané číselné charakteristiky pro spojitou náhodnou veličinu. Zvolme si náhodnou veličinu Y definovanou takto:

$$f(y) = \begin{cases} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete:

- a) střední hodnotu

- b) rozptyl
 c) směrodatnou odchylku
 d) medián
 e) modus

Řešení:

Nejdříve bychom museli určit konstantu c ze vztahu: $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$

My využijeme toho, že daný problém jsme již výše řešili a můžeme proto přímo převzít výsledek, že $c=0,75$.

$$a) \quad \underline{\underline{EY}} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} y \cdot 0dy + \int_{-1}^1 y \cdot \frac{3}{4}(1-y^2)dy + \int_1^{\infty} y \cdot 0dy = 0 + \frac{3}{4} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{-1}^1 + 0 = 0$$

(výsledek byl očekávatelný, protože hustota pravděpodobnosti NV Y je sudá funkce)

$$b) \quad DY = EY^2 - (EY)^2$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} y^2 \cdot 0dy + \int_{-1}^1 y^2 \cdot \frac{3}{4}(1-y^2)dy + \int_1^{\infty} y^2 \cdot 0dy = 0 + \frac{3}{4} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 + 0 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\underline{\underline{DY}} = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{5}}} = 0,2$$

$$c) \quad \underline{\underline{\sigma_y}} = \sqrt{DY} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}} \cong 0,45$$

$$d) \quad F(y_{0,5}) = 0,5$$

Znovu využijeme toho, že jsme s touto náhodnou veličinou pracovali již dříve a bez opětovného výpočtu použijeme znalosti distribuční funkce $F(y)$.

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < (-1) \\ \frac{1}{4}(-y^3 + 3y + 2) & \text{pro } (-1) \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}$$

Ze vztahu pro distribuční funkci je zřejmé, že medián může být pouze hodnota z intervalu $(-1;1)$:

$$\frac{1}{4}(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2) = 0,5$$

$$(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2) = 2$$

$$-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} = 0$$

$$y_{0,5}(-y_{0,5}^2 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} y_{0,5_1} &= 0 \\ y_{0,5_2} &= \sqrt{3} \notin (-1;1) \\ y_{0,5_3} &= -\sqrt{3} \notin (-1;1) \end{aligned}$$

- e) modus je hodnota, pro kterou platí: $f(\hat{x}) \geq f(x)$ pro $-\infty < x < \infty$
(tj. hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima)

Pro maximum funkce platí, že první derivace v něm musí být nulová (nebo nedefinována) a druhá derivace v něm musí být záporná.

Je zřejmé, že rovněž modus budeme hledat na intervalu $(-1;1)$:

$$\begin{aligned} \frac{df(y)}{dy} &= 0 \\ \left[\frac{3}{4}(1-y^2) \right]' &= 0 \\ \frac{3}{4}(0-2y) &= 0 \\ y &= 0 \dots \text{bod podezřelý z maxima} \end{aligned}$$

Zda se jedná o maximum bychom mohli ověřit z druhé derivace $f''(y)$, ale my využijeme opět toho, že jsme s danou NV pracovali a pohledem na graf $f(y)$ si ověříme, že hustota pravděpodobnosti $f(y)$ skutečně nabývá svého maxima v bodě 0.

$$\underline{\underline{\hat{y} = 0}}$$

Funkce náhodné veličiny

V mnoha případech, kdy známe rozdělení náhodné veličiny X , potřebujeme určit rozdělení náhodné veličiny Y , která je funkcí X , tzn. $Y = g(X)$.

Je-li funkce $g(x)$ v oboru možných hodnot veličiny X **monotónní**, pak existuje inverzní funkce $g^{-1}(y)$, a jde o **vzájemně jednoznačný vztah mezi X a Y** .

Je-li v takovém případě $g(x)$ **rostoucí**, pak pro všechna $x_1 < x_2$ je $y_1 < y_2$ a distribuční funkci veličiny Y lze psát jako:

$$H(y) = P(Y < y) = P[X < g^{-1}(y)] = F[g^{-1}(y)]$$

Pro **klesající funkci $g(x)$** , pak pro všechna $x_1 < x_2$ je $y_1 > y_2$ a distribuční funkci veličiny Y lze psát jako:

$$H(y) = P(Y < y) = P[X > g^{-1}(y)] = 1 - F[g^{-1}(y)]$$

Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, přičemž $g^{-1}(y)$ má pro všechna y spojitou derivaci, pak pro rostoucí funkci $g(x)$ dostaneme hustotu pravděpodobnosti $h(y)$ veličiny Y jako:

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy} = f(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dg^{-1}}{dy} = f(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dx}{dy}$$

Podobně pro klesající funkci $h(x)$ dostaneme:

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy} = -f(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dg^{-1}}{dy} = -f(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dx}{dy}$$

Vzhledem k tomu, že v případě rostoucí funkce $g(x)$ je $\left(\frac{dx}{dy} > 0\right)$, zatímco v případě klesající funkce $g(x)$ je $\left(\frac{dx}{dy} < 0\right)$, lze oba předchozí vztahy spojit do jednoho:

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy} = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy} \right| = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

4.6. Necht' náhodná veličina W je definována jako lineární transformace náhodné veličiny Y .

$$f(y) = \begin{cases} 0,75(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$W = 5Y + 6$$

Nalezněte:

- distribuční funkci $H(w)$ náhodné veličiny W
- hustotu pravděpodobnosti $h(w)$ náhodné veličiny W ,
- střední hodnotu EW náhodné veličiny W
- rozptyl DW náhodné veličiny W .

Řešení:

Stejně jako v předchozích případech využijeme toho, že jsme již s NV Y pracovali (v opačném případě bychom museli nejdříve najít $F(y)$, EY a DY).

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < (-1) \\ \frac{1}{4}(-y^3 + 3y + 2) & \text{pro } (-1) \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}, \quad EY = 0, \quad DY = 0,2$$

$$a) \quad \underline{H(w)} = P(W < w) = P(5Y + 6 < w) = P\left(Y < \frac{w-6}{5}\right) = \underline{F\left(\frac{w-6}{5}\right)}$$

Nyní určíme distribuční funkci $H(w)$ tak, že do předpisu pro distribuční funkci $F(y)$ dosadíme za y výraz $\left(\frac{w-6}{5}\right)$.

$$H(w) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \left(\frac{w-6}{5}\right) < -1 \\ \frac{1}{4} \left(-\left(\frac{w-6}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{w-6}{5}\right) + 2 \right) & \text{pro } -1 \leq \left(\frac{w-6}{5}\right) \leq 1 \\ 1 & \text{pro } \left(\frac{w-6}{5}\right) > 1 \end{cases}$$

$$H(w) = \begin{cases} 0 & \text{pro } w < 1 \\ -\frac{1}{500}(w^3 - 18w^2 + 33w - 16) & \text{pro } 1 \leq w \leq 11 \\ 1 & \text{pro } w > 11 \end{cases}$$

b) Hustotu pravděpodobnosti určíme jako derivaci distribuční funkce:

$$h(w) = \frac{dH(w)}{dw}$$

$$h(w) = \begin{cases} -\frac{1}{500}(3w^2 - 36w + 33) & \text{pro } 1 \leq w \leq 11 \\ 0 & \text{pro } (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

po úpravě:

$$h(w) = \begin{cases} -\frac{3}{500}(w^2 - 12w + 11) & \text{pro } 1 \leq w \leq 11 \\ 0 & \text{pro } (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

c) Z vlastností střední hodnoty plyne, že:

$$\underline{EW} = E(5Y + 6) = 5.EY + 6 = 5.0 + 6 = \underline{6}$$

d) Z vlastností rozptylu plyne, že:

$$\underline{DW} = D(5Y + 6) = 5^2.DY = 25.0,2 = \underline{5}$$

4.7. Necht' náhodná veličina X má spojitou rostoucí distribuční funkci $F(x)$. Najděte distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = F(X)$.

Řešení:

$$Y = F(x)$$

- $F(x)$ nabývá pro $x \in \mathbb{R}$ hodnot z intervalu $\langle 0; 1 \rangle \Rightarrow$ náhodná veličina Y nabývá rovněž hodnot z intervalu $\langle 0; 1 \rangle \Rightarrow$

$$\text{pro } y < 0 \dots H(y) = 0$$

$$\text{pro } y > 1 \dots H(y) = 1$$

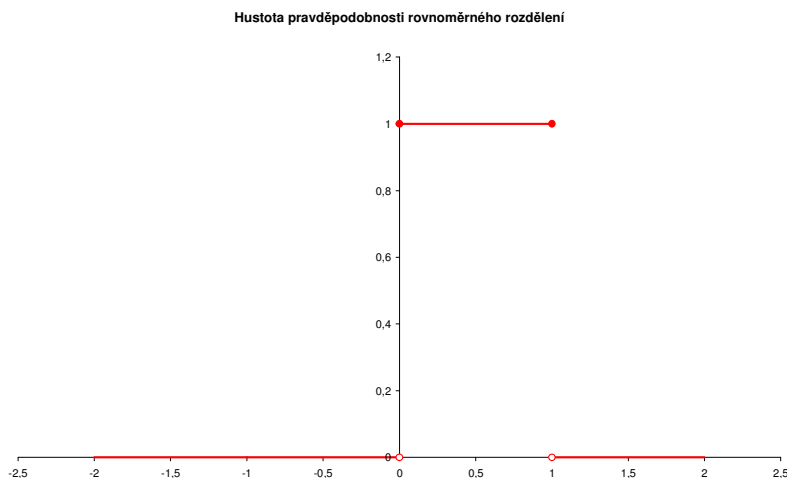
$$\text{pro } 0 \leq y \leq 1 \dots H(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y) = P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

$$H(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ y & \text{pro } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}$$

- Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny Y

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy}$$

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \in \langle 0; 1 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Náhodná veličina Y má tzv. **rovnoměrné (rektangulární) rozdělení v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$** .

4.8. Necht' veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. Jaké rozdělení má veličina $Y = \operatorname{tg} X$? Nalezněte hustotu pravděpodobnosti NV Y.

Řešení:

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi} & \text{na } \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$g(x) = y = \operatorname{tg} x \Rightarrow g^{-1}(y) = x = \operatorname{arctg} y$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \left| \frac{d(\operatorname{arctg} y)}{dy} \right| = \left| \frac{1}{1+y^2} \right| = \frac{1}{1+y^2}$$

Hustota pravděpodobnosti veličiny Y je tedy:

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in R$$

Uvedené **rozdělení** se nazývá **Cauchyho**. Je příkladem rozdělení, které nemá konečný rozptyl:

$$\begin{aligned} DY &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2+1-1}{(1+y^2)} dy = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} 1 dy - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)} dy \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} [\infty - \pi] = \infty \end{aligned}$$

4.9. Necht' veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle 0; \pi \rangle$. Jaké rozdělení má veličina $Y = \cot g X$? Nalezněte distribuční funkci NV Y.

Řešení:

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi} & \text{na } \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$:

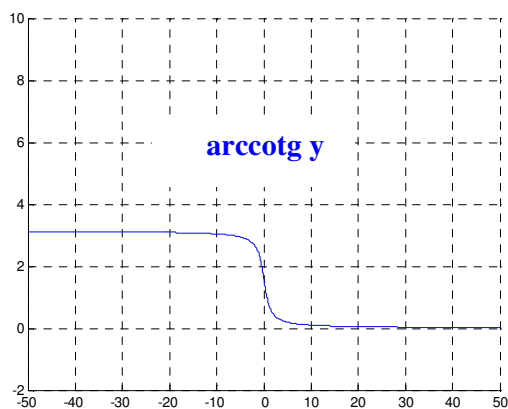
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{\pi} dt = \frac{1}{\pi} x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 1 & x \in (\pi; \infty) \end{cases}$$

Distribuční funkce NV Y:

$$H(y) = P(Y < y) = P(\cot g X < y) = P(X > \operatorname{arccotg} y) = 1 - F(\operatorname{arccotg} y)$$

$$H(y) = \begin{cases} 1 - 0 & \operatorname{arccotg} y \in (-\infty; 0) \\ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} y & \operatorname{arccotg} y \in \langle 0; \pi \rangle \\ 1 - 1 & \operatorname{arccotg} y \in (\pi; \infty) \end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že obor hodnot funkce $\operatorname{arccotg} x$ je $(0; \pi)$:



$$H(y) = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} y \quad y \in \mathbb{R}$$
