Martina Litschmannová

NÁHODNÁ VELIČINA – PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1. Pro distribuční funkci náhodné veličiny X platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0{,}00 & x \leq 100 \\ 0{,}15 & 100 < x \leq 200 \\ 0{,}45 & 200 < x \leq 300 \\ 0{,}80 & 300 < x \leq 500 \\ 1{,}00 & x > 500 \end{cases}$$

a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X, její střední hodnotu a směrodatnou odchylku.

(

$\boldsymbol{x}$	100	200	300	500
$\boldsymbol{P(x)}$	0,15	0,30	0,35	0,20

$\boldsymbol{E(X) = 280;\ \sigma(X) = 128{,}8}$)

b) Náhodná veličina $Y = \frac{100-X}{100}$, určete $F_Y(y),\ P_Y(y),\ E(Y)$ a $D(Y)$.

(

$\boldsymbol{y}$	-4	-2	-1	0
$\boldsymbol{P(y)}$	0,20	0,35	0,30	0,15

$$\boldsymbol{F(y) = \begin{cases} 0{,}00 & x \leq -4 \\ 0{,}20 & -4 < x \leq -2 \\ 0{,}55 & -2 < x \leq -1 \\ 0{,}85 & -1 < x \leq 0 \\ 1{,}00 & x > 0 \end{cases}}$$

$\boldsymbol{E(Y) = -1{,}8;\ D(Y) = 1{,}7}$)

c) Náhodná veličina $W = Y^2$, určete $F_W(w),\ P_W(w),\ E(W)$ a $D(W)$.

(

$\boldsymbol{w}$	0	1	4	16
$\boldsymbol{P(w)}$	0,15	0,30	0,35	0,20

$$\boldsymbol{F(w) = \begin{cases} 0{,}00 & w \leq 0 \\ 0{,}15 & 0 < w \leq 1 \\ 0{,}45 & 1 < w \leq 4 \\ 0{,}80 & 4 < w \leq 16 \\ 1{,}00 & w > 16 \end{cases}}$$

$\boldsymbol{E(W) = 4{,}9;\ D(W) = 33{,}1}$)

2. Na skládce leží 20 solárních panelů. 5 z nich má skrytou vadu.
   a) Popište rozdělení náhodné veličiny X, kde X je počet panelů se skrytou vadou ze 4 náhodně vybraných. (pravděpodobnostní funkce, distribuční funkce, střední hodnota, směrodatná odchylka)

(

$\boldsymbol{w}$	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{P(w)}$	0,282	0,469	0,217	0,031	0,001

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0,000} & \boldsymbol{x \leq 0} \\ \mathbf{0,282} & \boldsymbol{0 < x \leq 1} \\ \mathbf{0,751} & \boldsymbol{1 < x \leq 2} \\ \mathbf{0,968} & \boldsymbol{2 < x \leq 3} \\ \mathbf{0,999} & \boldsymbol{3 < x \leq 4} \\ \mathbf{1,000} & \boldsymbol{x > 4} \end{cases}$$

$\boldsymbol{E(X) = 1,00;\ \sigma(X) = 0,80}$)

   b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi čtyřmi náhodně vybranými panely budou méně než 3 panely se skrytou vadou? (**0,968**)

3. Předpokládejme, že X má diskrétní rozdělení takové, že platí $P(X = k) = ck^2$ pro $k = 1;\ 2;\ 3$ a $P(X = k) = 0$ jinak. Určete:
   a) hodnotu c, (**1/14**)
   b) distribuční funkci náhodné veličiny X,

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,\mathbf{1}\rangle$	$(\mathbf{1},\mathbf{2}\rangle$	$(\mathbf{2},\mathbf{3}\rangle$	$(\mathbf{3},\infty)$
$\boldsymbol{F(x)}$	**0**	**1/14**	**5/14**	**1**

   c) střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient náhodné veličiny X,

($\boldsymbol{E(X) = \frac{18}{7}; \hat{X} = 3; \sigma(X) = 0,62; V(X) = 24}$ %)

   d) $P(X < 2), P(X\epsilon\{1;3\})$.

($\boldsymbol{P(X < 2) = \frac{1}{14};\ P(X\epsilon\{1;3\}) = \frac{5}{7}}$)

4. V krabici je pět bílých a tři modré koule. Z krabice náhodně vybíráme vždy jednu kouli a tuto kouli již do krabice nevracíme.
   a) Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X, popisující počet pokusů nutných k vytažení modré koule.

(

$\boldsymbol{x}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{P(x)}$	**0,375**	**0,268**	**0,179**	**0,107**	**0,054**	**0,017**

$\boldsymbol{x}$	$(-\infty,\mathbf{1}\rangle$	$(\mathbf{1},\mathbf{2}\rangle$	$(\mathbf{2},\mathbf{3}\rangle$	$(\mathbf{3},\mathbf{4}\rangle$	$(\mathbf{4},\mathbf{5}\rangle$	$(\mathbf{5},\mathbf{6}\rangle$	$(\mathbf{6},\infty)$
$\boldsymbol{F(x)}$	**0,000**	**0,375**	**0,643**	**0,822**	**0,929**	**0,983**	**1,000**

)

   b) Určete střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient počtu pokusů nutných k vytažení modré koule.

($\boldsymbol{E(X) = 2,2; \hat{X} = 1; \sigma(X) = 1,3; V(X) = 57}$ %)

5. Nezávislé náhodné veličiny X a Y mají následující střední hodnotu a rozptyl: $E(X) = 1$, $E(Y) = 3$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 9$. Definujme náhodné veličiny Z a Q jako $Z = 4X - 2Y + 12$ a $Q = -2X + Y - 7$. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin Z a Q.

($\boldsymbol{E(Z) = 10; D(Z) = 100; E(Q) = -6; D(Q) = 25}$)

6. Náhodná veličina X je charakterizována hustotou pravděpodobnosti ve tvaru:

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & x \in \langle 0; 2 \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; 2 \rangle \end{cases}$$

Určete:

a) hodnotu c, $\left(\frac{3}{8}\right)$

b) distribuční funkci náhodné veličiny X,

$$\left(\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2(3 - x) & 0 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}} \right)$$

c) střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient náhodné veličiny X,

$$(\boldsymbol{E(X) = 1; \widehat{X} = 1; \sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{5}; V(X) = 45\ \%})$$

d) dolní kvartil náhodné veličiny X, $(\boldsymbol{x_{0,25} \cong 0,653}, \boldsymbol{řešeno\ s\ využitím\ Wolfram\ Alpha})$

e) $P(X = 1), P(X < 3), P(X > 0{,}5)$. $\left(\boldsymbol{0; 1; \frac{27}{32}}\right)$

.

7. Náhodná veličina Y je definována jako $Y = 3X + 1$, kde X je náhodná veličina z předcházejícího příkladu. Určete:
   a) distribuční funkci náhodné veličiny Y,

$$\left(\boldsymbol{F(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{1}{108}(-y^3 + 12y^2 - 21y + 10) & 1 < y \leq 7 \\ 1 & y > 7 \end{cases}} \right)$$

   b) hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y,

$$\left(\boldsymbol{f(y) = \begin{cases} \frac{1}{108}(-3y^2 + 24y - 21) & y \in \langle 1; 7 \rangle \\ 0 & y \notin \langle 1; 7 \rangle \end{cases}} \right)$$

   c) střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient náhodné veličiny Y,

$$\left(\boldsymbol{E(Y) = 4; \widehat{Y} = 4; \sigma(Y) = \frac{3\sqrt{5}}{5}; V(Y) \cong 34\ \%} \right)$$

   d) 30% kvantil náhodné veličiny Y.

$$\left(\boldsymbol{x_{0,3} \cong 3,180}, \textbf{ řešeno s využitím Wolfram Alpha} \right)$$

8. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{matrix} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2. \end{matrix}$$

   Určete její:
   a) hustotu pravděpodobnosti,

$$\left(\boldsymbol{f(x) = \begin{matrix} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & jinde \end{matrix}} \right)$$

   b) modus, $\left(\boldsymbol{\widehat{X} = 2} \right)$
   c) median, $\left(\boldsymbol{x_{0,5} = 1,41} \right)$
   d) střední hodnotu a rozptyl, $\left(\boldsymbol{E(X) = \frac{4}{3}; D(X) = \frac{2}{9}} \right)$
   e) $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$. (**0,5**)

9. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1e^{-0{,}1x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

   Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

$$\left(\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-0{,}1x} & x > 0 \end{cases}; E(X) = 10, D(X) = 100} \right)$$