Úvod do teorie odhadu

Martina Litschmannová

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

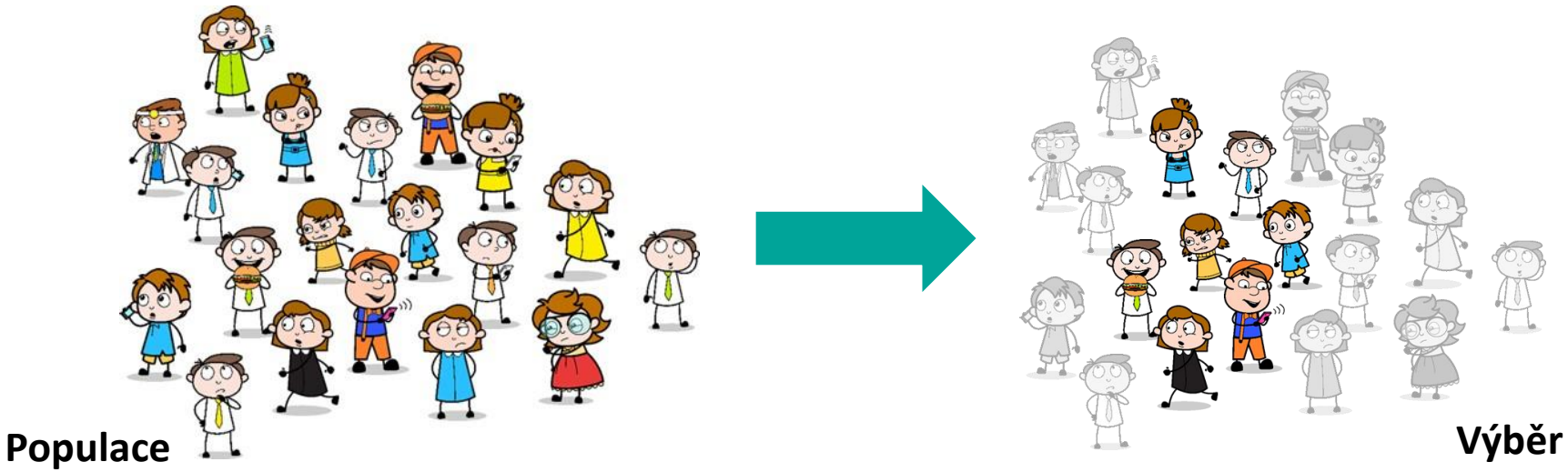
Obsah

- Opakování: Statistika – základní pojmy
- Úvod do teorie odhadu
- Bodový odhad vs. intervalový odhad
- Intervalové odhady parametrů populace
  - ✓ Intervalový odhad střední hodnoty normálního rozdělení se známým rozptylem
  - ✓ Interpretace intervalového odhadu
  - ✓ Souvislost spolehlivosti, maximální chyby odhadu a rozsahu výběru
  - ✓ Oboustranné vs. jednostranné intervalové odhady
  - ✓ Odhad rozsahu výběru při odhadu střední hodnoty normálního rozdělení se známým rozptylem
  - ✓ Další vybrané intervalové odhady
- Intervalové odhady rozdílu / poměru parametrů dvou populací

Opakování: Statistika – základní pojmy

- **Populace** (základní soubor) je soubor nějakých prvků, o kterém chceme statistickými metodami něco vypovídat. Definuje se výčtem nebo pomocí zvolené vlastnosti. O každém prvku umíme rozhodnout, zda do populace patří či nikoliv.

- **Výběr** je část dané populace, která má sloužit k odvození závěrů platných pro celou populaci.
(Pozor na reprezentativnost výběru!)

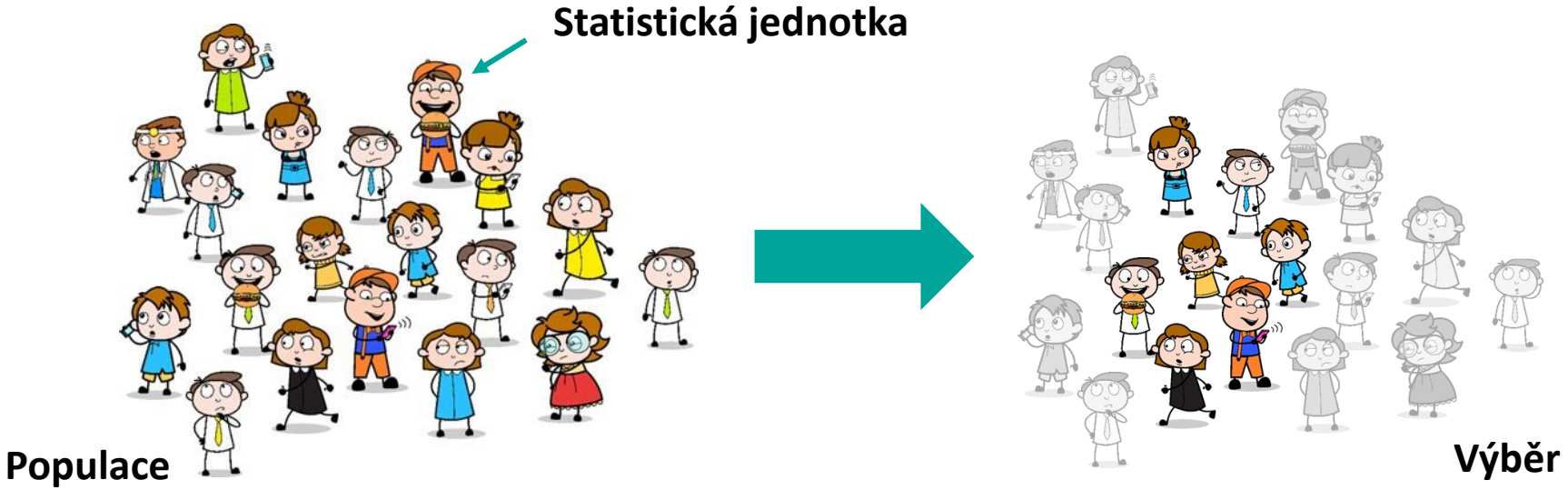


***Zdroj**: https://bazant.wordpress.com/2019/07/23/zaklady-statistiky-cast-1/*

Opakování: Statistika – základní pojmy

- **Statistická jednotka** je prvek populace.

- **Statistický znak (proměnná)** je nějaká měřitelná (zjistitelná) charakteristika statistické jednotky (hmotnost, pohlaví, …).

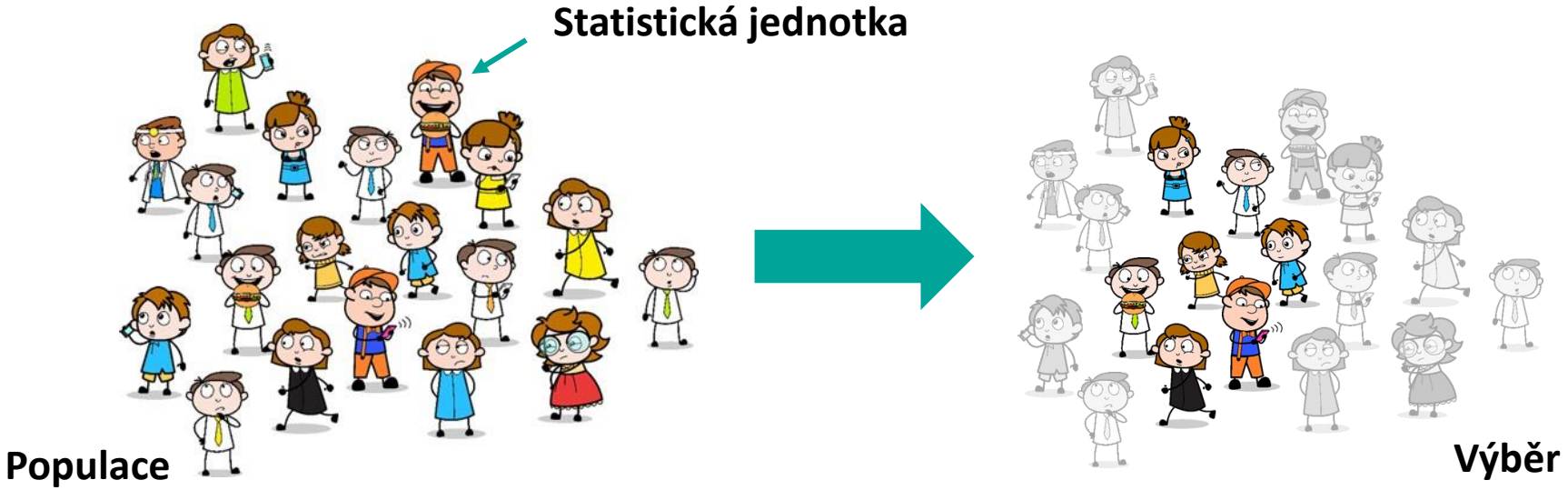


***Zdroj**: https://bazant.wordpress.com/2019/07/23/zaklady-statistiky-cast-1/*

Opakování: Statistika – základní pojmy

- **Explorační analýza** - zjišťuje a sumarizuje informace, zpracovává je ve formě grafů a tabulek

- **Statistická indukce** (inferenční statistika) – na základě informací zjištěných z výběrových šetření predikuje (odhaduje) závěry platné pro celou populaci.



***Zdroj**: https://bazant.wordpress.com/2019/07/23/zaklady-statistiky-cast-1/*

Jak určit parametry náhodné veličiny X (populace)?

Lze určit…

- střední hodnotu životnosti el. součástek?
- průměrné IQ lidské populace?
- účinnost daného léku?
- …

Neznáme-li rozdělení náhodné veličiny X, pak

parametry náhodné veličiny X nelze většinou přesně určit, lze je jen odhadnout.

Jak odhadnout parametry náhodné veličiny X (populace)?

- Bodový odhad - parametr populace (základního souboru) aproximujeme jediným číslem
  - ✓ Bodový odhad $\hat{\theta}$ neznámého parametru θ je náhodná veličina (např. průměr $\bar{X}$).
  - ✓ Realizace bodového odhadu (např. realizace průměru - $\bar{x}$) se pro danou realizaci náhodného výběru většinou snadno spočítá.
  - ✓ Chybí nám jakákoliv informace o přesnosti realizace bodového odhadu, tj. nevíme, jak moc se může změnit při další realizaci náhodného výběru.

- Jaké vlastnosti by měl mít „rozumný“ bodový odhad?
  - ✓ **Nestrannost** ($E(\hat{\theta}) = \theta$) - neměl by mít žádnou systematickou odchylku od skutečné hodnoty parametru populace, tj. „v průměru by měl hledanou hodnotu parametru odhadovat správně“.
  - ✓ **Konzistence** ($\lim_{n\to\infty} \hat{\theta} = \theta$) - s rostoucím rozsahem výběru by měl být „přesnější a přesnější“.

  Rozumné odhady by měly být konzistentní a pokud možno nestranné.

Jak odhadnout parametry náhodné veličiny X (populace)?

- Bodový odhad - parametr populace (základního souboru) aproximujeme jediným číslem
  - ✓ Bodový odhad $\hat{\theta}$ neznámého parametru θ je náhodná veličina (např. průměr $\bar{X}$).
  - ✓ Realizace bodového odhadu (např. realizace průměru - $\bar{x}$) se pro danou realizaci náhodného výběru většinou snadno spočítá.
  - ✓ Chybí nám jakákoliv informace o přesnosti realizace bodového odhadu, tj. nevíme, jak moc se může změnit při další realizaci náhodného výběru.

Populační parametry θ	**stř. hodnota** μ nebo $E(X)$	**medián** $x_{0,5}$	**rozptyl** σ^2 nebo $D(X)$	**směr. odchylka** σ nebo $\sigma(X)$	**pravděpodobnost** π
Bodové odhady $\hat{\theta}$ parametru θ	**(výběrový) průměr** $\bar{X}$	**výběrový medián** $\tilde{X}_{0,5}$	**výběrový rozptyl** S^2	**výb. směr. odchylka** S	**rel. četnost** P

Jak odhadnout parametry náhodné veličiny X (populace)?

- Bodový odhad - parametr populace (základního souboru) aproximujeme jediným číslem
  - ✓ Bodový odhad $\hat{\theta}$ neznámého parametru θ je náhodná veličina (např. průměr $\bar{X}$).
  - ✓ Realizace bodového odhadu (např. realizace průměru - $\bar{x}$) se pro danou realizaci náhodného výběru většinou snadno spočítá.
  - ✓ Chybí nám jakákoliv informace o přesnosti realizace bodového odhadu, tj. nevíme, jak moc se může změnit při další realizaci náhodného výběru.

konstanty, které většinou neznáme

náhodné veličiny

Populační parametry θ	**stř. hodnota** μ nebo $E(X)$	**medián** $x_{0,5}$	**rozptyl** σ^2 nebo $D(X)$	**směr. odchylka** σ nebo $\sigma(X)$	**pravděpodobnost** π
Bodové odhady $\hat{\theta}$ parametru θ	**(výběrový) průměr** $\bar{X}$	**výběrový medián** $\tilde{X}_{0,5}$	**výběrový rozptyl** S^2	**výb. směr. odchylka** S	**rel. četnost** P
Realizace bodových odhadů $\hat{\theta}$	$\bar{x}$ nebo $\hat{\mu}$	$\hat{x}_{0,5}$	s^2 nebo $\hat{\sigma}^2$	s nebo $\hat{\sigma}$	p nebo $\hat{\pi}$

konkrétní čísla, ale…

Jak odhadnout parametry náhodné veličiny X (populace)?

- Intervalový odhad – parametr populace aproximujeme intervalem, v němž s velkou pravděpodobností neznámý populační parametr leží.

  ✓ Hledáme takový minimální (nejužší) interval I, který splňuje podmínku

$$P(\theta \in I) \geq \underbrace{1-\alpha}.$$

spolehlivost odhadu (angl. confidence level),
tj. p-st, že neznámý parametr θ skutečně leží v intervalu I,
tj. p-st, že interval I pokryje skutečnou hodnotu parametru θ

intervalový odhad (IO),
popř. interval spolehlivosti (angl. confidence interval (CI))

neznámý **parametr populace** (např. střední hodnota μ)

Hledáme

- **oboustranné odhady** $I = (M_D, M_H)$, tj. zajímá nás dolní (M_D) i horní mez (M_H) IO,
- **levostranné odhady** $I = (M_D^*, \infty)$, tj. zajímá nás pouze dolní mez (M_D^*) IO, nebo
- **pravostranné odhady** $I = (-\infty, M_H^*)$, tj. zajímá nás pouze horní mez (M_D^*) IO.

} **jednostranné odhady**

Jak najít oboustranný intervalový odhad?

Obecně:

1) Zvolíme vhodnou výběrovou charakteristiku $T(\boldsymbol{X})$, jejíž rozdělení známe.
2) Nechť x_p jsou p-kvantily spojité náhodné veličiny $T(\boldsymbol{X})$, pak

$$P\left(x_{\frac{\alpha}{2}} \leq T(\boldsymbol{X}) \leq x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Proč?

$$P\left(x_{\frac{\alpha}{2}} \leq T(\boldsymbol{X}) \leq x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = F\left(x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - F\left(x_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \alpha$$

3) Nerovnici $x_{\frac{\alpha}{2}} \leq T(\boldsymbol{X}) \leq x_{1-\frac{\alpha}{2}}$ upravíme na tvar $M_D \leq \theta \leq M_H$.

Intervalový odhad střední hodnoty známe-li rozptyl σ^2

Předpoklady:

1) Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení nebo výběr o rozsahu $n > 30$.
2) Známe (populační) rozptyl σ^2.

Jak (za daných předpokladů) najít oboustranný odhad střední hodnoty?

ad1) Volba vhodné výběrové charakteristiky: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ad2) $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$, kde z_p je p-kvantil normovaného normálního rozdělení

ad3) $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

$$P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{X}-\mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq -\mu \leq -\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \geq \mu \geq \bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Intervalový odhad střední hodnoty známe-li rozptyl σ^2

Předpoklady:

1) Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení nebo výběr o rozsahu $n > 30$.
2) Známe (populační) rozptyl σ^2.

Jak (za daných předpokladů) najít oboustranný odhad střední hodnoty?

ad1) Volba vhodné výběrové charakteristiky: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ad2) $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$, kde z_p je p-kvantil normovaného normálního rozdělení

ad3) $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \geq \mu \geq \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \geq \mu \geq \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \text{ (víme, že } z_{1-p} = -z_p\text{)}$$

$$\boxed{P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha}$$

Intervalový odhad střední hodnoty známe-li rozptyl σ^2

Předpoklady:

1) Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení nebo výběr o rozsahu $n > 30$.
2) Známe (populační) rozptyl σ^2.

Jak (za daných předpokladů) najít oboustranný odhad střední hodnoty?

ad1) Volba vhodné výběrové charakteristiky: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ad2) $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$, kde z_p je p-kvantil normovaného normálního rozdělení

ad3) $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

$$\boxed{P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha}$$

dolní mez M_D (oboustranného IO) — horní mez M_D (oboustranného IO)

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

Bodový odhad:

$\hat{\mu} = \bar{x} = 950$

Střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison je cca 950 hodin.

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

- Životnost žárovek má normální rozdělení (viz zadání).
- Rozptyl životnosti žárovek je 100^2 hodin^2.

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha, \text{ kde } 1 - \alpha = 0{,}95, \text{tj. } \alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} \cong 1{,}96$$

(qnorm(0.975,0,1))

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

- Životnost žárovek má normální rozdělení (viz zadání).
- Rozptyl životnosti žárovek je 100^2 hodin^2.

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha, \text{ kde } 1 - \alpha = 0{,}95, \text{tj. } \alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} \cong 1{,}96$$

$$P\left(950 - \frac{100}{\sqrt{50}} \cdot 1{,}96 \leq \mu \leq 950 + \frac{100}{\sqrt{50}} \cdot 1{,}96\right) = 0{,}95$$

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

- Životnost žárovek má normální rozdělení (viz zadání).
- Rozptyl životnosti žárovek je 100^2 hodin^2.

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha, \text{ kde } 1 - \alpha = 0{,}95, \text{tj. } \alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} \cong 1{,}96$$

$$\boxed{P(922 \leq \mu \leq 978) = 0{,}95}$$

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

$P(922 < \mu < 978) = 0{,}95$

<u>Jiné způsoby zápisu</u>:

- $P\big(\mu \in (922; 978)\big) = 0{,}95$
- 95% IO μ: $(922; 978)$

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

$P(922 < \mu < 978) = 0{,}95$

Jak interpretovat výsledek?

- 95% intervalový odhad pro střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison je 922 až 978 hodin.

Uvědomme si, že kdybychom opakovali náhodné výběry 50 žárovek a pro každou realizaci výběru vypočetli intervalový odhad střední životnosti žárovek, získali bychom pokaždé jiný intervalový odhad.

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

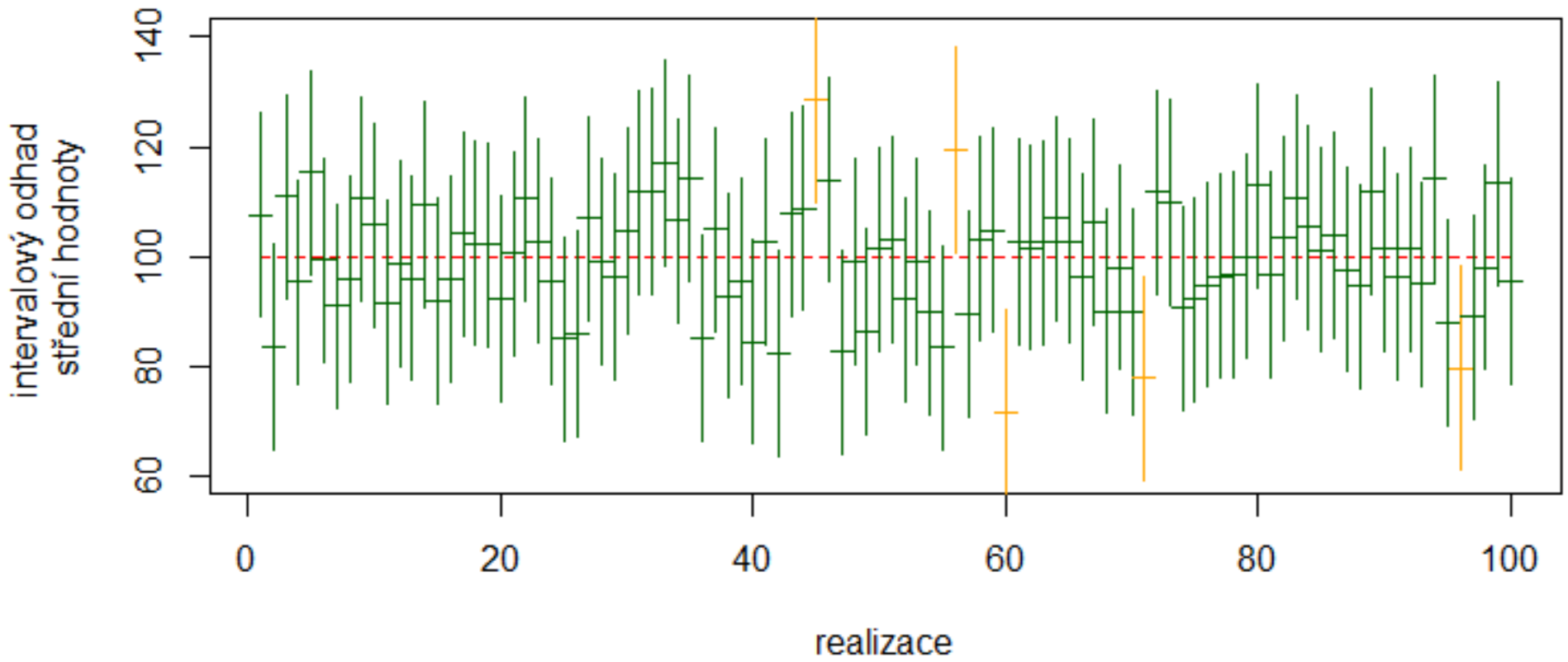
$P(922 < \mu < 978) = 0{,}95$

Jak interpretovat výsledek?

- 95% intervalový odhad pro střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison je 922 až 978 hodin.

Spolehlivost odhadu 95 % znamená, že nejméně 95 % z takto nalezených intervalových odhadů by mělo skutečnou střední životnost žárovek obsahovat (pokrývat).

Interpretace intervalového odhadu



Simulace 100 intervalových odhadů střední hodnoty (spolehlivost 0,95) získaných na základě opakovaných výběrů o rozsahu 10 z populace se střední hodnotou 100 a sm. odchylkou 30. 5 intervalů ze 100 neobsahuje skutečnou střední hodnou.

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

$P(922 < \mu < 978) = 0{,}95$

Jak interpretovat výsledek?

- 95% intervalový odhad pro střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison je 922 až 978 hodin.
- Kdybychom prováděli experiment opakovaně, tak by 95 % nalezených intervalových odhadů obsahovalo skutečnou střední životnost žárovek. (Tato informace však neříká nic o tom, jaký byl náš výsledek…)

Příklad 1

Útvar kontroly podniku Edison testoval životnost žárovek. Z dlouhodobých záznamů se ví, že životnost žárovek má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 100 hodin. Kontroloři vybrali z produkce podniku náhodně 50 žárovek a zjistili, že průměrná životnost těchto 50 žárovek je 950 hodin. Odhadněte skutečnou střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

μ … střední životnost žárovek vyráběných v podniku Edison (h)

95% odhad:

$P(922 < \mu < 978) = 0{,}95$

Jak **neinterpretovat** výsledek?

- ~~Střední životnost žárovek leží v intervalu 922 až 978 hodin s pravděpodobností 95 %.~~
- ~~Kdybychom prováděli experiment opakovaně, tak by v 95 % případů střední životnost žárovek ležela v intervalu 922 až 978 hodin.~~

Jak najít jednostranný intervalový odhad?

Obecně:

1) Zvolíme vhodnou výběrovou charakteristiku $T(\boldsymbol{X})$, jejíž rozdělení známe.
2) Nechť x_p jsou p-kvantily spojité náhodné veličiny $T(\boldsymbol{X})$, pak

$$P(T(\boldsymbol{X}) \leq x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha, \text{ resp.}$$
$$P(T(\boldsymbol{X}) \geq x_{\alpha}) \quad = 1 - \alpha.$$

Proč?

$P(T(\boldsymbol{X}) \leq x_{1-\alpha}) = F(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, resp.

$P(T(\boldsymbol{X}) \geq x_{\alpha}) \quad = 1 - F(x_{\alpha}) = 1 - \alpha$

3) Nerovnici $T(\boldsymbol{X}) \leq x_{1-\alpha}$, resp. $P(T(\boldsymbol{X}) \geq x_{\alpha})$ upravíme na tvar $\theta > M_D^*$, resp. na tvar $\theta < M_H^*$.

Intervalový odhad střední hodnoty známe-li rozptyl σ^2

Předpoklady:

1) Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení nebo výběr o rozsahu $n > 30$.
2) Známe (populační) rozptyl σ^2.

Jak (za daných předpokladů) najít levostranný (dolní) odhad střední hodnoty?

ad1) Volba vhodné výběrové charakteristiky: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ad2) $P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, kde z_p je p-kvantil normovaného normálního rozdělení

ad3) $P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$

$$P\left(\bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

$$\boxed{P\left(\mu \geq \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha}$$

Intervalový odhad střední hodnoty známe-li rozptyl σ^2

Předpoklady:

1) Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení nebo výběr o rozsahu $n > 30$.
2) Známe (populační) rozptyl σ^2.

Jak (za daných předpokladů) najít pravostranný (horní) odhad střední hodnoty?

ad1) Volba vhodné výběrové charakteristiky: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ad2) $P(Z \geq z_\alpha) = 1 - \alpha$, kde z_p je p-kvantil normovaného normálního rozdělení

ad3) $P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \geq z_\alpha\right) = 1 - \alpha$

$$P\left(\bar{X} - \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\mu \geq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\mu \leq \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$ (je zvykem uvádět úpravu $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$)

Intervalový odhad střední hodnoty známe-li rozptyl σ^2

Předpoklady:

1) Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení nebo výběr o rozsahu $n > 30$.
2) Známe (populační) rozptyl σ^2.

Jak (za daných předpokladů) najít pravostranný (horní) odhad střední hodnoty?

ad1) Volba vhodné výběrové charakteristiky: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ad2) $P(Z \geq z_\alpha) = 1 - \alpha$, kde z_p je p-kvantil normovaného normálního rozdělení

ad3) $P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \geq z_\alpha\right) = 1 - \alpha$

$$P\left(\bar{X} - \mu \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\mu \geq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$\boxed{P\left(\mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha}$$

Intervalové odhady střední hodnoty a rozptylu

Mějme realizaci náhodného výběru x ze spojitého rozdělení, tj. $x = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$
a předpokládejme, že rozsah výběru nepřesahuje 5 % velikosti populace ($\mathrm{n} \leq 0{,}05\mathrm{N}$, neboli $\mathrm{N} > 20\mathrm{n}$).

Odhadovaný parametr		**Předpoklady**	**Meze oboustranného intervalového odhadu**		**Dolní mez levostranného intervalového odhadu**	**Horní mez pravostranného intervalového odhadu**
			$\boldsymbol{M_D}$	$\boldsymbol{M_H}$	$\boldsymbol{M_D^*}$	$\boldsymbol{M_H^*}$
Míra polohy	$\boldsymbol{\mu}$	normalita nebo $n > 30$, známe σ	$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$	$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$
		normalita, neznáme σ	$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}$	$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}$
Míra variability	$\boldsymbol{\sigma^2}$	normalita	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha}}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}}$

Souvislost spolehlivosti, max. chyby odhadu a rozsahu výběru

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- Maximální chyba odhadu Δ: $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

  $P\left(\bar{X} - \Delta \leq \mu \leq \bar{X} + \Delta\right) = 1 - \alpha$ (U oboustranného IO střední hodnoty je šířka IO rovna 2Δ.)

- Je-li rozsah výběru konstantní, tak s rostoucí spolehlivosti odhadu max. chyba odhadu (tj. i šířka IO) roste ($1 - \alpha \nearrow \Leftrightarrow \Delta \nearrow$).
- Tj. při daném rozsahu výběru je volba spolehlivosti odhadu otázkou kompromisu s ohledem na maximální chybu odhadu. (Chtěli bychom najít vysoce spolehlivý odhad s malou šířkou.)
- V praxi obvykle volíme spolehlivost odhadu 0,95, tj. α (tzv. **hladinu významnosti**) 0,05.
- Je-li spolehlivost odhadu konstantní, tak s rostoucím rozsahem výběru max. chyba odhadu (tj. i šířka IO) klesá ($n \nearrow \Leftrightarrow \Delta \searrow$).

Výpočet potřebného rozsahu výběru

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- Maximální chyba odhadu Δ: $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

  $P\left(\bar{X} - \Delta \leq \mu \leq \bar{X} + \Delta\right) = 1 - \alpha$ (U oboustranného IO střední hodnoty je šířka IO rovna 2Δ.)

- Náhodný výběr jakého minimálního rozsahu potřebujeme realizovat proto, abychom při dané spolehlivosti odhadu nepřekročili maximální chybu odhadu Δ_{max}?

$$\Delta_{max} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{\sigma}{\Delta_{max}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{n \geq \left(\frac{\sigma}{\Delta_{max}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}$$

Příklad 2

Výběrovým šetřením bychom chtěli odhadnout průměrnou mzdu pracovníků určitého výrobního odvětví. Z vyčerpávajícího šetření, které probíhalo před několika měsíci, víme, že směrodatná odchylka mezd byla 750,- Kč. Odhad chceme provést s 95% spolehlivostí a jsme ochotni připustit maximální chybu ve výši 50,- Kč. Jak velký musíme provést výběr, abychom zajistili požadovanou přesnost a spolehlivost?

Řešení:

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\Delta_{max}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$n \geq \left(\frac{750}{50} z_{0.975}\right)^2$$, kde $z_{0.975} = 1{,}96$ (*qnorm(0.975,0,1)*)

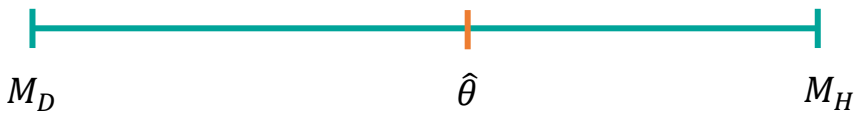
$$n \geq 864{,}4$$

Pro zajištění maximální chyby 95% IO průměrné mzdy ve výši 50 Kč bychom měli realizovat náhodný výběr o min. rozsahu 865 osob.

Srovnání oboustranného a jednostranných intervalových odhadů

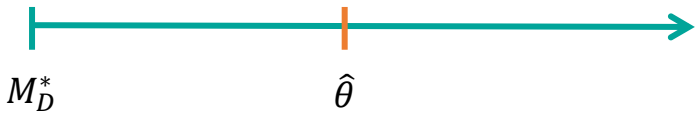
- $100(1-\alpha)\%$ oboustranný odhad (M_D, M_H)

$P(\theta < M_D) = \frac{\alpha}{2}$ $\quad$ $P(M_D < \theta < M_H) = 1-\alpha$ $\quad$ $P(\theta > M_H) = \frac{\alpha}{2}$



- $100(1-\alpha)\%$ levostranný odhad (M_D^*, ∞)

$P(\theta < M_D^*) = \alpha$ $\quad$ $P(\theta > M_D^*) = 1-\alpha$



- $100(1-\alpha)\%$ pravostranný odhad $(-\infty, M_H^*)$

$P(\theta < M_H^*) = 1-\alpha$ $\quad$ $P(\theta > M_H^*) = \alpha$

Robustní metody statistické indukce

V obecném případě, kdy neznáme typ rozdělení, používáme tzv. robustní (neparametrické) postupy. Robustní postupy pro odhady parametrů populace používáme typicky v případech, kdy

- výběrový soubor obsahuje odlehlá pozorování, která nemohou být opravena a není vhodné je vyloučit,
- výběrový soubor nepochází z normálního rozdělení,
- výběrový soubor má velké rozptýlení dat.

Intervalové odhady střední hodnoty a rozptylu

Mějme realizaci náhodného výběru x ze spojitého rozdělení, tj. $x = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$
a předpokládejme, že rozsah výběru nepřesahuje 5 % velikosti populace ($\mathrm{n} \leq 0{,}05\mathrm{N}$, neboli $\mathrm{N} > 20\mathrm{n}$).

Odhadovaný parametr		**Předpoklady**	**Meze oboustranného intervalového odhadu**		**Dolní mez levostranného intervalového odhadu**	**Horní mez pravostranného intervalového odhadu**
			$\boldsymbol{M_D}$	$\boldsymbol{M_H}$	$\boldsymbol{M_D^*}$	$\boldsymbol{M_H^*}$
Míra polohy	$\boldsymbol{\mu}$	normalita nebo $n > 30$, známe σ	$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$	$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$
		normalita, neznáme σ	$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}$	$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}$
Míra variability	$\boldsymbol{\sigma^2}$	normalita	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha}}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}}$

Intervalový odhad pravděpodobnosti

Mějme realizaci náhodného výběru x z alternativního rozdělení, tj. $x = (x_1, \dots, x_n)$
a předpokládejme, že rozsah výběru nepřesahuje 5 % velikosti populace ($n \leq 0{,}05N$, neboli $N > 20n$).

Odhadovaný parametr		**Předpoklady**	**Meze oboustranného intervalového odhadu**		**Dolní mez levostranného intervalového odhadu**	**Horní mez pravostranného intervalového odhadu**
			$\boldsymbol{M_D}$	$\boldsymbol{M_H}$	$\boldsymbol{M_D^*}$	$\boldsymbol{M_H^*}$
parametr bin. rozdělení	$\boldsymbol{\pi}$	$n > \frac{9}{p(1-p)}$	$p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$p - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$p + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Příklad 3

Při kontrole data spotřeby určitého druhu masové konzervy ve skladech produktů masného průmyslu bylo náhodně vybráno 320 z 20 000 konzerv a zjištěno, že 59 z nich má prošlou záruční lhůtu. Odhadněte podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

π … podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu

Bodový odhad:

$$\hat{\pi} = p = \frac{59}{320} \cong 0{,}184$$

Ve skladech masného průmyslu je cca 18,4 % konzerv s prošlou záruční lhůtou.

Příklad 3

Při kontrole data spotřeby určitého druhu masové konzervy ve skladech produktů masného průmyslu bylo náhodně vybráno 320 z 20 000 konzerv a zjištěno, že 59 z nich má prošlou záruční lhůtu. Odhadněte podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

π … podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu

95% intervalový odhad:

<u>Předpoklady</u>:

$N > 20n \; (20\,000 > 20 \cdot 320)$ ✓

$n > \frac{9}{p(1-p)} \; (320 > \frac{9}{\frac{59}{320}\left(1-\frac{59}{320}\right)} = 59{,}8)$ ✓

$$P\left(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$ (tzv. Waldův odhad)

Příklad 3

Při kontrole data spotřeby určitého druhu masové konzervy ve skladech produktů masného průmyslu bylo náhodně vybráno 320 z 20 000 konzerv a zjištěno, že 59 z nich má prošlou záruční lhůtu. Odhadněte podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

π … podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu

95% intervalový odhad:

$$P\left(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$ (tzv. Waldův odhad)

$$P\left(\frac{59}{320} - z_{0,975}\sqrt{\frac{\frac{59}{320}\left(1-\frac{59}{320}\right)}{320}} < \pi < \frac{59}{320} + z_{0,975}\sqrt{\frac{\frac{59}{320}\left(1-\frac{59}{320}\right)}{320}}\right) = 0{,}95,$$ kde $z_{0,975} = 1{,}96$ (*qnorm(0.975,0,1)*)

$$P(0{,}142 < \pi < 0{,}227) = 0{,}95$$

Příklad 3

Při kontrole data spotřeby určitého druhu masové konzervy ve skladech produktů masného průmyslu bylo náhodně vybráno 320 z 20 000 konzerv a zjištěno, že 59 z nich má prošlou záruční lhůtu. Odhadněte podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu (bodový odhad + 95% IO).

Řešení:

π … podíl konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu

Bodový odhad:

Ve skladech masného průmyslu je cca 18,4 % konzerv s prošlou záruční lhůtou.

95% intervalový odhad:

95% Waldův intervalový odhad podílu konzerv s prošlou záruční lhůtou ve skladech masného průmyslu je 14,2 % až 22,7 %.

Intervalový odhad parametru binomického rozdělení

POZOR!

- Relativní četnost π je z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Je tedy zřejmé, že dolní mez intervalových odhadů relativní četnosti nemůže klesnout pod 0 a horní mez těchto odhadů nemůže být větší než 1!
- Bylo ukázáno, že standardní (Waldův) odhad není optimální, existuje spousta vhodnějších alternativ (např. Wilsonův odhad, Clopperův-Pearsonův odhad, Agrestiho -Coullův odhad…).

Intervalové odhady rozdílu středních hodnot

Mějme dva nezávislé výběry z normálního rozdělení.
$\forall i = 1, 2, \dots, n_1$, kde n_1 je rozsah prvního výběru: $X_{1i} \to N(\mu_1; \sigma_1^2)$,
$\forall j = 1, 2, \dots, n_2$, kde n_2 je rozsah prvního výběru: $X_{2j} \to N(\mu_2; \sigma_2^2)$
a předpokládejme, že rozsahy výběrů nepřesahuje 5 % velikosti populace $n_i \leq 0{,}05N_i$, neboli $N_i > 20n_i$ pro $i \in \{1,2\}$.

Odhadovaný rozdíl / podíl parametrů		Předpoklady	Oboustranný intervalový odhad	Poznámka
Rozdíl měr polohy	$\mu_1 - \mu_2$	normalita obou populací nebo $n_1 > 30, n_2 > 30$, známe σ_1, σ_2	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	
		normalita obou populací nebo $n_1 > 30, n_2 > 30$, neznáme σ_1, σ_2, $\sigma_1 = \sigma_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp t^{\nu}_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$	t_p^{ν} je 100p% kvantil Studentova rozdělení s ν stupni volnosti, $\nu = n_1 + n_2 - 2$
		normalita obou populací nebo $n_1 > 30, n_2 > 30$, neznáme σ_1, σ_2, $\sigma_1 \neq \sigma_2$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp t^{\nu}_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$	t_p^{ν} je 100p% kvantil Studentova rozdělení s ν stupni volnosti, $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{n_1+1} + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \frac{1}{n_2+1}} - 2$

Intervalový odhad poměru rozptylů

Mějme dva nezávislé výběry z normálního rozdělení.
$\forall i = 1, 2, \dots, n_1$, kde n_1 je rozsah prvního výběru: $X_{1i} \to N(\mu_1; \sigma_1^2)$,
$\forall j = 1, 2, \dots, n_2$, kde n_2 je rozsah prvního výběru: $X_{2j} \to N(\mu_2; \sigma_2^2)$
a předpokládejme, že rozsahy výběrů nepřesahuje 5 % velikosti populace $n_i \leq 0{,}05N_i$, neboli $N_i > 20n_i$ pro $i \in \{1,2\}$.

Odhadovaný rozdíl / podíl parametrů		**Předpoklady**	**Oboustranný intervalový odhad**	**Poznámka**
Poměr měr variability	σ_1^2 / σ_2^2	normalita obou populací nebo $n_1 > 30, n_2 > 30$	$\langle \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1-1,n_2,1}} \frac{s_1^2}{s_2^2}; \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1-1,n_2,1}} \frac{s_1^2}{s_2^2} \rangle$	$f_p^{m,n}$ je 100p% kvantil Fischerova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli

Intervalový odhad rozdílu parametrů bin. rozdělení

Mějme dva nezávislé výběry z alternativního rozdělení.
$\forall i = 1, 2, \dots, n_1$, kde n_1 je rozsah prvního výběru: $X_{1i} \sim A(\pi_1)$,
$\forall j = 1, 2, \dots, n_2$, kde n_2 je rozsah prvního výběru: $X_{2j} \sim A(\pi_2)$
a předpokládejme, že rozsahy výběrů splňují podmínku $\left(n_i > \frac{9}{p_i(1-p_i)} \text{ pro } i \in \{1,2\}\right)$.

Odhadovaný rozdíl / podíl parametrů		Předpoklady	Oboustranný intervalový odhad	Poznámka
Rozdíl parametrů bin. rozdělení	$\pi_1 - \pi_2$	$n_i > \frac{9}{p_i(1-p_i)}$ pro $i \in \{1,2\}$	$(p_1 - p_2) \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$	$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

Děkuji za pozornost!

martina.litschmannova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY