Kombinatorika

Martina Litschmannová

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Kombinatorika

Kombinatorika se zabývá různými způsoby výběru z daného souboru.

Kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členu n_k způsoby, je roven

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Kolik různých uspořádaných dvojic čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?

Řešení

V prvním hodu může padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_1 = 6$, ke každému z nich může ve druhém hodu opět padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_2 = 6$. Počet různých dvojic ($k = 2$) je tedy $6 \cdot 6 = \mathbf{36}$.

Kombinatorika

Kombinatorika se zabývá různými způsoby výběru z daného souboru.

Kombinatorické pravidlo součtu

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2, \cup \cdots \cup A_n$ je roven

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$

Kolik máme pastelek, jestliže máme tři žluté, dvě modré a čtyři zelené pastelky?

Řešení

$$3 + 2 + 4 = 9$$

Kombinatorika

Kombinatorika se zabývá různými způsoby výběru z daného souboru.

Uspořádané výběry		
Bez opakování	Variace bez opakování	$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
	Permutace bez opakování	$P(n) = V(n,n) = n!$
S opakováním	Variace s opakováním	$V^*(n,k) = n^k$
	Permutace s opakováním	$P^*(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$

Neuspořádané výběry		
Bez opakování	Kombinace bez opakování	$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
S opakováním	Kombinace s opakováním	$C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$

Variace bez opakování

Nechť A je množina o n prvcích.
Vyberme z množiny postupně k prvků, přičemž prvky do množiny nevracíme.

1. prvek	2. prvek	3. prvek	...	k. prvek
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

1. místo	2. místo	3. místo
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Variace bez opakování

Nechť A je množina o n prvcích.
Vyberme z množiny postupně k prvků, přičemž prvky do množiny nevracíme.

$$\boxed{V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

1. místo	2. místo	3. místo
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
8	$\cdot\ 7$	$\cdot\ 6$

$$= 336$$

Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo

Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo

Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo

Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo

Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo

Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo

Permutace
=
Přesmyčky

Permutace bez opakování

1. prvek	2. prvek	3. prvek	...	n. prvek
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$
n	$(n-1)$	$(n-2)$	...	1

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

$$\boxed{P(n) = n!}$$

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
3	*2*	*1*

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

Permutace
=
Přesmyčky

Kombinace bez opakování

Nezáleží-li nám na pořadí ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné.

Kombinace bez opakování

Nezáleží-li nám na pořadí ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových k-tic je pro každý výběr prvků $k!$.

Kombinace bez opakování

Nezáleží-li nám na pořadí ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových k-tic je pro každý výběr prvků $k!$. Proto je počet kombinací bez opakování $k!$ krát menší než počet variací bez opakování:

Kombinace bez opakování

Nezáleží-li nám na pořadí ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových k-tic je pro každý výběr prvků $k!$. Proto je počet kombinací bez opakování $k!$ krát menší než počet variací bez opakování:

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$\boxed{C(n,k) = \binom{n}{k}}$$

Sportka je numerická hra, v níž se losuje 6 čísel ze 49. Hráč na svém tiketu zaškrtne 6 čísel. Kolik tiketů by hráč musel vyplnit, chtěl-li by mít jistotu, že „uhádne“ všechna čísla?

$$C(49,6) = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Variace s opakováním

Nechť A je množina o n prvcích.

Vyberme z množiny postupně k prvků, přičemž prvky do množiny vracíme.

1. prvek	2. prvek	3. prvek	...	k. prvek
n	$\cdot\ n$	$\cdot\ n$	$\cdot\ \ldots\ \cdot$	n

$$= n^k$$

Kolik 4 ciferných čísel lze vytvořit z číslic 4, 5, 6, 7, 8?

1. cifra	2. cifra	3. cifra	4. cifra
5	. 5	. 5	. 5

$$= 5^4$$

Variace s opakováním

Nechť A je množina o n prvcích.

Vyberme z množiny postupně k prvků, přičemž prvky do množiny vracíme.

$$\boxed{V^*(n,k) = n^k}$$

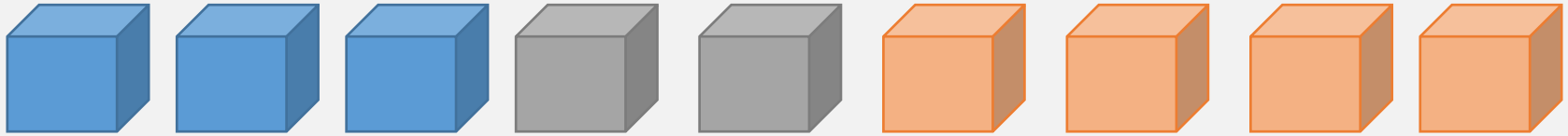
Kolik 4 ciferných čísel lze vytvořit z číslic 4, 5, 6, 7, 8?

1. cifra	2. cifra	3. cifra	4. cifra
↑	↑	↑	↑

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

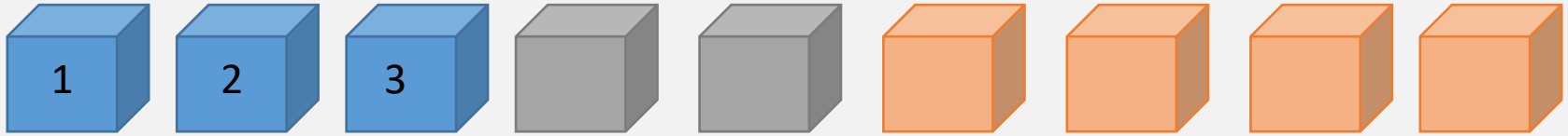


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3 + 2 + 4)!$

ALE!

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

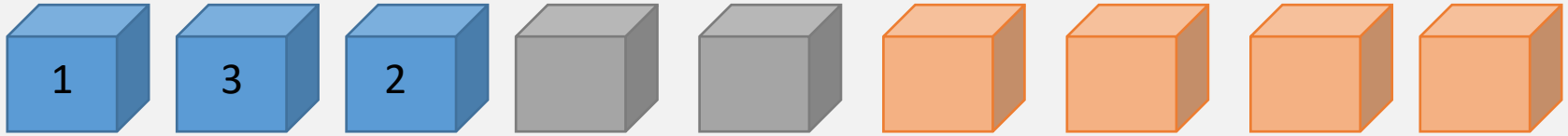


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3 + 2 + 4)!$

ALE!

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

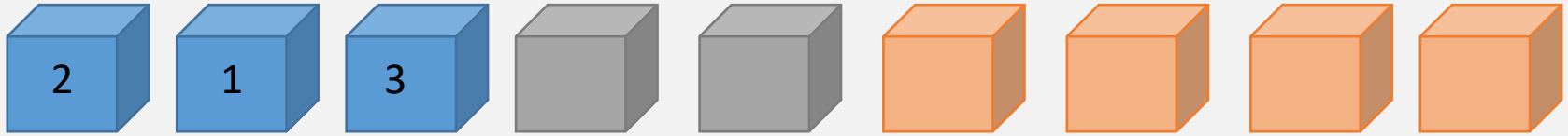


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3 + 2 + 4)!$

ALE!

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

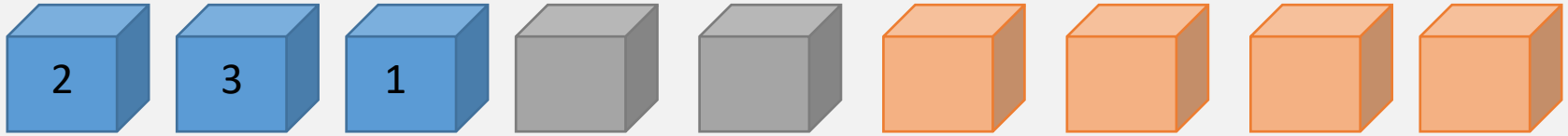


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3 + 2 + 4)!$

ALE!

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

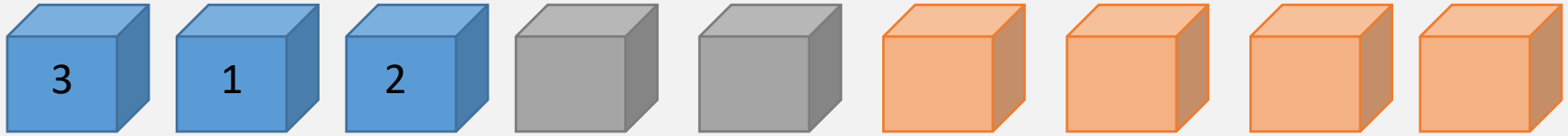


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3 + 2 + 4)!$

ALE!

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

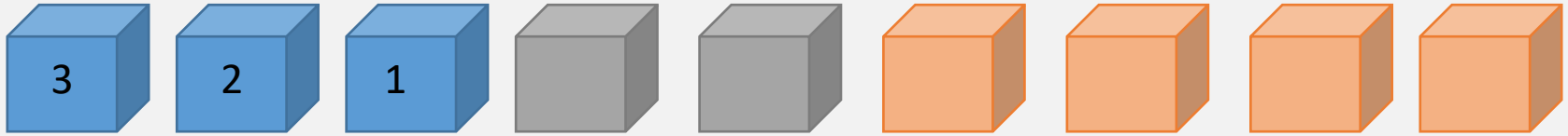


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3 + 2 + 4)!$

ALE!

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



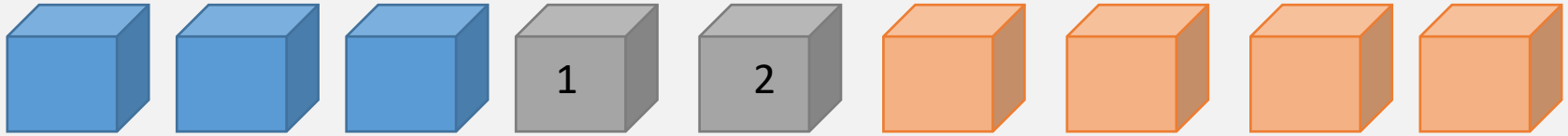
Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$

ALE!

Každých $3!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí modrých kostek.

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



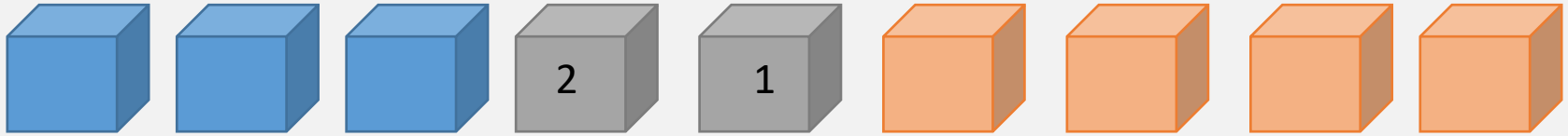
Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$

ALE!

Každých $3!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí modrých kostek.

Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$

ALE!

Každých $3!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí modrých kostek.

Každých $2!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí šedých kostek.

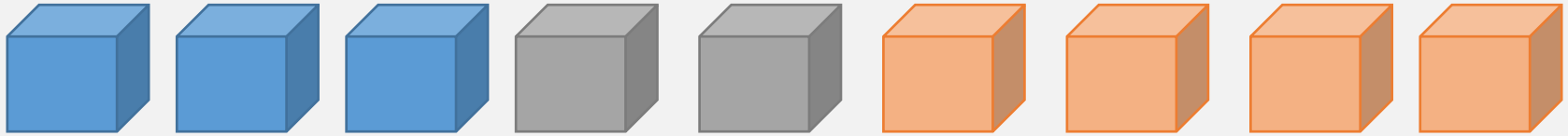
Každých $4!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí oranžových kostek.

Permutace s opakováním

Počet $P^*(k_1, k_2, \dots, k_j)$ permutací z n prvků, v nichž se jednotlivé z nich opakují $k_1, k_2, \dots, k_j$ krát je:

$$\boxed{P^*(k_1, k_2, \dots, k_j) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_j)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_j!}}$$

Mějme 3 modré, 2 šedé a 4 oranžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3 + 2 + 4)!$

Výsledný počet uspořádání je proto: $\frac{(3+2+4)!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = P^*(3,2,4)$

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C^*(3,2)$. , tj. počet neúspořádaných dvojic ($k = 2$) ze 3 prvků ($n = 3$), přičemž prvky se mohou opakovat.

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C^*(3,2)$. , tj. počet neúspořádaných dvojic ($k = 2$) ze 3 prvků ($n = 3$), přičemž prvky se mohou opakovat. Označme každý dopis symbolem ●

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka
1	●●		
2		●●	
3			●●
4	●	●	
5	●		●
6		●	●

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C^*(3,2)$. , tj. počet neúspořádaných dvojic ($k = 2$) ze 3 prvků ($n = 3$), přičemž prvky se mohou opakovat. Označme každý dopis symbolem ●

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka	
1	●●			{1,1}
2		●●		{2,2}
3			●●	{3,3}
4	●	●		{1,2}
5	●		●	{1,3}
6		●	●	{2,3}

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C^*(3,2)$. , tj. počet neúspořádaných dvojic ($k = 2$) ze 3 prvků ($n = 3$), přičemž prvky se mohou opakovat. Označme každý dopis symbolem ● a každé oddělení dvou sousedních přihrádek symbolem |.

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka	
1	●●			{1,1}
2		●●		{2,2}
3			●●	{3,3}
4	●	●		{1,2}
5	●		●	{1,3}
6		●	●	{2,3}

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C^*(3,2)$. , tj. počet neúspořádaných dvojic ($k = 2$) ze 3 prvků ($n = 3$), přičemž prvky se mohou opakovat. Označme každý dopis symbolem ● a každé oddělení dvou sousedních přihrádek symbolem |.

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		Symbolický zápis
1	●●			{1,1}	●●||
2		●●		{2,2}	|●●|
3			●●	{3,3}	||●●
4	●	●		{1,2}	●|●|
5	●		●	{1,3}	●||●
6		●	●	{2,3}	|●|●

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C^*(3,2)$. , tj. počet neúspořádaných dvojic ($k = 2$) ze 3 prvků ($n = 3$), přičemž prvky se mohou opakovat. Označme každý dopis symbolem ● a každé oddělení dvou sousedních přihrádek symbolem |. Všimněte si, že každé uskupení dopisů odpovídá právě jednomu symbolickému zápisu,

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		Symbolický zápis
1	●●			{1,1}	●●||
2		●●		{2,2}	|●●|
3			●●	{3,3}	||●●
4	●	●		{1,2}	●|●|
5	●		●	{1,3}	●||●
6		●	●	{2,3}	|●|●

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C^*(3,2)$. , tj. počet neúspořádaných dvojic ($k = 2$) ze 3 prvků ($n = 3$), přičemž prvky se mohou opakovat. Označme každý dopis symbolem ● a každé oddělení dvou sousedních přihrádek symbolem |. Všimněte si, že každé uskupení dopisů odpovídá právě jednomu symbolickému zápisu, přičemž pro vytvoření symbolického zápisu potřebujeme 2 (k) symbolů ● a 2 ($n - 1$) symbolů |.

Je zřejmé, že $C^*(3,2)$ lze určit jako počet možných uspořádání 2 (k) symbolů ● a 2 ($n - 1$) symbolů |.

$$C^*(3,2) = P^*(2,2) = \frac{(2+2)!}{2!\cdot 2!} = 6$$

Číslo uskupení		Symbolický zápis
1	{1,1}	●●||
2	{2,2}	|●●|
3	{3,3}	||●●
4	{1,2}	●|●|
5	{1,3}	●||●
6	{2,3}	|●|●

Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k. třídy z n prvků s opakováním a značíme $C^*(n,k)$.

$$\boxed{C^*(n,k) = P^*(n-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}}$$

Děkuji za pozornost!

martina.litschmannova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY