Vybraná rozdělení spojité náhodné veličiny

Martina Litschmannová

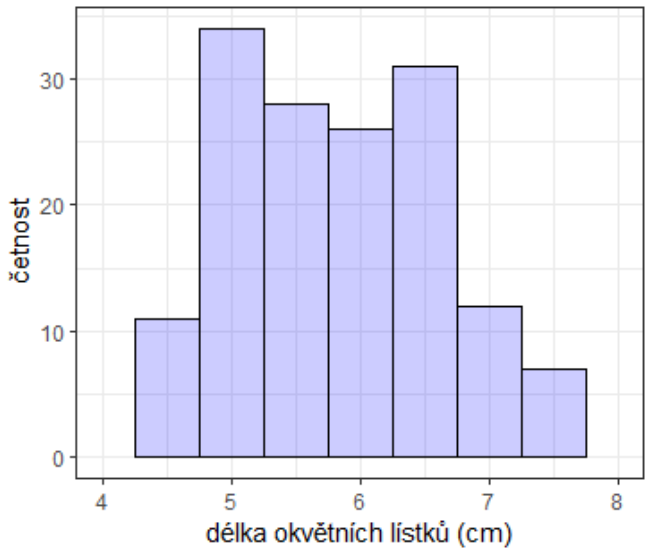
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

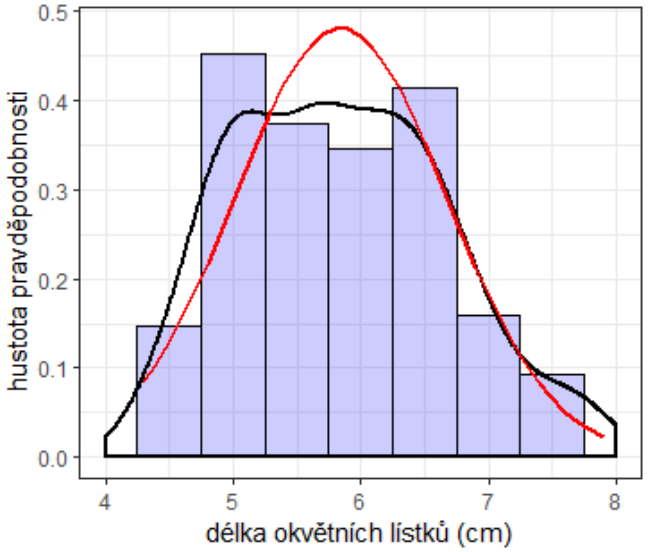
Opakování: Hustota pravděpodobnosti

- **Hustota pravděpodobnosti** je …

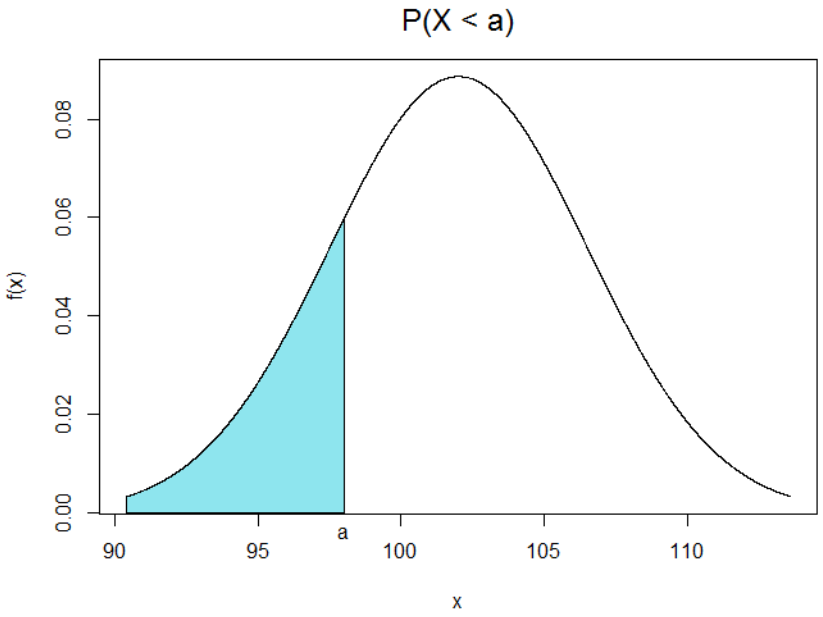
  funkce popisující rozdělení spojité náhodné veličiny.

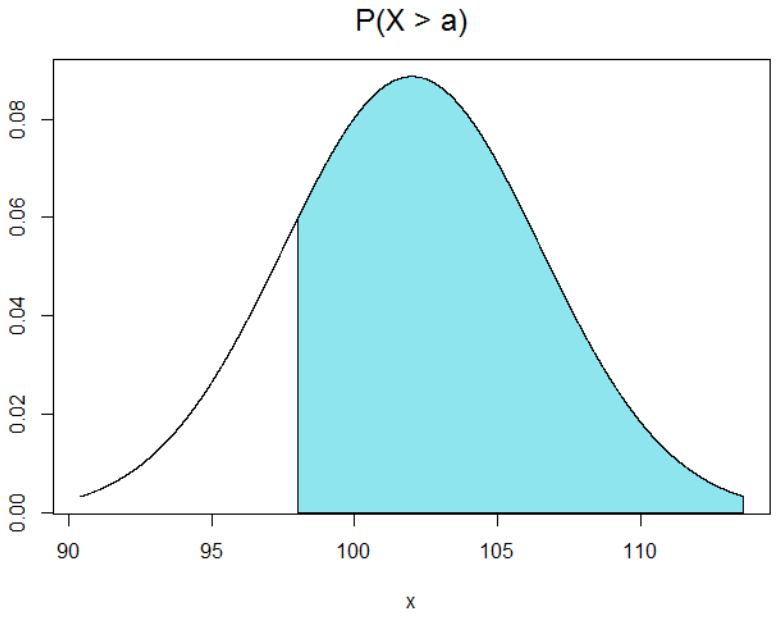
- **Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti**
  - $f(x)$ je reálná nezáporná funkce,
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ (plocha pod křivkou hustoty je 1),
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ („začíná v 0“),
  - $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ („končí v 0“)

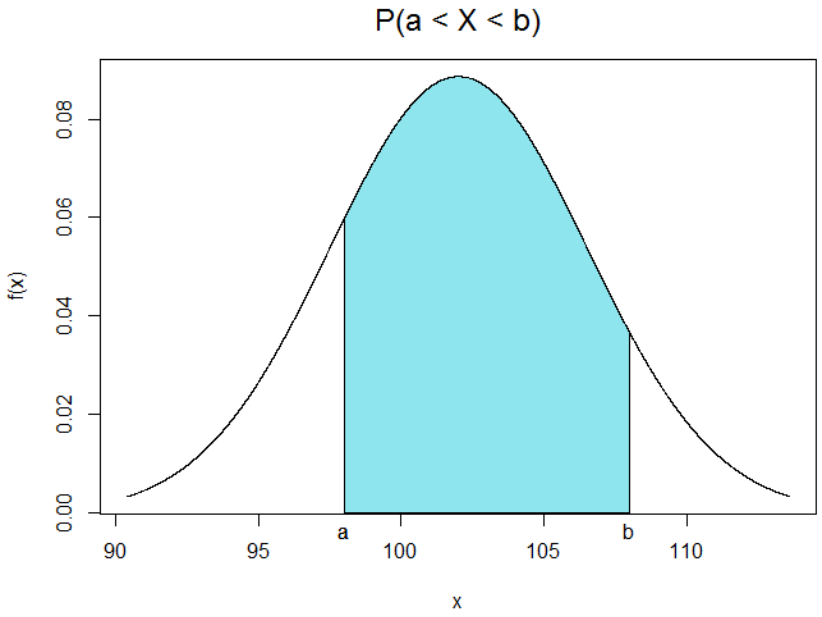




Vztah mezi pravděpodobností, hustotou a distr. funkcí







$$\mathrm{P}(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$$P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Vybraná rozdělení spojité náhodné veličiny

- Rovnoměrné rozdělení
- Exponenciální rozdělení
- Weibullovo rozdělení
- Normální rozdělení
- Normované normální rozdělení

Rovnoměrné spojité rozdělení

Jde o rozdělení, jehož hustota pravděpodobnosti je konstantní na nějakém intervalu $(a; b)$ a všude jinde je nulová.

X … náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(a; b)$

$$X \sim Ro(a; b)$$

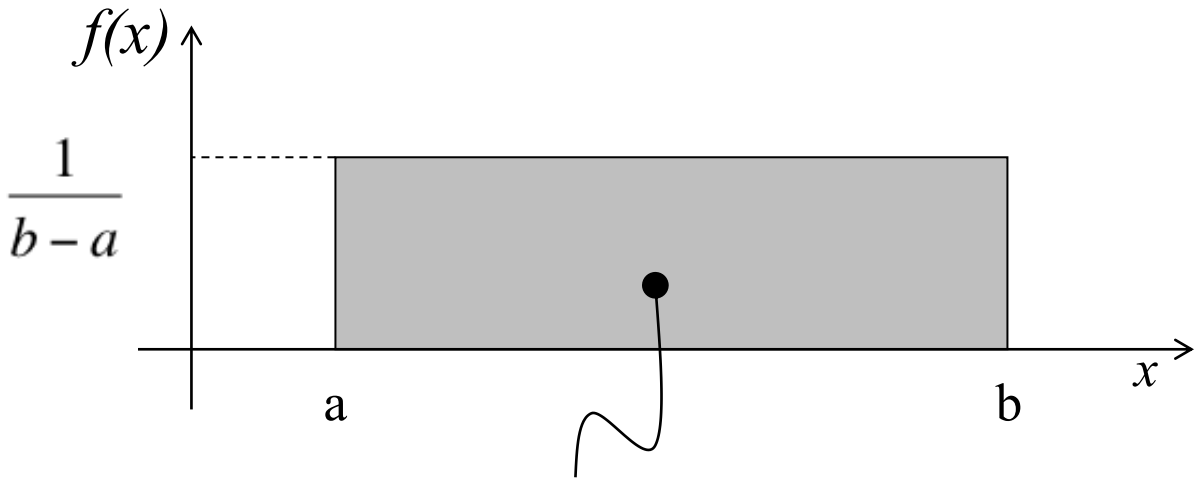
- Odvoďte vztahy pro $f(x)$ a $F(x)$.

Rovnoměrné spojité rozdělení

Jde o rozdělení, jehož hustota pravděpodobnosti je konstantní na nějakém intervalu $(a; b)$ a všude jinde je nulová.

X … náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(a; b)$

$$X \sim Ro(a; b)$$



$$\text{plocha} = (b-a) \cdot \frac{1}{b-a} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle \\ 0 & x \notin \langle a; b \rangle \end{cases}$$

Rovnoměrné spojité rozdělení

X má rovnoměrné rozdělení $Ro(a;b)$,

jestliže má pro všechna $x \in \langle a;b \rangle$ konstantní hustotu pravděpodobnosti.

$$X \sim Ro(a;b)$$

Hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \langle a;b \rangle \\ 0 & x \notin \langle a;b \rangle \end{cases}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{a+b}{2}$, **Rozptyl:** $D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

Příklady: chyba při odečítání údajů z lineárních měřicích přístrojů, doba čekání na uskutečnění jevu opakujícího se v pravidelných intervalech

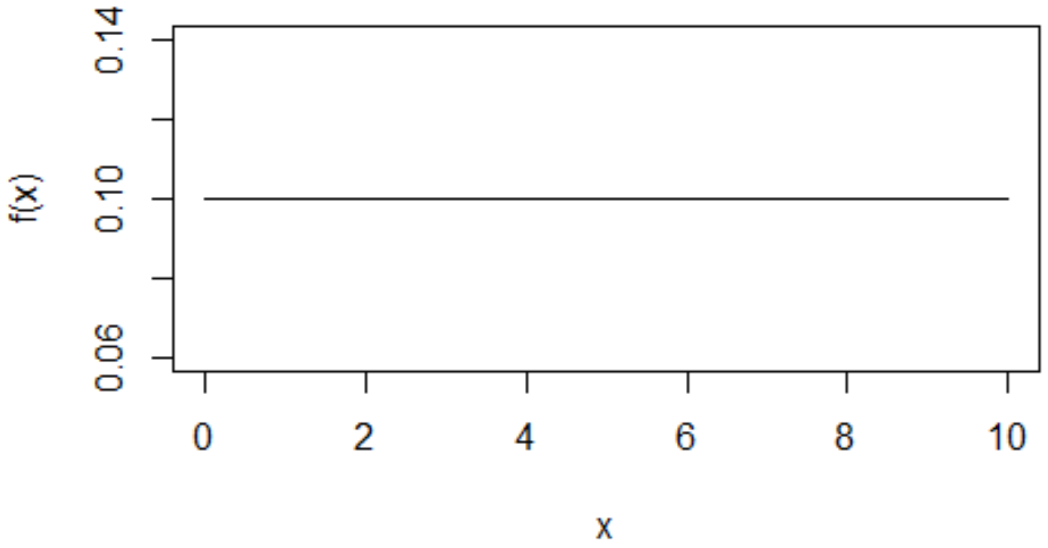
Příklad 1

Rentgenové vyšetření pacienta trvá 10 minut. V čekárně v současné chvíli není žádný pacient, 1 pacient je ve vyšetřovně. Vypočtěte pravděpodobnost, že pacient, který právě přišel do čekárny, bude na vyšetření čekat déle než 7 minut.

X … doba čekání na vyšetření (min.)

$X \sim Ro(0; 10)$

$$P(X > 7) = \int_7^{\infty} f(x)dx = \int_7^{10} 0{,}1dx = \mathbf{0,3}$$



Exponenciální rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

$$X \sim Exp(\lambda)$$

Poissonův proces: události se vyskytují nezávisle s konstantní intenzitou (ordinarita, stacionarita, beznáslednost)

Příklady: doba do remise onemocnění (nejjednodušší modelové rozdělení pro délku doby do výskytu sledované události), doba do poruchy zařízení, doba mezi 3. a 4. poruchou zařízení, …

Exponenciální rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

$$X \sim Exp(\lambda)$$

Hustota pravděpodobnosti: $f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

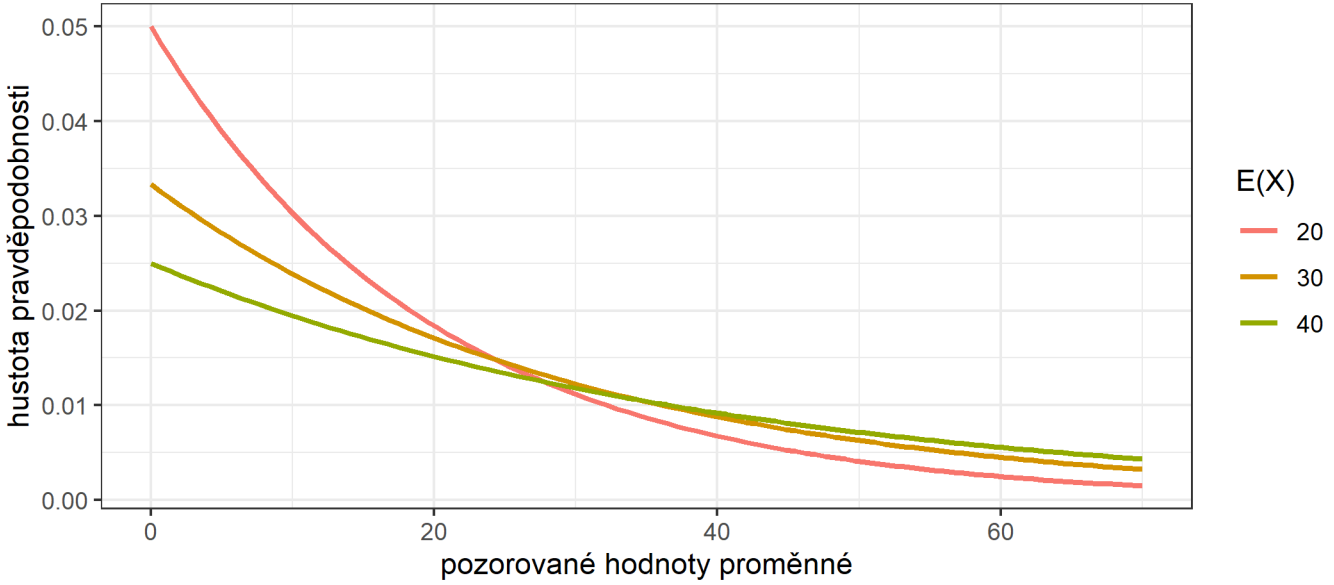
Distribuční funkce: $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ **Rozptyl**: $D(X) = \left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Exponenciální rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

$$X \sim Exp(\lambda)$$

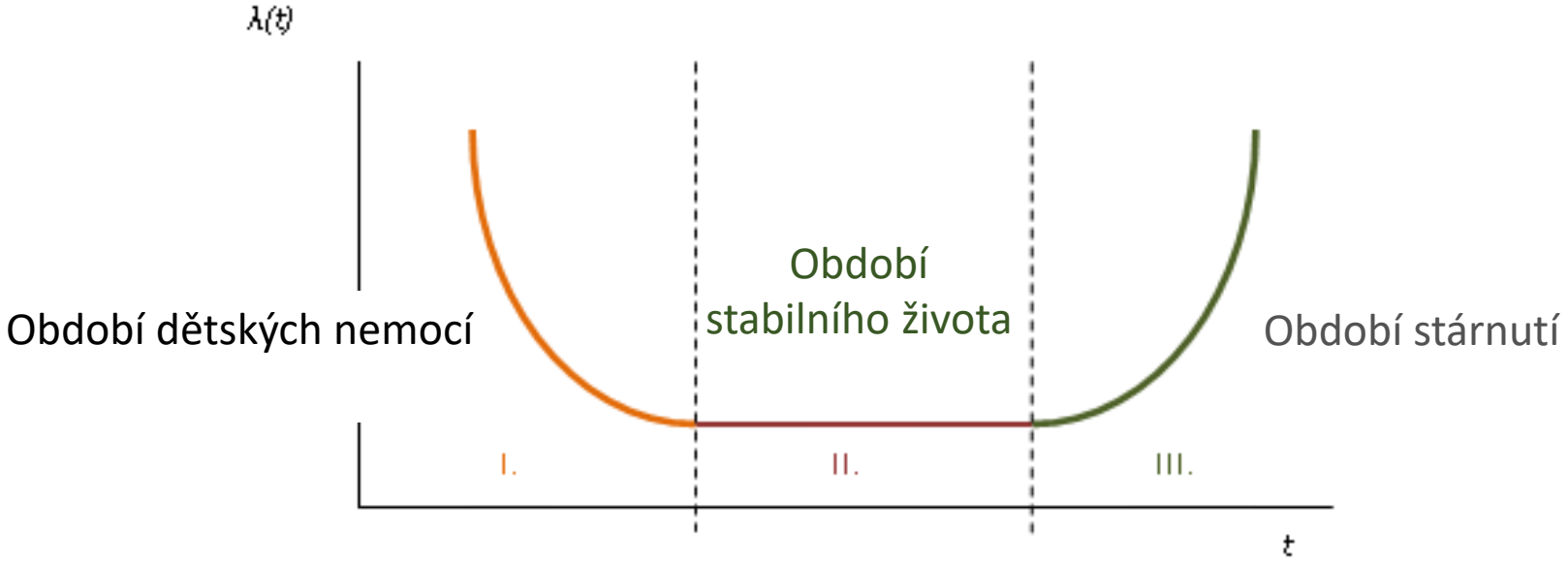


Předpokládá konstantní intenzitu výskytu události $\lambda(t)$ - rozdělení „bez paměti“

Riziková funkce (intenzita poruch)

Pro nezápornou náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením popsaným distribuční funkcí $F(t)$ definujeme pro $F(t) \neq 1$ rizikovou funkci jako

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$



Riziková funkce (intenzita poruch)

Pro nezápornou náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením popsaným distribuční funkcí $F(t)$ definujeme pro $F(t) \neq 1$ rizikovou funkci jako

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Co udává hodnota $\lambda(t)$?

Představuje-li náhodná veličina *X* dobu do poruchy nějakého zařízení, pak pravděpodobnost, že pokud do času *t* nedošlo k žádné poruše, tak k ní dojde v následujícím krátkém úseku délky Δt, je přibližně

$$P(t \leq X < t + \Delta t | X > t) = \frac{P(t<X<t+\Delta t)}{P(X>t)} \cong \frac{f(t)\cdot\Delta t}{1-F(t)} = \lambda(t) \cdot \Delta t.$$

Exponenciální rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

$$X \sim Exp(\lambda)$$

Hustota pravděpodobnosti: $f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Distribuční funkce: $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Předpokládá konstantní intenzitu výskytu události $\lambda(t)$ - rozdělení „bez paměti“

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \lambda$$

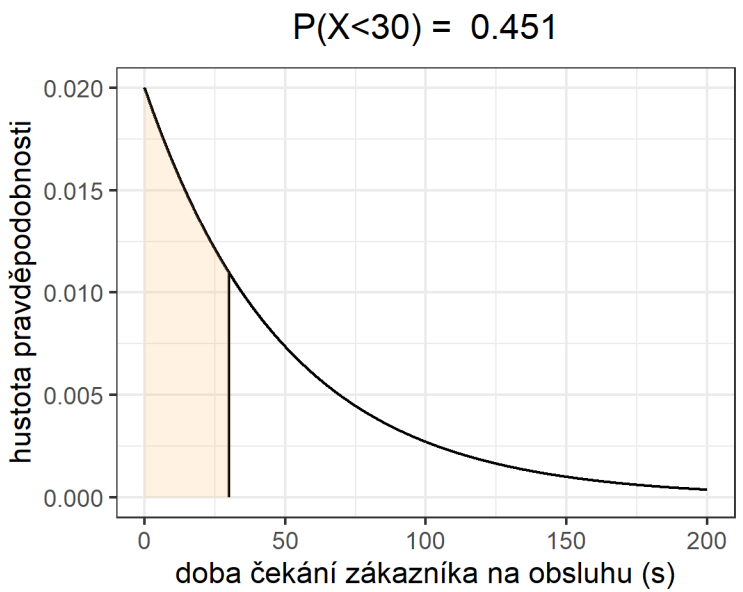
Příklad 2

Střední doba čekání zákazníka na obsluhu v prodejně je 50 sekund. Doba čekání se řídí exponenciálním rozdělením (pravděpodobnost, že zákazník nebude obsloužen klesá s rostoucím časem exponenciálně). Jaká je pravděpodobnost, že náhodný zákazník bude obsloužen dříve než za 30 sekund?

Řešení:

X … doba čekání na obsluhu (s)

$X \sim Exp(\lambda = \frac{1}{50}\ s^{-1}),\ E(X) = \frac{1}{\lambda} = 50\ s$



Příklad 2

Střední doba čekání zákazníka na obsluhu v prodejně je 50 sekund. Doba čekání se řídí exponenciálním rozdělením (pravděpodobnost, že zákazník nebude obsloužen klesá s rostoucím časem exponenciálně). Jaká je pravděpodobnost, že náhodný zákazník bude obsloužen dříve než za 30 sekund?

Řešení:

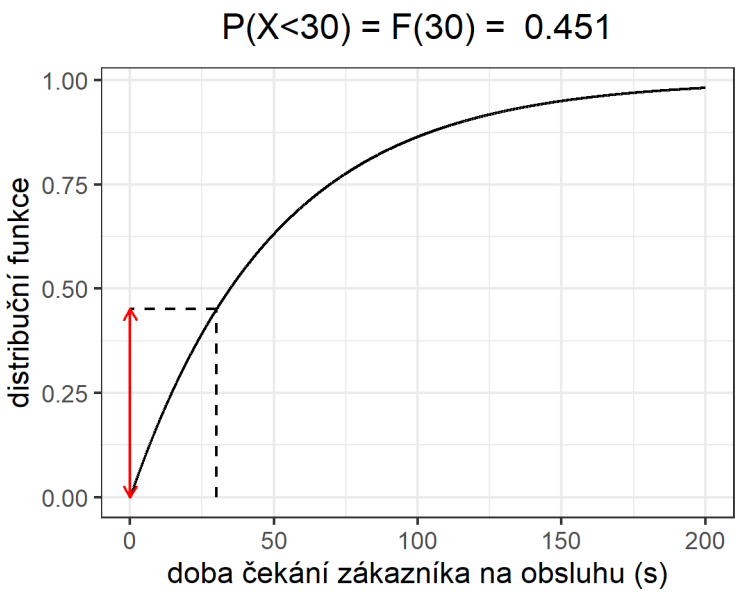
X … doba čekání na obsluhu (s)

$$X \sim Exp(\lambda = \frac{1}{50}\ s^{-1}),\ E(X) = \frac{1}{\lambda} = 50\ s$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$P(X < 30) = F(30) = 1 - e^{-\frac{1}{50} \cdot 30} = 0{,}451$$

V R: *pexp(30,1/50)*



Weibullovo rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

- Zobecnění exponenciálního rozdělení
- Tímto rozdělením lze modelovat i dobu do výskytu události u systémů (jedinců), které jsou v období dětských nemocí, resp. v období stárnutí.

$$X \sim Wb(\theta; \beta)$$

parametr měřítka (angl. scale) $\theta = \frac{1}{\lambda};\ \theta > 0$

parametr tvaru (angl. shape); $\beta > 0$

Weibullovo rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

$$X \sim Wb\left(\frac{1}{\lambda}; \beta\right)$$

Hustota pravděpodobnosti: $f(t) = \begin{cases} \beta\lambda^{\beta} t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^{\beta}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Distribuční funkce: $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Riziková funkce: $\lambda(t) = \begin{cases} \beta\lambda^{\beta} t^{\beta-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

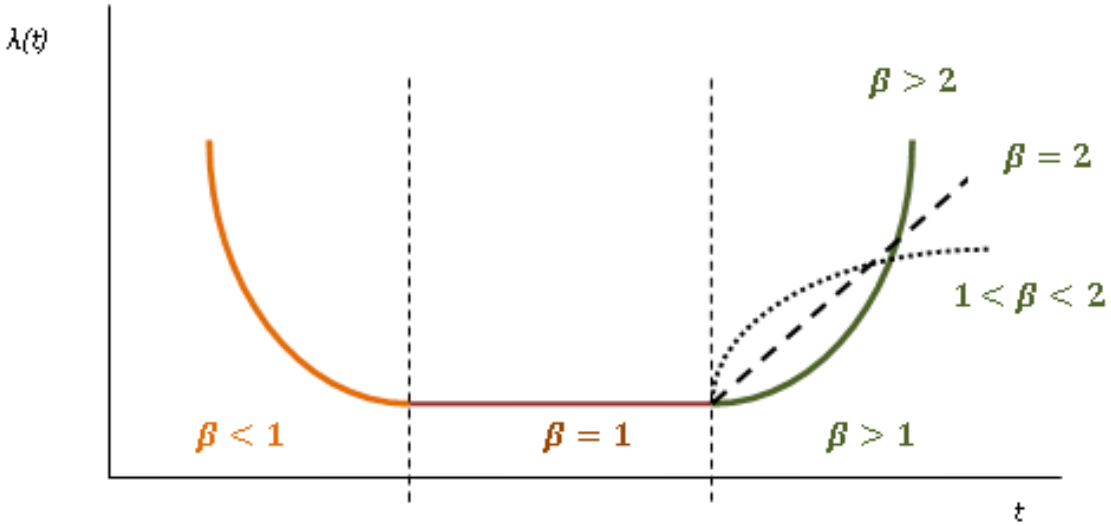
Proč se β označuje jako parametr tvaru?

Weibullovo rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

$$X \sim Wb\left(\frac{1}{\lambda}; \beta\right)$$

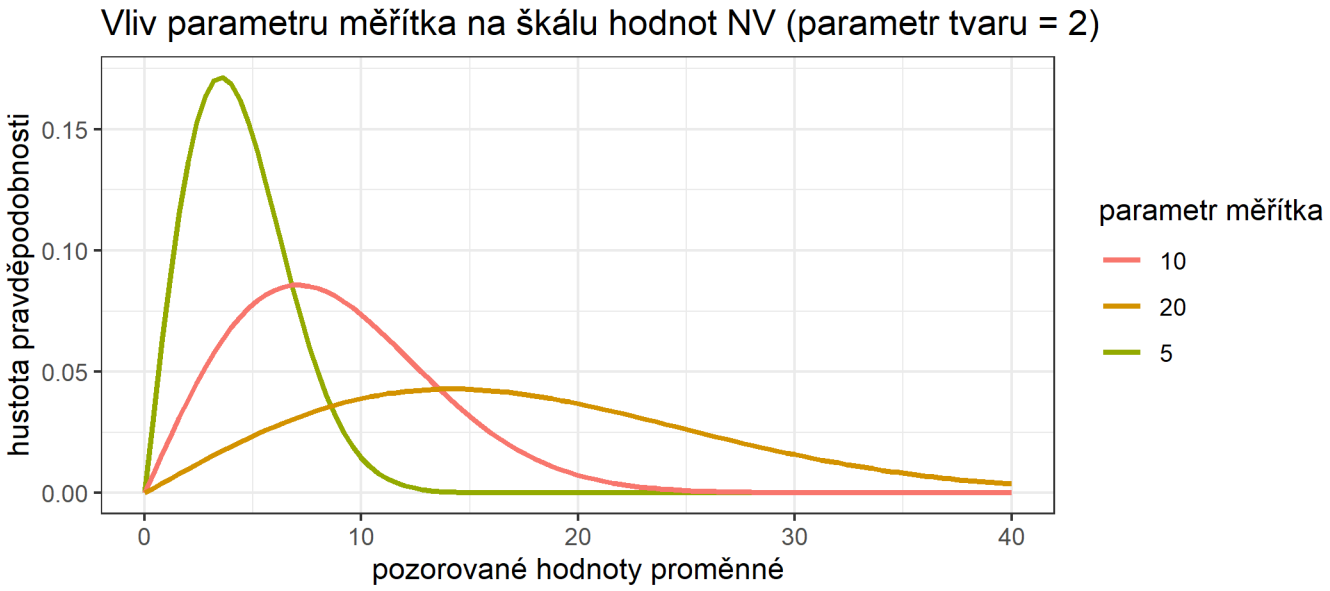
Riziková funkce: $\lambda(t) = \begin{cases} \beta\lambda^{\beta} t^{\beta-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$



Weibullovo rozdělení

X … délka časových intervalů mezi událostmi v Poissonově procesu

$$X \sim Wb\left(\frac{1}{\lambda}; \beta\right)$$



Příklad 3

Doba přežití (měsíce) pacienta má Weibulovo rozdělení s lineárně rostoucí rizikovou funkcí a parametrem měřítka 50.

a) V jakém rozmezí očekáváte dobu přežití pacientů? (Posuďte na základě grafu hustoty pravděpodobnosti.)

b) S jakou pravděpodobností bude doba přežití pacienta delší než 1 rok?

c) Jakou dobu přežije alespoň polovina pacientů?

d) Jaká je hodnota rizikové funkce v 24 měsících? Jaká je pravděpodobnost, že pacient, který přežil 24 měsíců, zemře v následujících 14 dnech?

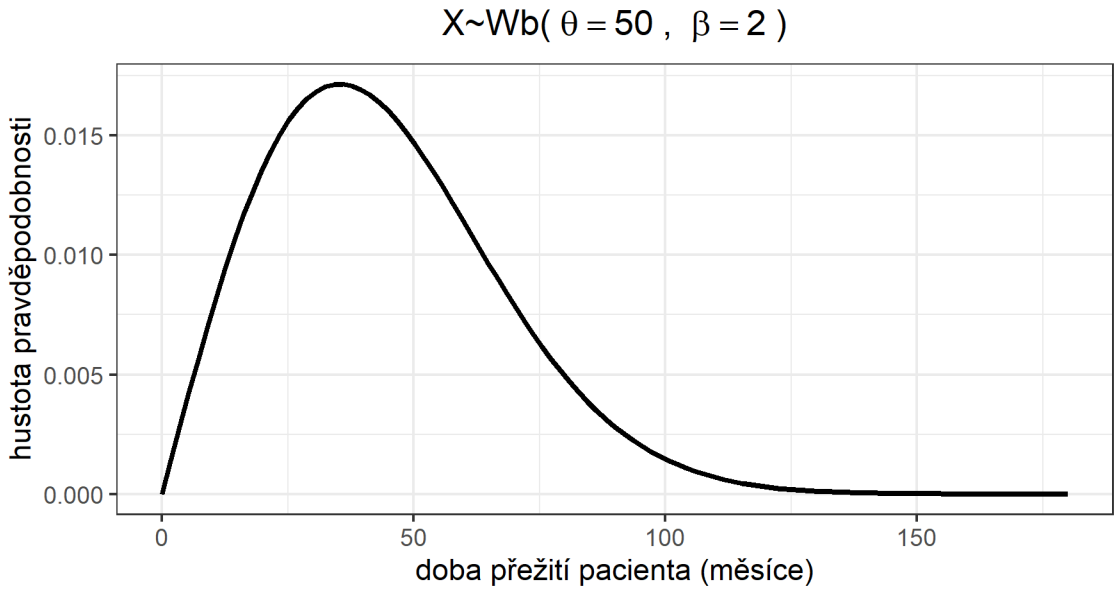
Příklad 3

Doba přežití (měsíce) pacienta má Weibulovo rozdělení s lineárně rostoucí rizikovou funkcí a parametrem měřítka 50.

a) V jakém rozmezí očekáváte dobu přežití pacientů? (Posuďte na základě grafu hustoty pravděpodobnosti.)

Řešení:

X … doba přežití (měs.)
$X \sim Wb(\Theta = 50, \beta = 2)$



Dobu přežití očekáváme cca v rozmezí 0 – 125 měsíců.

Příklad 3

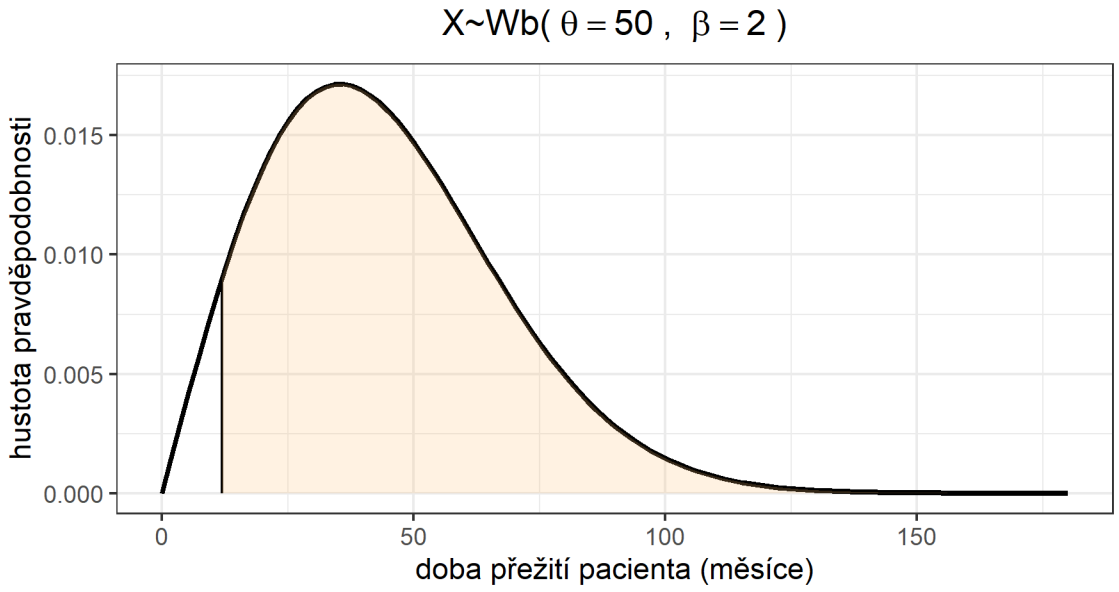
Doba přežití (měsíce) pacienta má Weibulovo rozdělení s lineárně rostoucí rizikovou funkcí a parametrem měřítka 50.

b) S jakou pravděpodobností bude doba přežití pacienta delší než 1 rok?

Řešení:

X … doba do poruchy (měs.)
$X \sim Wb(\Theta = 50, \beta = 2)$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$



$$P(X > 12) = 1 - F(12) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{50} \cdot 12\right)^2}\right) = 0{,}944$$

V R: *1 – pweibull(12,shape = 2,scale = 50)* Pozor! Nejdříve parametr tvaru, poté parametr měřítka.

Příklad 3

Doba přežití (měsíce) pacienta má Weibulovo rozdělení s lineárně rostoucí rizikovou funkcí a parametrem měřítka 50.

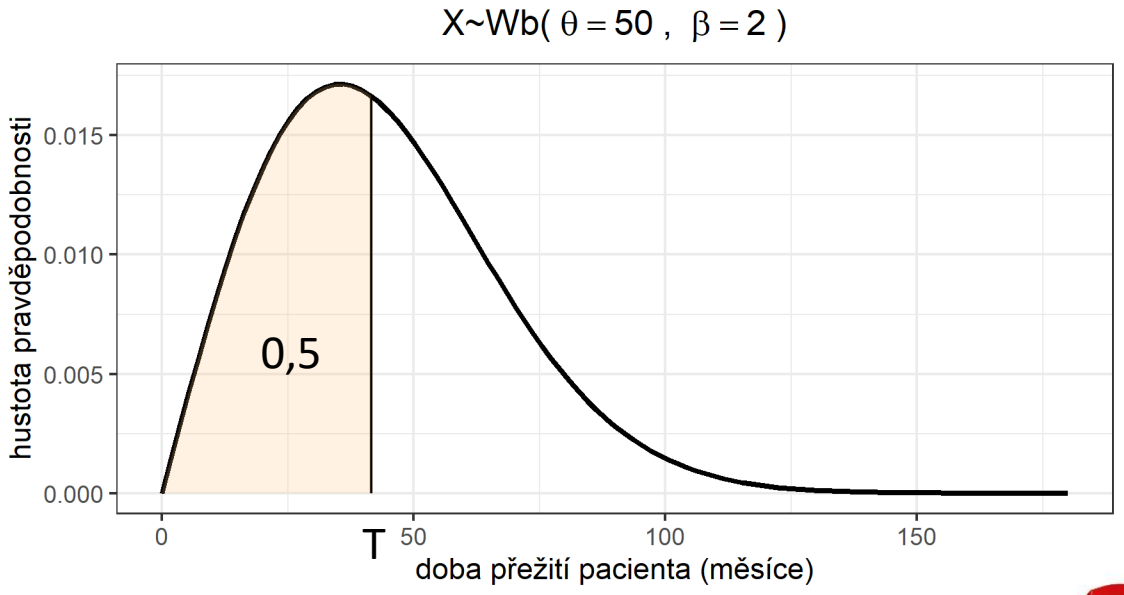
c) Jakou dobu přežije alespoň polovina pacientů?

Řešení:

X … doba do poruchy (měs.)
$X \sim Wb(\Theta = 50, \beta = 2)$

$P(X > T) = 0{,}5$
$\Rightarrow P(X < T) = 0{,}5$

$$\int_0^T f(x)dx = 0{,}5$$



Příklad 3

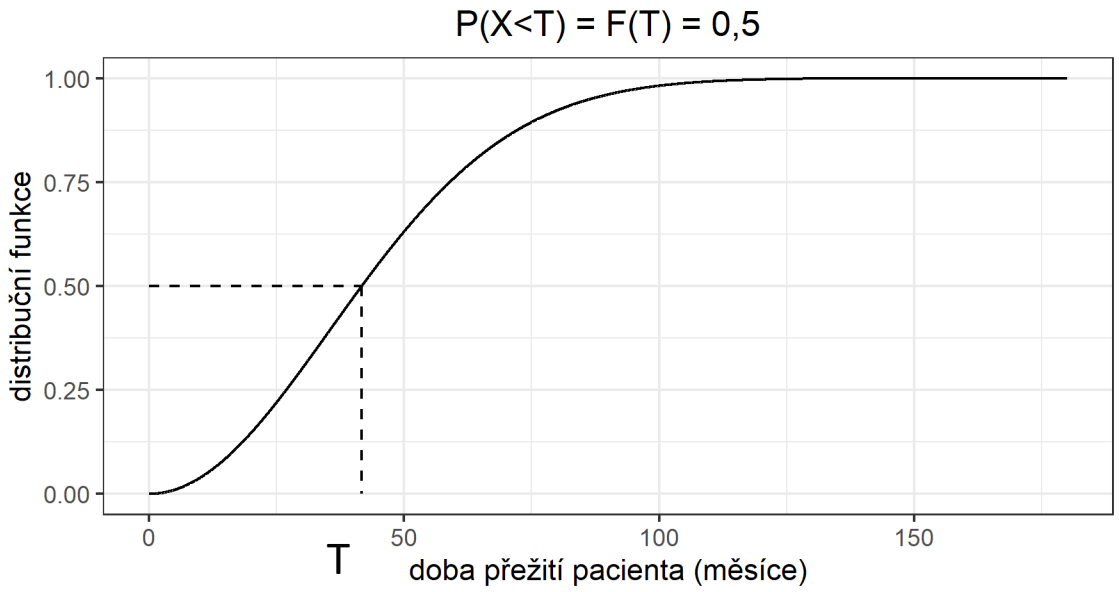
Doba přežití (měsíce) pacienta má Weibulovo rozdělení s lineárně rostoucí rizikovou funkcí a parametrem měřítka 50.

c) Jakou dobu přežije alespoň polovina pacientů?

Řešení:

X … doba do poruchy (měs.)
$X \sim Wb(\Theta = 50, \beta = 2)$

$P(X > T) = 0{,}5$
$\Rightarrow P(X < T) = F(T) = 0{,}5$



Příklad 3

Doba přežití (měsíce) pacienta má Weibulovo rozdělení s lineárně rostoucí rizikovou funkcí a parametrem měřítka 50.

c) Jakou dobu přežije alespoň polovina pacientů?

Řešení:

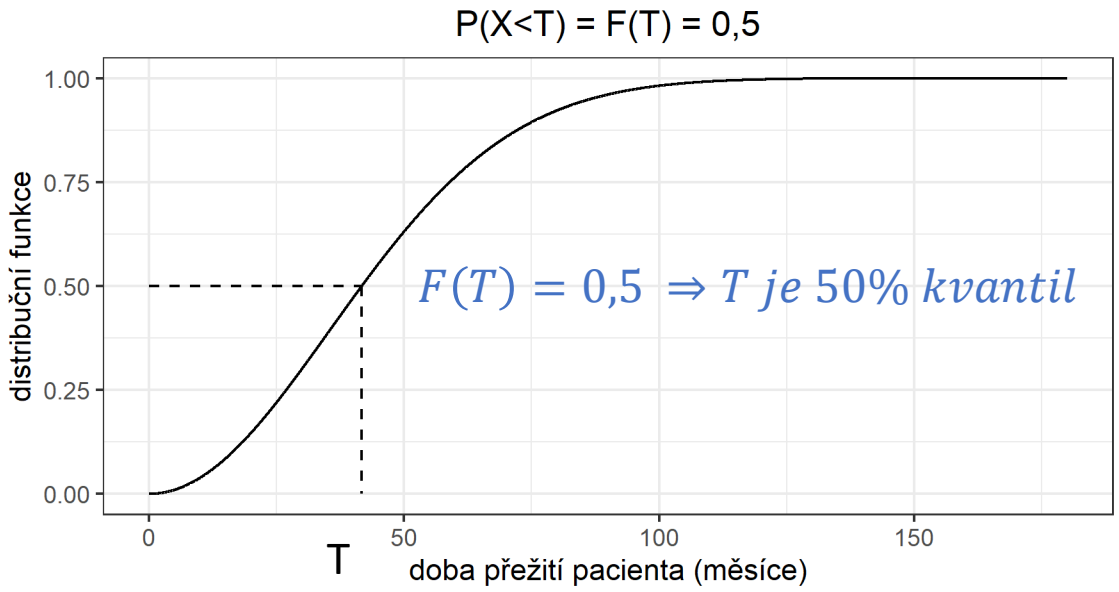
X … doba do poruchy (měs.)
$X \sim Wb(\Theta = 50, \beta = 2)$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$F(T) = 0{,}5$

$$1 - e^{-\left(\frac{1}{50}T\right)^2} = 0{,}5 \Rightarrow T = 50\sqrt{-\ln 0{,}5} = 50 \cdot \sqrt{\ln 2} = 41{,}6\ měs.$$

V R: *qweibull(0.5,shape = 2,scale = 50)*



Příklad 3

Doba přežití (měsíce) pacienta má Weibulovo rozdělení s lineárně rostoucí rizikovou funkcí a parametrem měřítka 50.

d) Jaká je hodnota rizikové funkce v 24 měsících? Jaká je pravděpodobnost, že pacient, který přežil 24 měsíců, zemře v následujících 14 dnech?

Řešení:

X … doba do poruchy (měs.)
$X \sim Wb(\Theta = 50, \beta = 2)$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

$$f(24) = 0{,}0152$$

$$F(24) = 0{,}2058$$

$$\boldsymbol{\lambda(24)} = \frac{0{,}0152}{0{,}7942} = \mathbf{0{,}0191}$$

V R: *dweibull(24,2,50)/(1-pweibull(24,2,50))*

$$P(t \leq X < t + \Delta t | X > t) \cong \lambda(t) \cdot \Delta t$$
$$\boldsymbol{P(24 \leq X < 24{,}5 | X > 24)} \cong 0{,}0191 \cdot 0{,}5 \cong \mathbf{0{,}009}$$

Normální rozdělení

- Bývá vhodné k popisu náhodných veličin, které lze interpretovat jako aditivní výsledek mnoha nepatrných a vzájemně nezávislých faktorů (např. výška člověka, IQ, délky končetin …).
- Popisuje náhodné veličiny, jejichž hodnoty se symetricky shlukují kolem střední hodnoty a vytvářejí tak charakteristický tvar hustoty pravděpodobnosti známý pod názvem Gaussova křivka.

$$X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$$

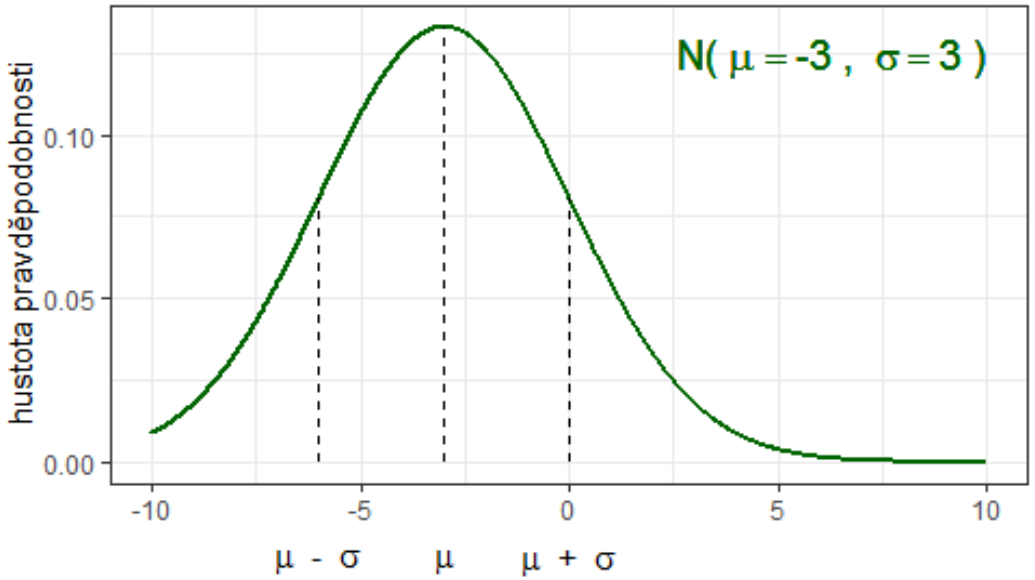
střední hodnota

rozptyl

Normální rozdělení

$$X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$$

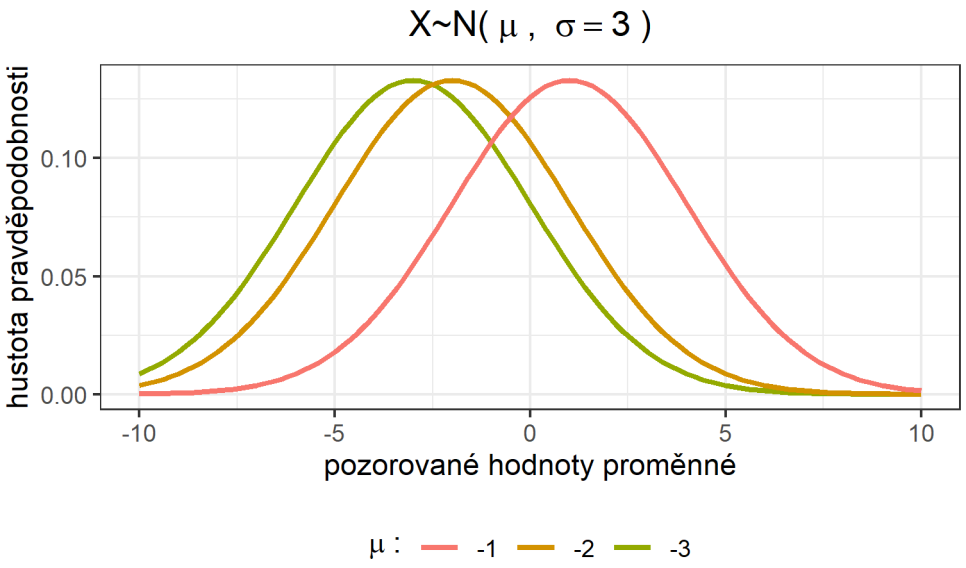
Hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

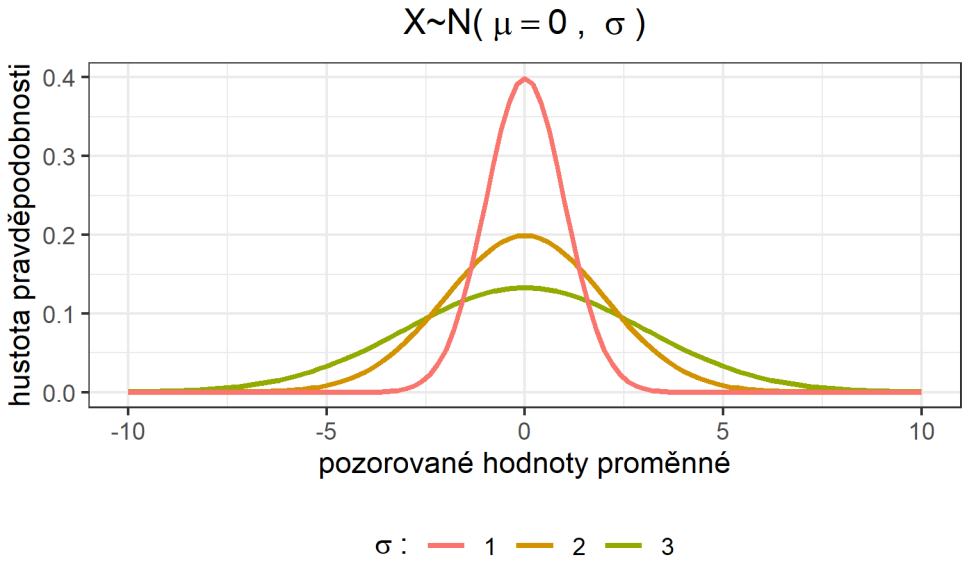


Normální rozdělení

$$X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$$

Hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$





Normální rozdělení

$$X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$$

Hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Distribuční funkce: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

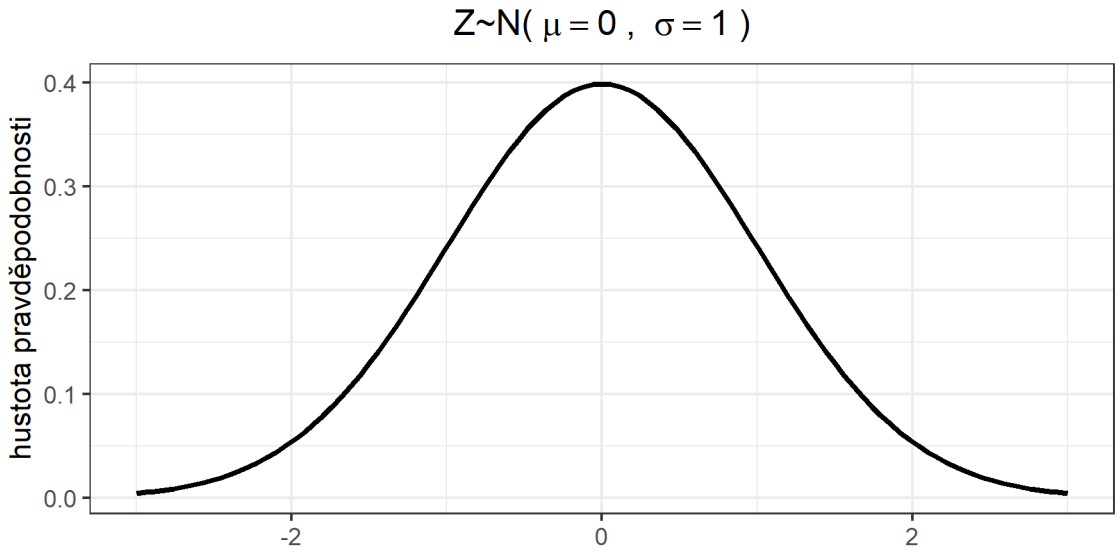
(integrál nelze řešit analyticky)

Normované (standardizované) normální rozdělení

$$Z \sim N(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$$

Hustota pravděpodobnosti: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

Distribuční funkce: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$



Normované (standardizované) normální rozdělení

$$Z \sim N(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$$

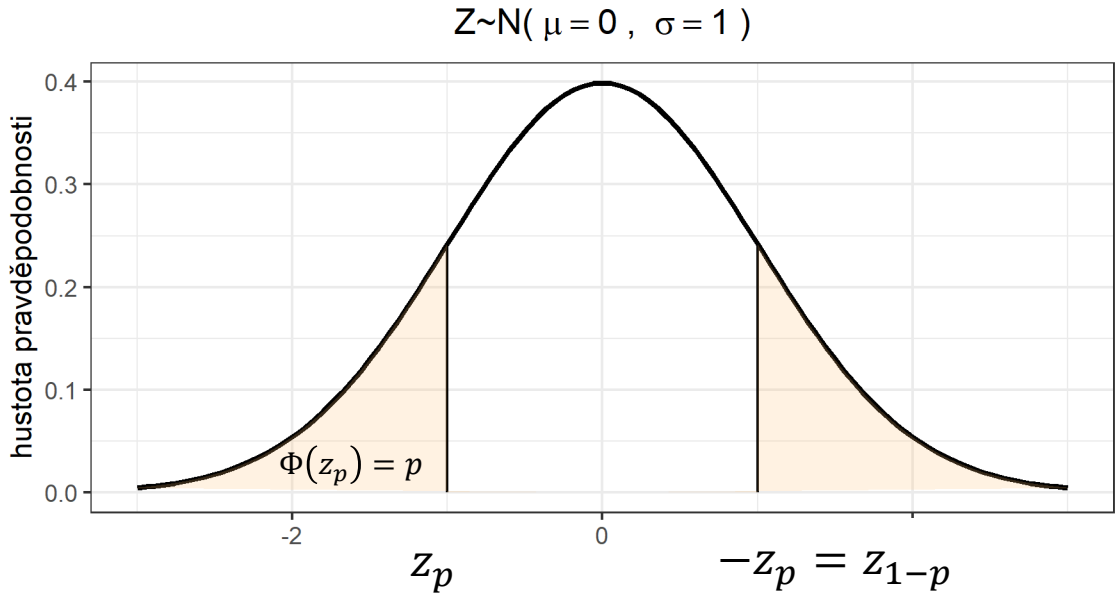
Hustota pravděpodobnosti: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

Distribuční funkce: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$

Vlastnosti normovaného normálního rozdělení:

- $\Phi(-z_p) = 1 - \Phi(z_p)$
- $z_p = -z_{1-p}$,

  kde z_p je p-kvantil normovaného norm. rozdělení



Normované (standardizované) normální rozdělení

$$Z \sim N(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$$

Hustota pravděpodobnosti: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

Distribuční funkce: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$

($\Phi(z)$ je tabelována pro $x > 0$)

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755

Standardizace normálního rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X \sim N(\mu;\ \sigma^2)}$. Definujme náhodnou veličinu *Z*, mnohdy nazývanou **z-skóre**, jako

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Náhodná veličina *Z* má normované normální rozdělení, $\boldsymbol{Z \sim N(0; 1)}$.

Mezi distribuční funkci normální náhodné veličiny *X* a normované normální náhodné veličiny *Z* platí převodní vztah

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).}$$

Důkaz:

$$F(x) = P(X < x) = P(Z\sigma + \mu < x) = P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N\left(\mu = 0, \sigma^2 = 1\right)$ a $X \sim N\left(\mu = 10, \sigma^2 = 9\right)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

a) $P(Z < 1{,}23)$

b) $P(-1{,}23 < Z < 1{,}23)$

c) $z_{0{,}75}$

d) $z_{0{,}25}$

e) $P(X < 12)$

f) $P(4 < X < 12)$

g) $x_{0{,}75}$

h) $x_{0{,}25}$

Tabulky:

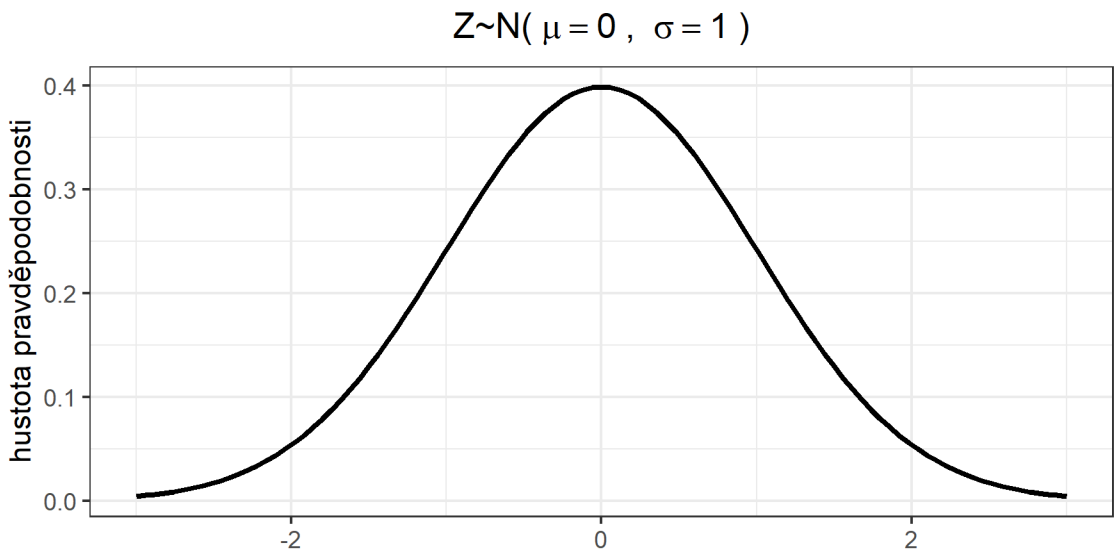
http://homel.vsb.cz/~lit40/PRASTA/Materialy/Vzorce-a-tabulky_new.pdf

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

a) $P(Z < 1{,}23)$

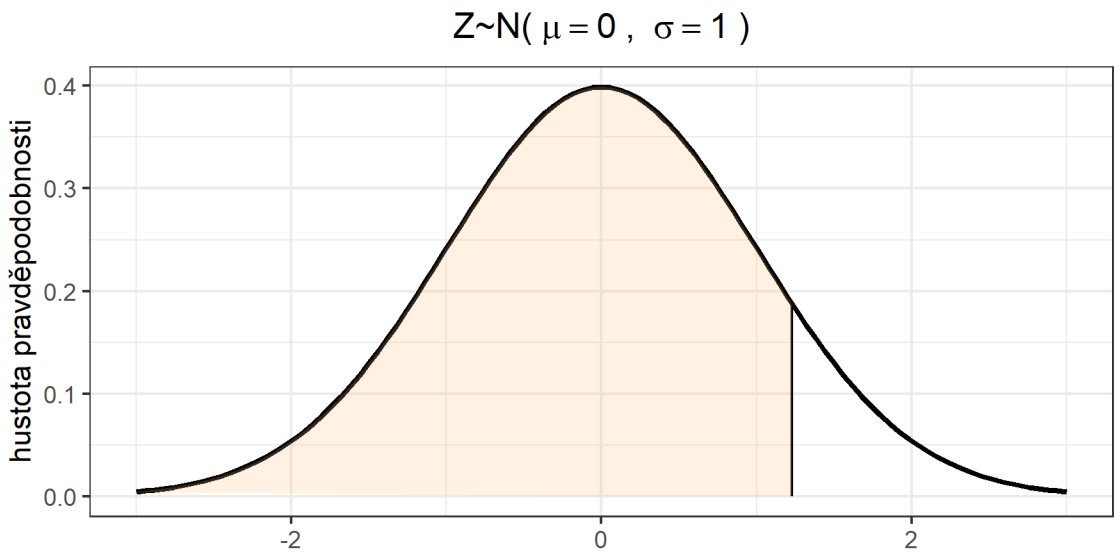


Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

a) $P(Z < 1{,}23) = \Phi(1{,}23)$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

a) $P(Z < 1{,}23) = \Phi(1{,}23)$

$= \mathbf{0{,}891}$

(pnorm(1.23,0,1))

(pnorm(1.23))

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

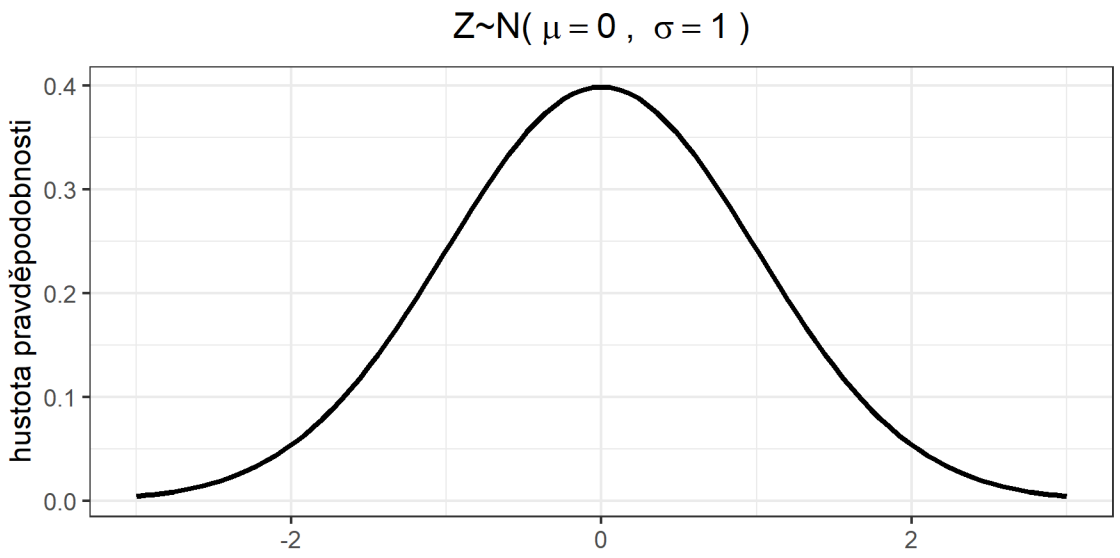
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

b) $P(-1{,}23 < Z < 1{,}23)$



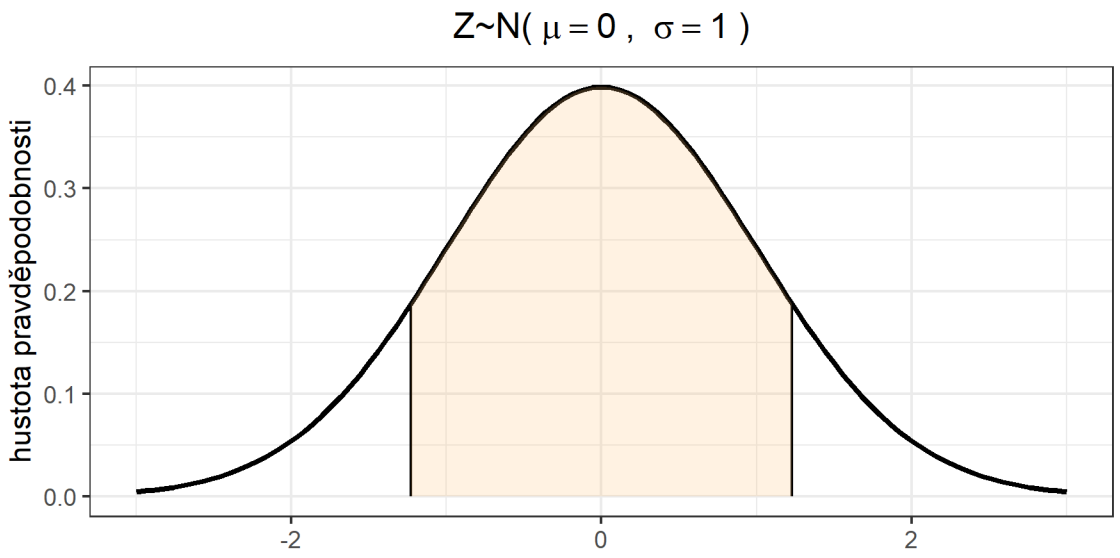
Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

b) $P(-1{,}23 < Z < 1{,}23) =$

$= \Phi(1{,}23) - \Phi(-1{,}23) =$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

b) $P(-1{,}23 < Z < 1{,}23) =$

$$= \Phi(1{,}23) - \Phi(-1{,}23) =$$

$$= \Phi(1{,}23) - (1 - \Phi(1{,}23)) =$$

$$= 2\Phi(1{,}23) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}891 - 1 = \mathbf{0{,}682}$$

(pnorm(1.23)-pnorm(-1.23))

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

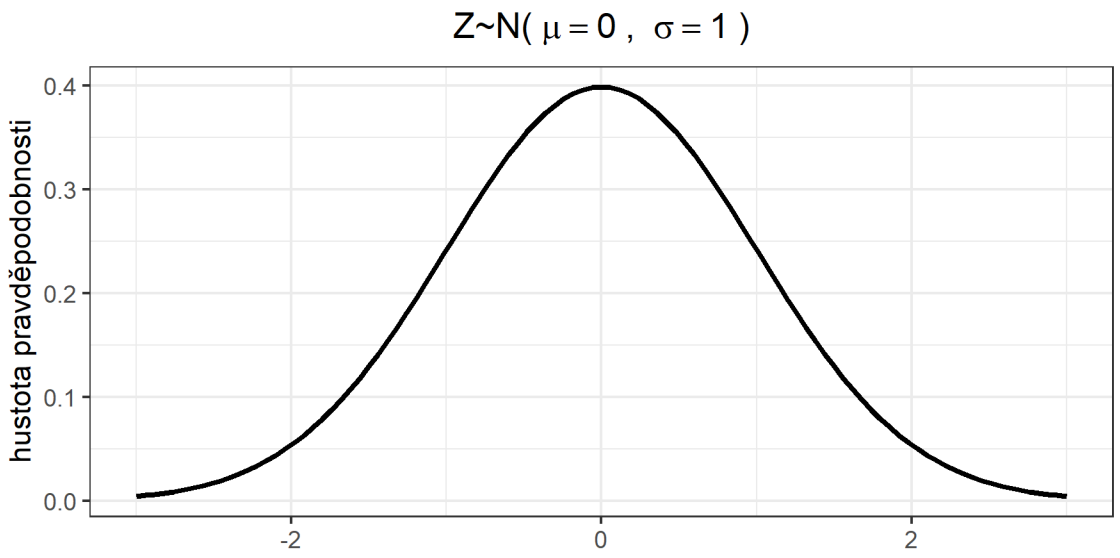
Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

c) $z_{0,75}$

$$P(Z < z_{0,75}) = 0{,}75$$



Příklad 4

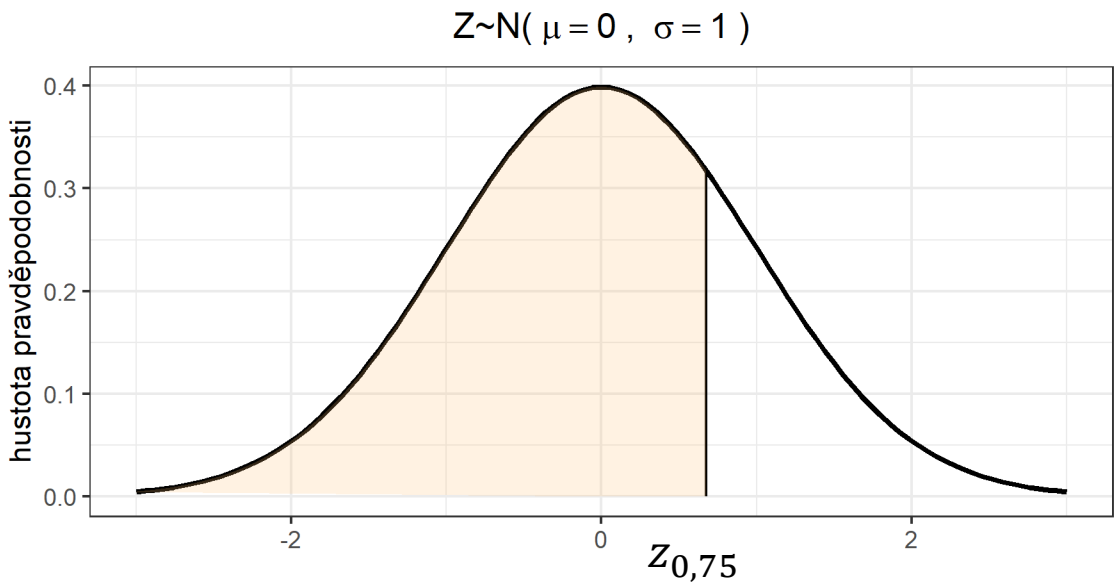
Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

c) $z_{0,75}$

$$P(Z < z_{0,75}) = 0{,}75$$

$$\Phi(z_{0,75}) = 0{,}75$$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

c) $z_{0,75}$

$$P(Z < z_{0,75}) = 0{,}75$$

$$\Phi(z_{0,75}) = 0{,}75$$

$$\boldsymbol{z_{0,75} \cong 0,675}$$

(qnorm(0.75))

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

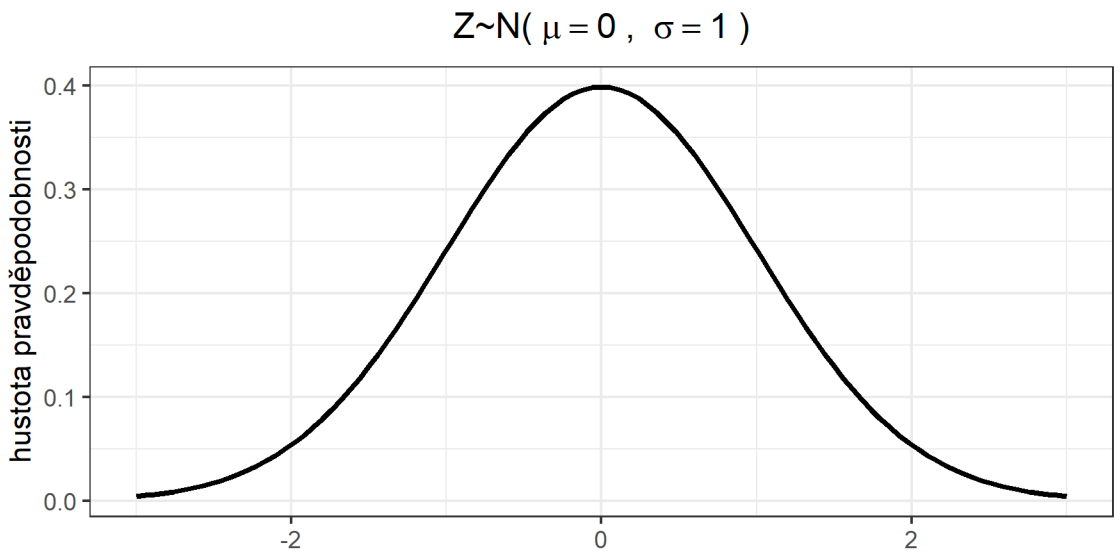
Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

c) $z_{0,25}$

$$P(Z < z_{0,25}) = 0{,}25$$



Příklad 4

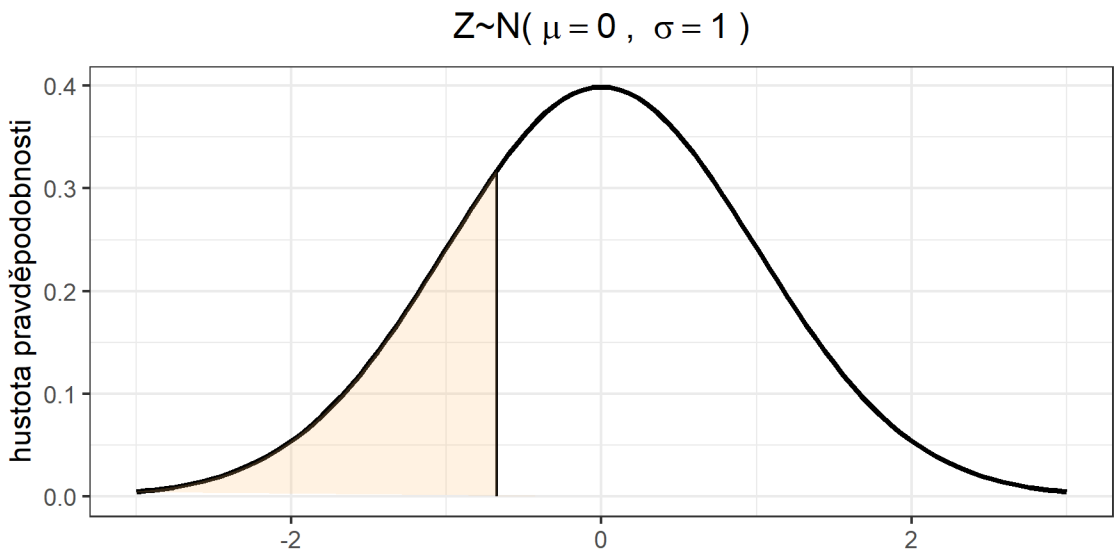
Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

c) $z_{0,25}$

$$P(Z < z_{0,25}) = 0{,}25$$

$$\Phi(z_{0,25}) = 0{,}25$$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)}$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

c) $z_{0,25}$

$$P(Z < z_{0,25}) = 0{,}25$$

$$\Phi(z_{0,25}) = 0{,}25$$

$$\Phi(-z_{0,25}) = 0{,}75$$

$$-z_{0,25} \cong 0{,}675$$

$$\boldsymbol{z_{0,25} \cong -0{,}675}$$

(qnorm(0.25))

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

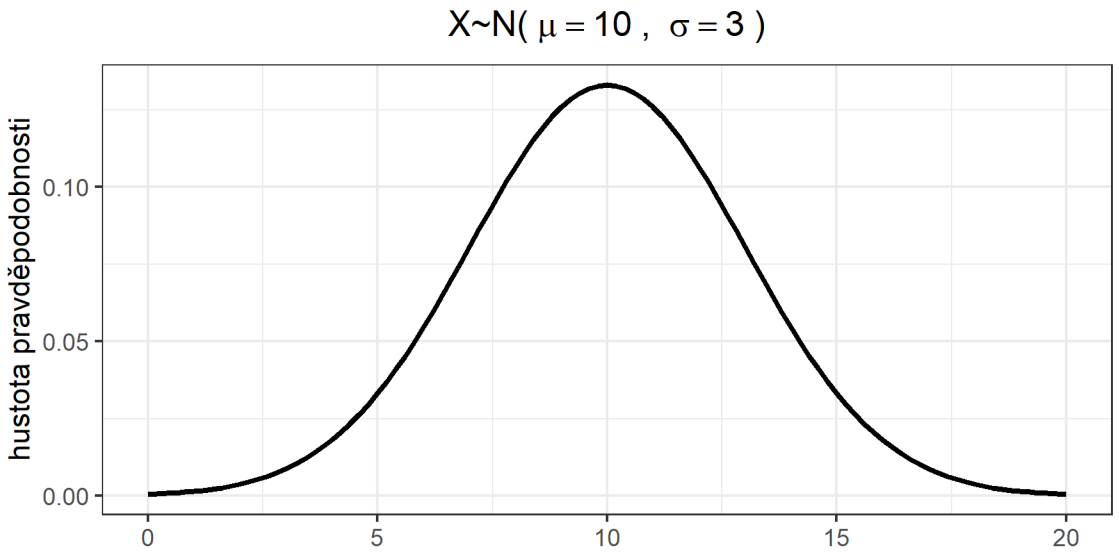
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

e) $P(X < 12)$

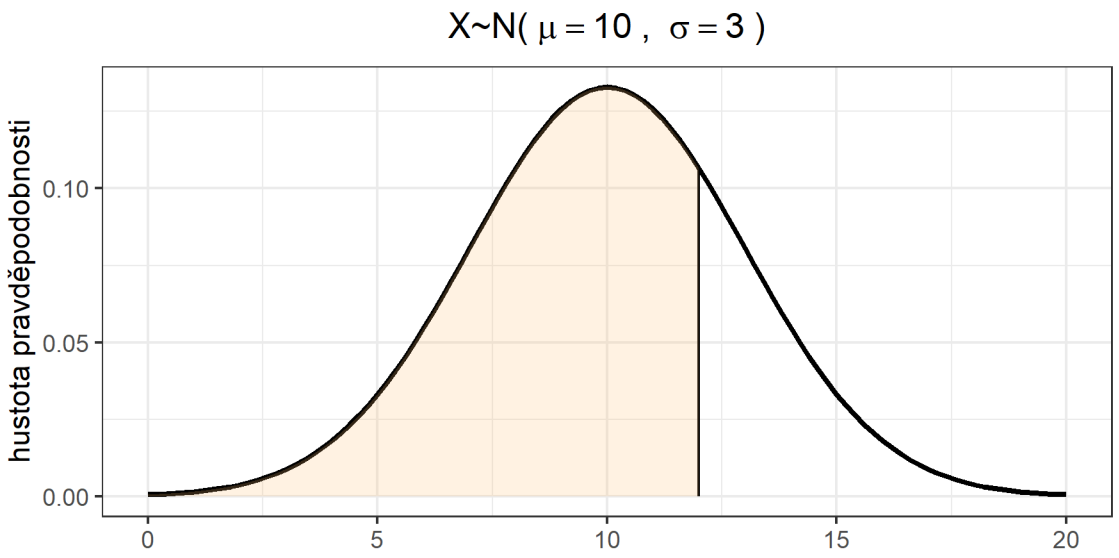


Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

e) $P(X < 12) = F(12) =$



Standardizace normálního rozdělení

Nechť $\boldsymbol{X \sim N(\mu;\ \sigma^2)}$. Definujme náhodnou veličinu *Z*, mnohdy nazývanou **z-skóre**, jako

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Náhodná veličina *Z* má normované normální rozdělení, $\boldsymbol{Z \sim N(0; 1)}$.

Mezi distribuční funkci normální náhodné veličiny *X* a normované normální náhodné veličiny *Z* platí převodní vztah

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).}$$

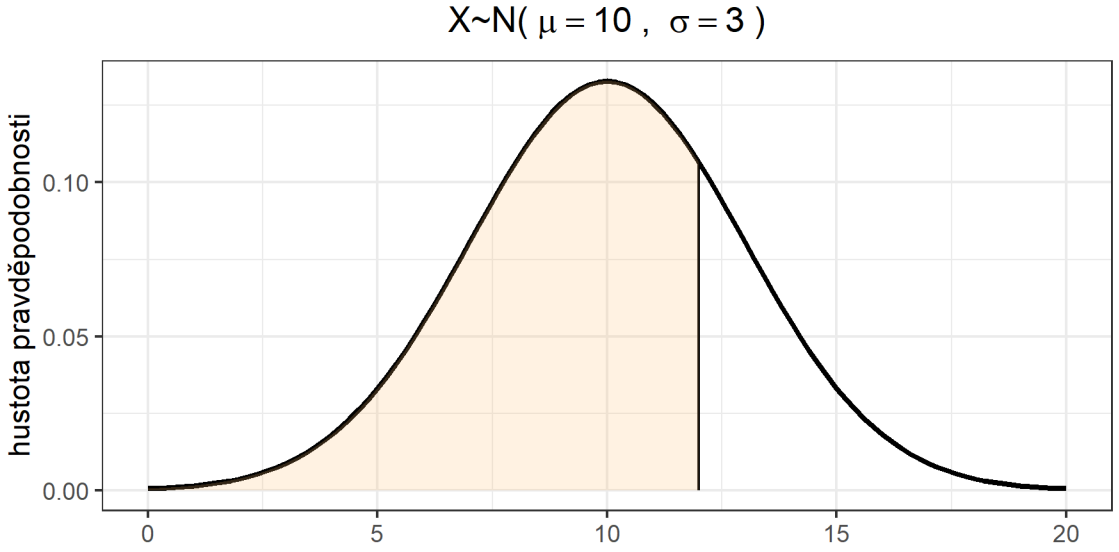
Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

e) $P(X < 12) = F(12) =$

$$= \Phi\left(\frac{12-10}{\sqrt{9}}\right) \cong \Phi(0{,}67) =$$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

e) $P(X < 12) = F(12) =$

$$= \Phi\left(\frac{12-10}{\sqrt{9}}\right) \cong \Phi(0{,}67) =$$

$$\cong \mathbf{0{,}749}$$

(pnorm(12,10,3))

POZOR! směrodatná odchylka

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

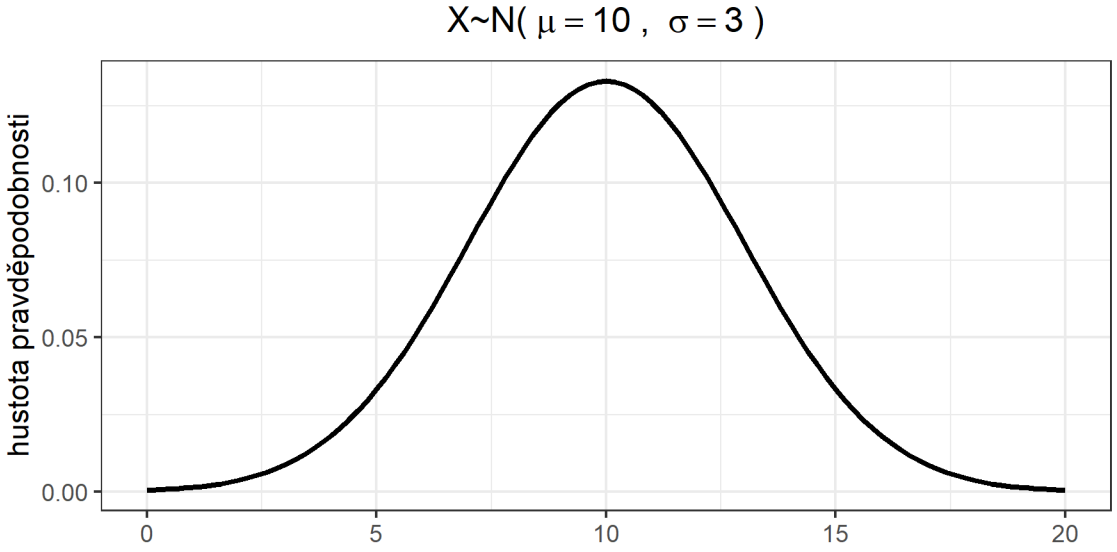
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

f) $P(4 < X < 12)$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

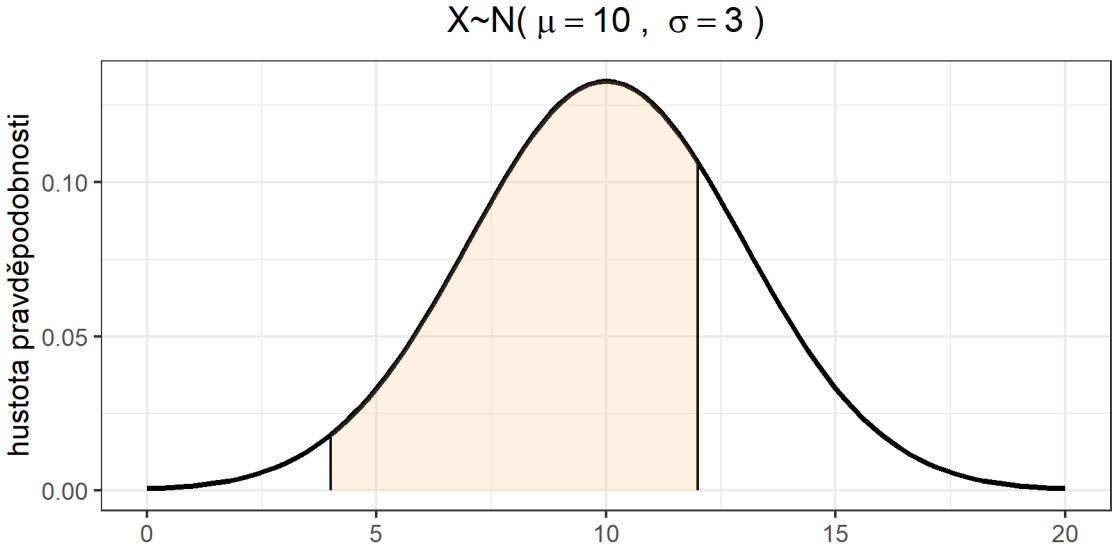
Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

f) $P(4 < X < 12) = F(12) - F(4) =$

$$= \Phi\left(\frac{12-10}{\sqrt{9}}\right) - \Phi\left(\frac{4-10}{\sqrt{9}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}67) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(0{,}67) - (1 - \Phi(2)) =$$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

f) $P(4 < X < 12) = F(12) - F(4) =$

$$= \Phi\left(\frac{12-10}{\sqrt{9}}\right) - \Phi\left(\frac{4-10}{\sqrt{9}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}67) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(0{,}67) - (1 - \Phi(2)) =$$

$$\cong \mathbf{0{,}725}$$

(pnorm(12,10,3)- pnorm(4,10,3))

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

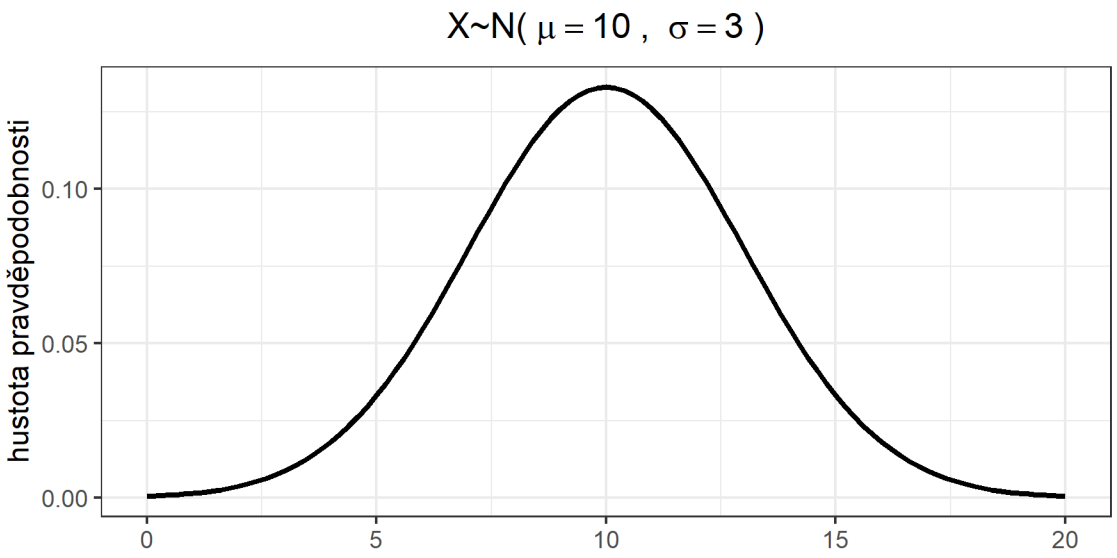
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N\left(\mu = 0, \sigma^2 = 1\right)$ a $\boldsymbol{X \sim N\left(\mu = 10, \sigma^2 = 9\right)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

g) $x_{0,75}$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

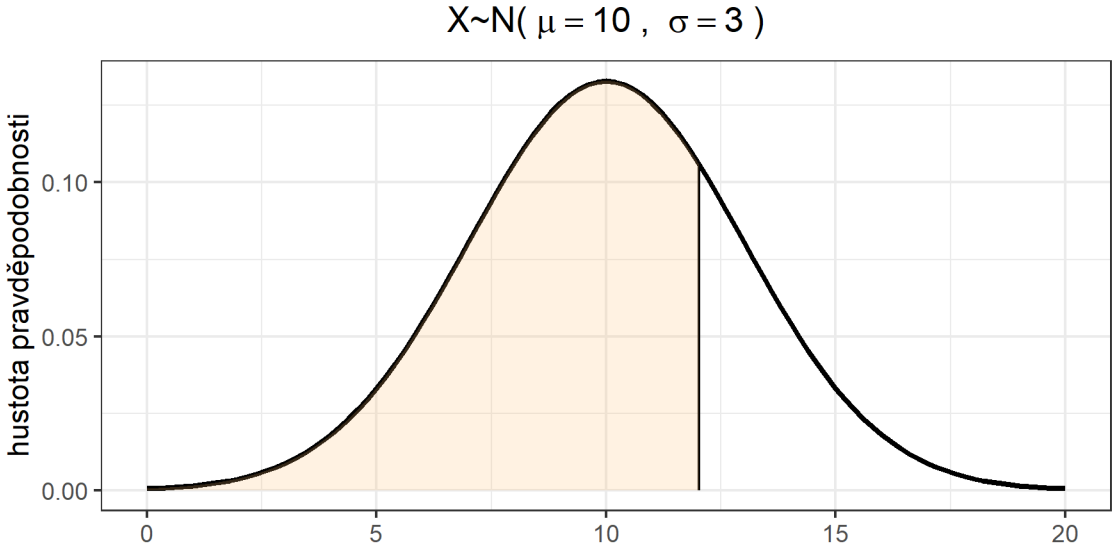
Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

g) $x_{0,75}$

$$P(X < x_{0,75}) = 0{,}75$$

$$F(x_{0,75}) = 0{,}75$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,75} - 10}{3}\right) = 0{,}75$$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

g) $x_{0,75}$

$$P(X < x_{0,75}) = 0{,}75$$

$$F(x_{0,75}) = 0{,}75$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,75} - 10}{3}\right) = 0{,}75$$

$$\frac{x_{0,75} - 10}{3} = 0{,}675$$

$$\boldsymbol{x_{0,75} = 12{,}025}$$

(*qnorm(0.75,10,3)*)

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

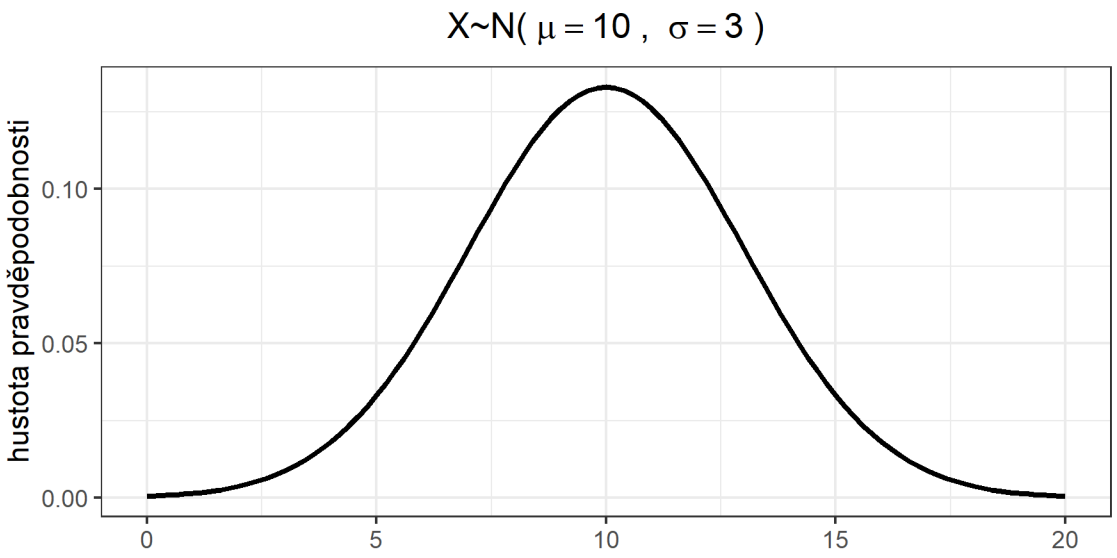
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

h) $x_{0,25}$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

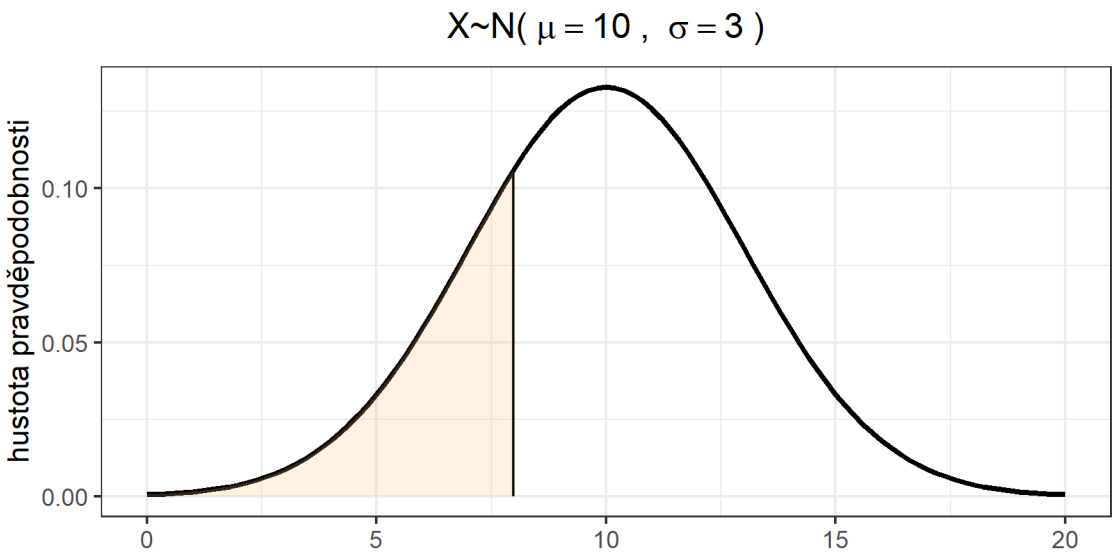
Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

h) $x_{0,25}$

$$P(X < x_{0,25}) = 0{,}25$$

$$F(x_{0,25}) = 0{,}25$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,25} - 10}{3}\right) = 0{,}25$$



Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)}$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

h) $x_{0,25}$

$$P(X < x_{0,25}) = 0{,}25$$

$$F(x_{0,25}) = 0{,}25$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,25}-10}{3}\right) = 0{,}25$$

$$\Phi\left(-\frac{x_{0,25}-10}{3}\right) = 0{,}75$$

$$-\frac{x_{0,25}-10}{3} = 0{,}675$$

$$\boldsymbol{x_{0,25} = 7{,}975}$$

(*qnorm(0.25,10,3)*)

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

Příklad 4

Mějme dány náhodné veličiny X a Z, kde $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ a $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 9)$.

Na základě náčrtku hustoty pravděpodobnosti odhadněte a následně za pomocí tabulky distribuční funkce normované normální náhodné veličiny určete:

a) $P(Z < 1{,}23)$ ~*pnorm(1.23,0,1)*

b) $P(-1{,}23 < Z < 1{,}23)$~*pnorm(1.23,0,1)-pnorm(-1.23,0,1)*

c) $z_{0,75}$ ~*qnorm(0.75,0,1)*

d) $z_{0,25}$~*qnorm(0.25,0,1)*

e) $P(X < 12)$~*pnorm(12,10,3)*

f) $P(4 < X < 12)$~*pnorm(12,10,3)-pnorm(12,10,4)*

g) $x_{0,75}$ ~*qnorm(0.75,10,3)*

h) $x_{0,25}$ ~*qnorm(0.25,10,3)*

Řešení v R

POZOR! Jako druhý parametr se uvádí směrodatná odchylka, nikoliv rozptyl!!!

Příklad 5

Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a směr. odchylkou σ.

a) Kolik procent hodnot náhodné veličiny leží v rozmezí $\mu \pm 1\sigma$?

b) Kolik procent hodnot náhodné veličiny leží v rozmezí $\mu \pm 2\sigma$?

c) Kolik procent hodnot náhodné veličiny leží v rozmezí $\mu \pm 3\sigma$?

Tabulky:

http://homel.vsb.cz/~lit40/PRASTA/Materialy/Vzorce-a-tabulky_new.pdf

Příklad 5

Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a směr. odchylkou σ.

$$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

a) $P(\mu - 1\sigma < X < \mu + 1\sigma) =$

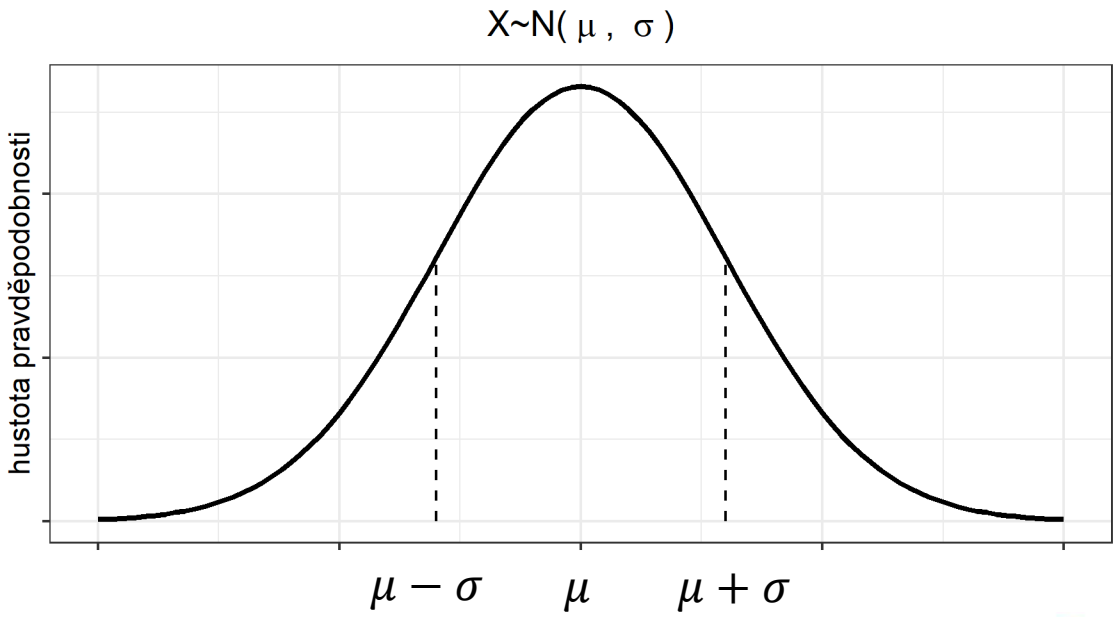
$$= F(\mu + 1\sigma) - F(\mu - 1\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{(\mu+1\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-1\sigma)-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 =$$



Příklad 5

Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a směr. odchylkou σ.

$$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

a) $P(\mu - 1\sigma < X < \mu + 1\sigma) =$

$$= F(\mu + 1\sigma) - F(\mu - 1\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{(\mu+1\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-1\sigma)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 =$$

$$\cong \mathbf{0,682}$$

(pnorm(1)- pnorm(-1))

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Phi(x)$ pro $x > 0$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918

Příklad 5

Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a směr. odchylkou σ.

$$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) =$

$$= F(\mu + 2\sigma) - F(\mu - 2\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{(\mu+2\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-2\sigma)-\mu}{\sigma}\right) =$$

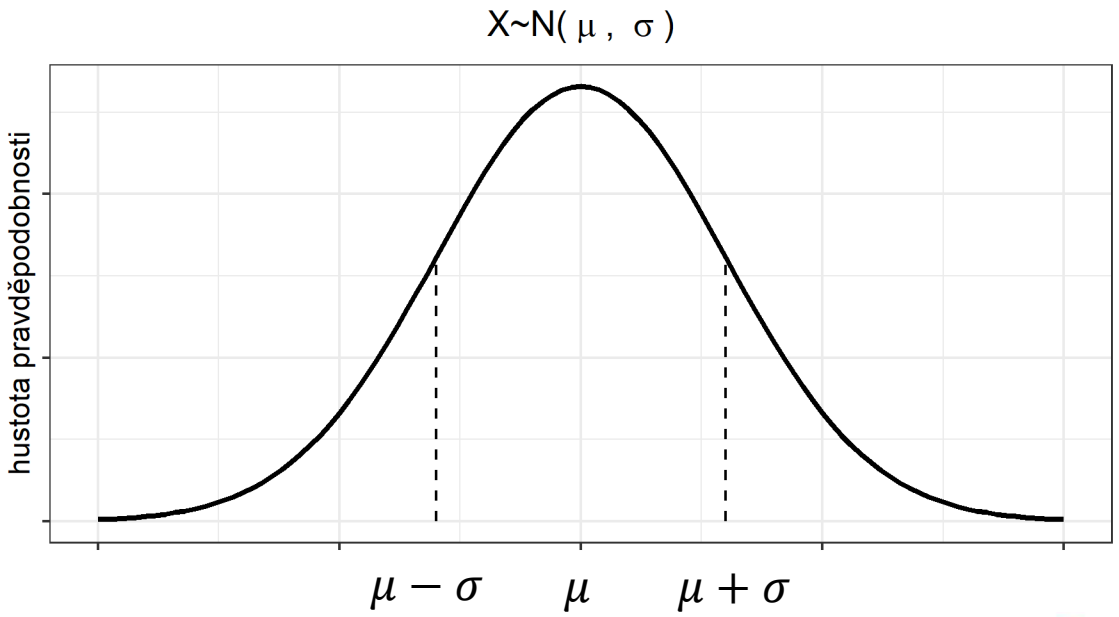
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) =$$

$$= 2\Phi(2) - 1 =$$

$$\cong \mathbf{0,954}$$

(pnorm(2)- pnorm(-2))



Příklad 5

Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou μ a směr. odchylkou σ.

$$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) =$

$$= F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) =$$

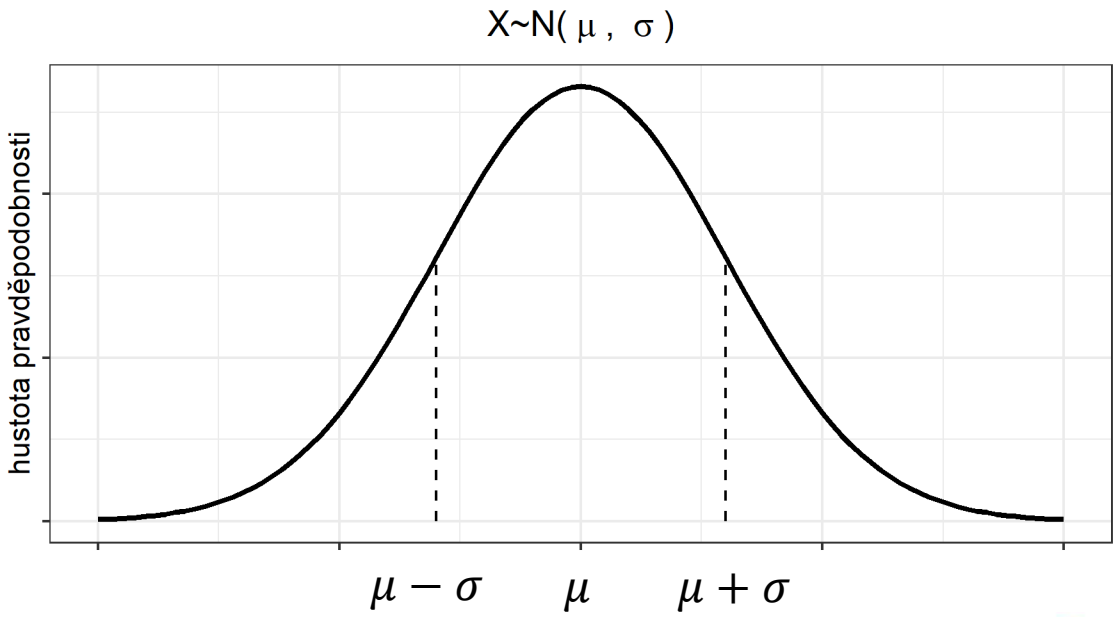
$$= \Phi(3) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) =$$

$$= 2\Phi(3) - 1 =$$

$$\cong \mathbf{0,997}$$

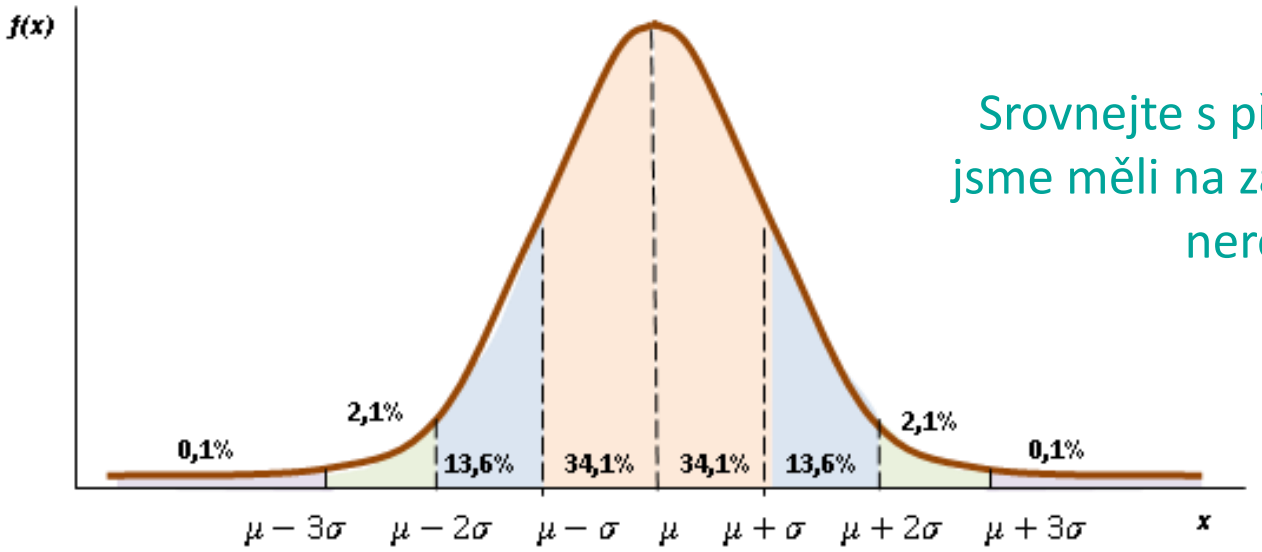
(pnorm(3)- pnorm(-3))



Pravidlo 3σ

Pro NV s normálním rozdělením lze vyčíslit pravděpodobnost, že náhodná veličina se bude vyskytovat v intervalu $(\mu - k\sigma; \mu + k\sigma)$.

k	$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$
1	0,682
2	0,954
3	0,997

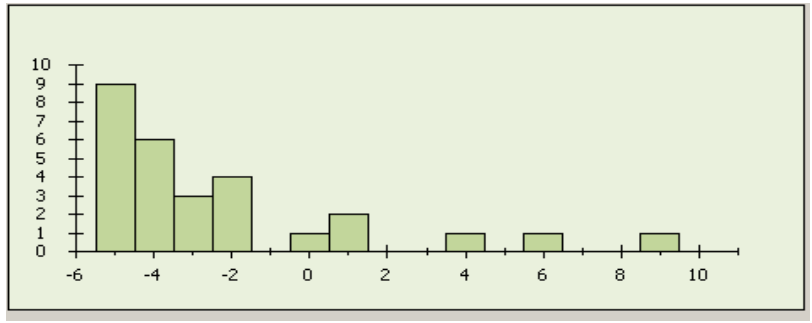


Srovnejte s představou, kterou jsme měli na základě Čebyševovy nerovnosti!

Pravidlo 3σ

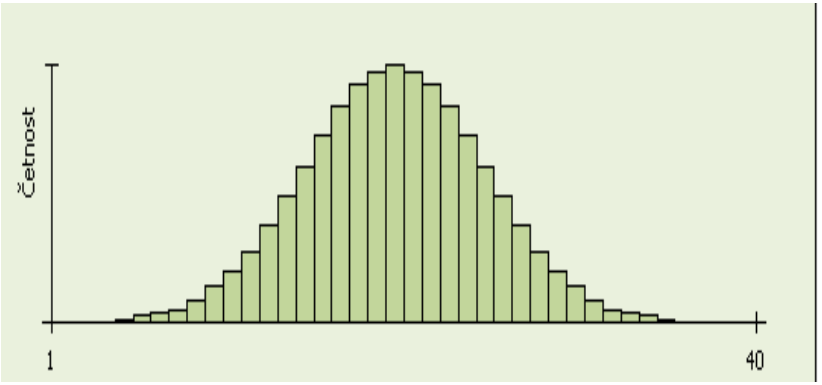
Čebyševova nerovnost: $\forall k > 0\colon\ P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}$

$\boldsymbol{k}$	$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$
1	>0
2	>0,75
3	>0,89



Pravidlo 3σ

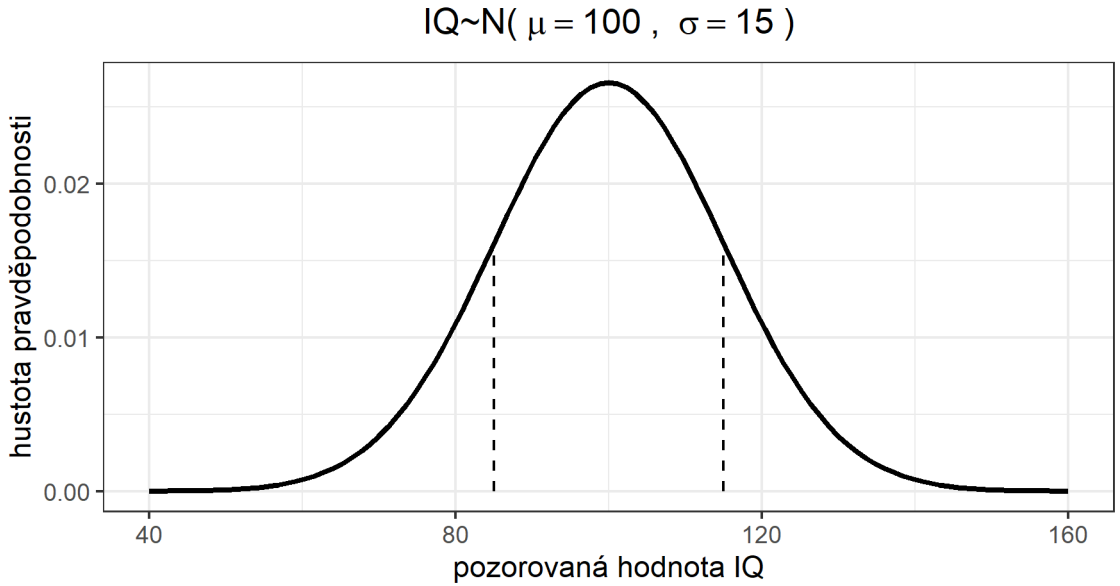
$\boldsymbol{k}$	$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$
1	0,682
2	0,954
3	0,997



Příklad 6

Nechť náhodná veličina modelující IQ (inteligenční kvocient) evropské populace má normální rozdělení se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů.

a) V jakém rozmezí očekáváte IQ evropské populace?

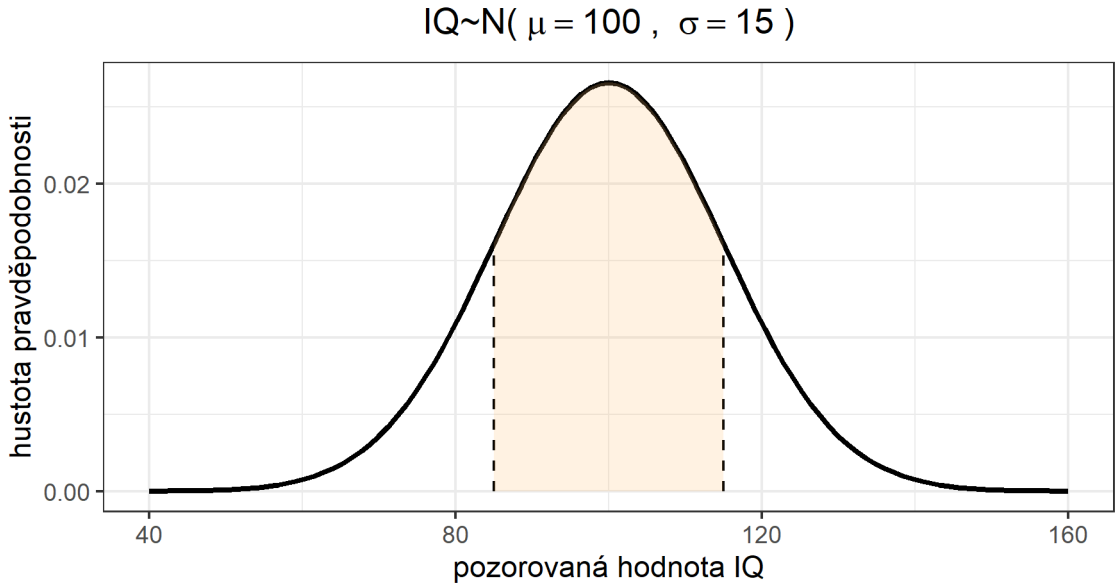


Pravidlo 3σ: cca 55 bodů – 145 bodů

Příklad 6

Nechť náhodná veličina modelující IQ (inteligenční kvocient) evropské populace má normální rozdělení se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů.

b) Kolik procent Evropanů má IQ v rozmezí 85-115 bodů?

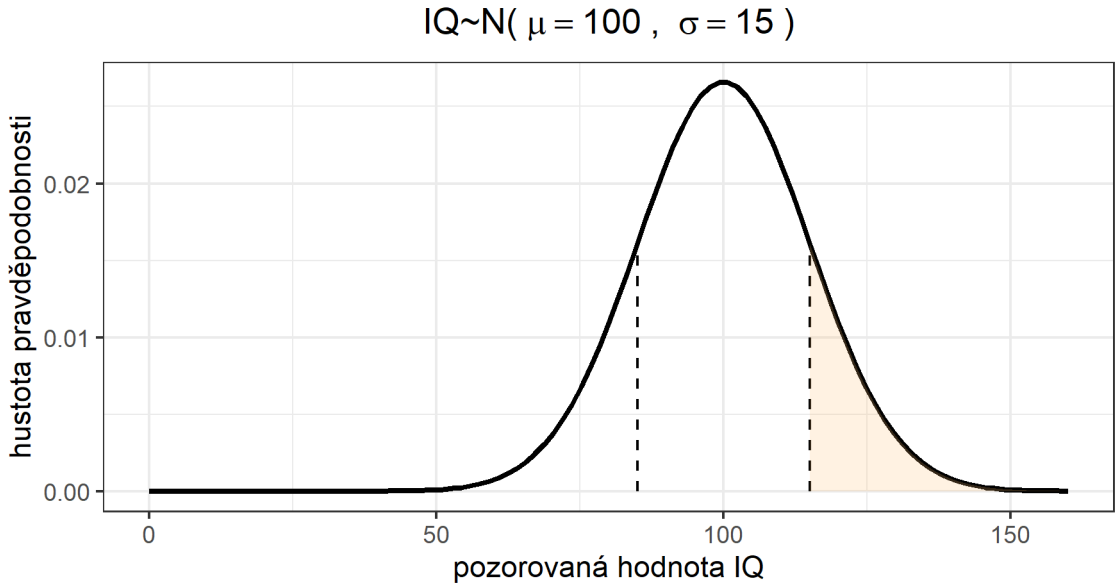


$$P(85 \leq IQ \leq 115) = F(115) - F(85) = \Phi\left(\frac{115-100}{15}\right) - \Phi\left(\frac{85-100}{15}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$$

Příklad 6

Nechť náhodná veličina modelující IQ (inteligenční kvocient) evropské populace má normální rozdělení se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů.

c) Kolik procent Evropanů má IQ vyšší než 115 bodů?

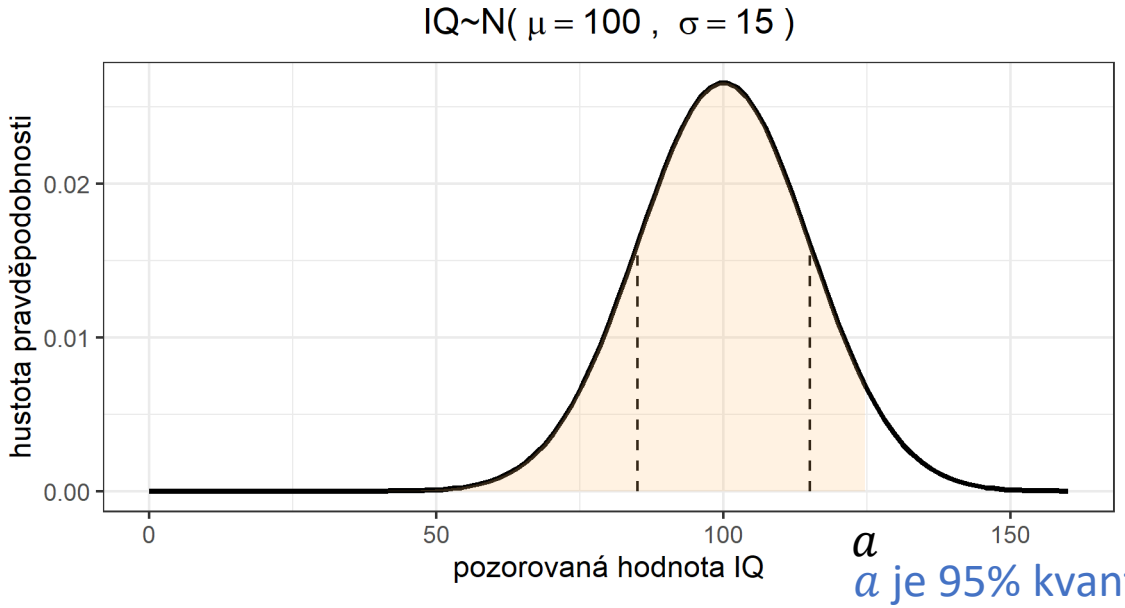


$$P(IQ > 115) = 1 - F(115) = 1 - \Phi\left(\frac{115-100}{15}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

Příklad 6

Nechť náhodná veličina modelující IQ (inteligenční kvocient) evropské populace má normální rozdělení se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů.

d) Jakou hodnotu IQ překračuje maximálně 5% evropské populace?



a je 95% kvantil IQ

$$P(IQ > a) = 0{,}05 \Rightarrow P(X < a) = 0{,}95 \Rightarrow F(a) = 0{,}95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{a-100}{15} = 1{,}645 \Rightarrow a \cong 124{,}7$$

Příklad 6

Nechť náhodná veličina modelující IQ (inteligenční kvocient) evropské populace má normální rozdělení se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů.

a) V jakém rozmezí očekáváte IQ evropské populace? (Posuďte na základě grafu hustoty pravděpodobnosti.)

b) Kolik procent Evropanů má IQ v rozmezí 85-115 bodů?

c) Kolik procent Evropanů má IQ vyšší než 115 bodů?

d) Jakou hodnotu IQ překračuje maximálně 5% evropské populace?

Video:

http://am-nas.vsb.cz/lit40/PRASTA/Videa/SNV_norm_roz/index.html

Krátké video na závěr…

https://www.barrandov.tv/video/164200-tyden-s-prezidentem-19-9-2019,

30:45 – 31:45

Děkuji za pozornost!

martina.litschmannova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY