Vybrané vícevýběrové testy parametrických hypotéz

Martina Litschmannová

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Obsah

- Vícevýběrové testy vs. vícenásobné porovnávání
- Testy shody rozptylů (Bartletův test, Leveneho test)
- Analýza rozptylu (tzv. ANOVA, tj. test shody středních hodnot)
- Kruskalův - Wallisův test (test shody rozdělení (mediánů))
- Post hoc analýza aneb vícenásobné porovnávání
  - ✓ post hoc analýza pro analýzu rozptylu
  - ✓ post hoc analýza pro Kruskalův - Wallisův test

Vícevýběrové testy vs. vícenásobné porovnávání

- Vícevýběrové testy parametrických hypotéz

  H_0: $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$

  H_A: $\neg H_0$ (alespoň jedna dvojice parametrů se navzájem liší)

- Jak ověřit shodu parametrů u více než dvou výběrů?
  - ✓ Vybereme vhodný dvouvýběrový test a otestujeme shodu každé dvojice parametrů, tj. $\theta_1 = \theta_2$, $\theta_1 = \theta_3, \dots, \theta_{k-1} = \theta_k$ - tzv. vícenásobné porovnávání.
  - ✓ Použijeme vhodný vícevýběrový test.

- Jaká jsou rizika vícenásobného porovnávání?
  - ✓ Počet testů, které musíme provést je …

Vícevýběrové testy vs. vícenásobné porovnávání

- Vícevýběrové testy parametrických hypotéz

  H_0: $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$

  H_A: $\neg H_0$ (alespoň jedna dvojice parametrů se navzájem liší)

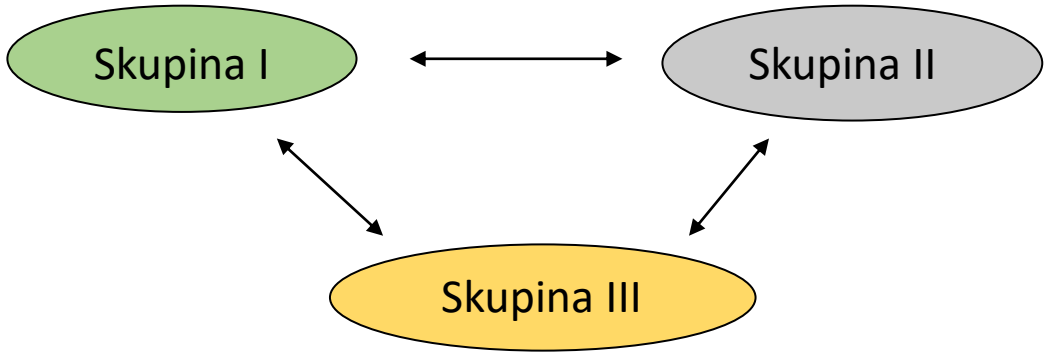
- Jak ověřit shodu parametrů u více než dvou výběrů?
  - ✓ Vybereme vhodný dvouvýběrový test a otestujeme shodu každé dvojice parametrů, tj. $\theta_1 = \theta_2, \theta_1 = \theta_3, \dots, \theta_{k-1} = \theta_k$ - tzv. vícenásobné porovnávání.
  - ✓ Použijeme vhodný vícevýběrový test.

- Jaká jsou rizika vícenásobného porovnávání?
  - ✓ Počet testů, které musíme provést je $\binom{k}{2}$.
  - ✓ Celková pravděpodobnost chyby I. druhu, je-li v každém dílčím testu zvolena hladina významnosti α je $1 - (1 - \alpha)^{\binom{k}{2}}$.

Vícevýběrové testy vs. vícenásobné porovnávání

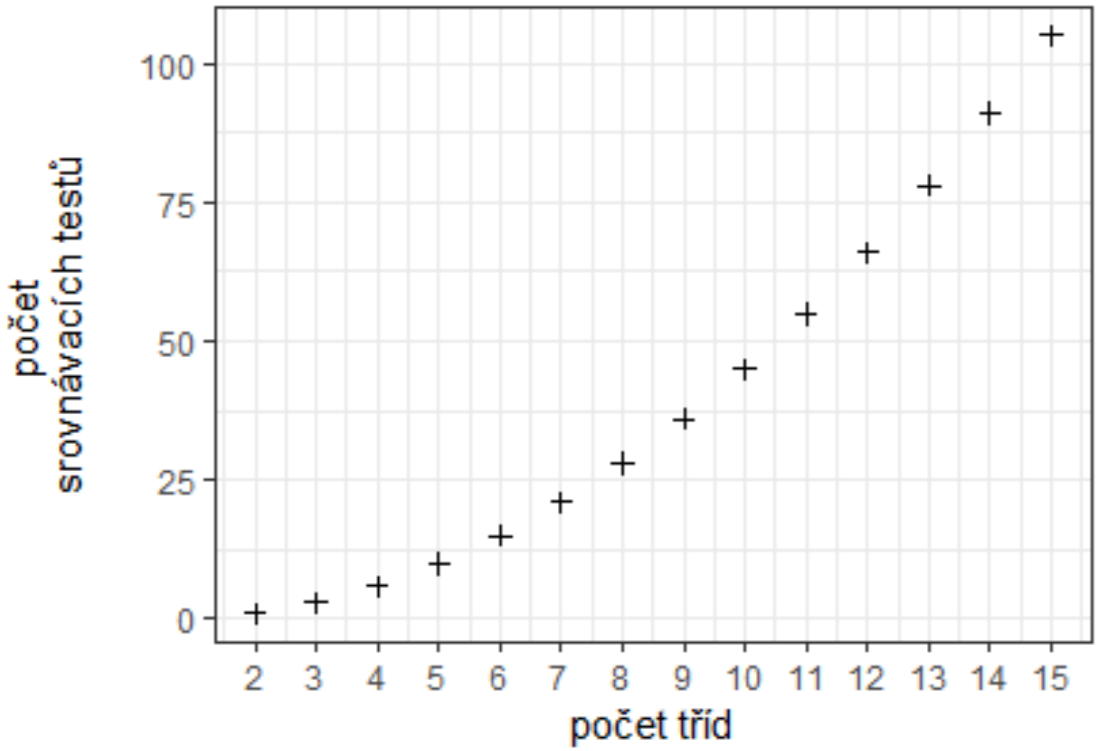
Určete výslednou pravděpodobnost chyby I. druhu, které byste se dopustili při ověřování shody středních hodnot tří skupin, použili-li byste přístup (1), tj. opakované testy shody stř. hodnot, každý z nich na hladině významnosti 0,05.

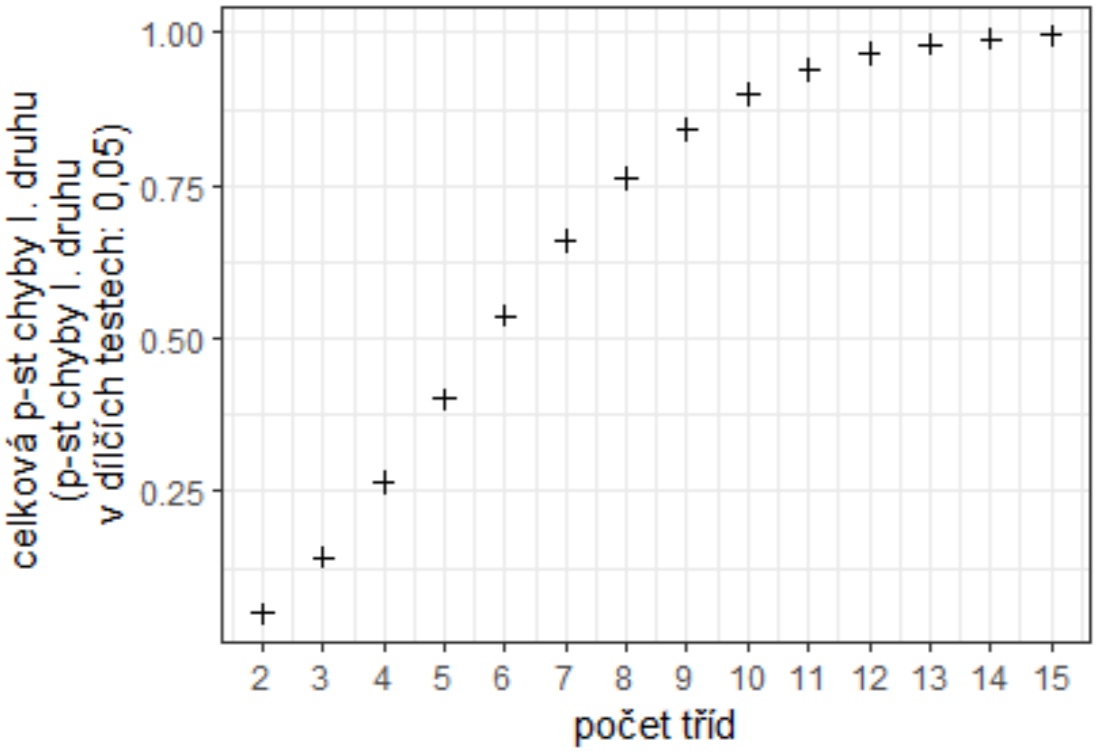
Řešení:



- Potřebujeme ověřit shodu středních hodnot skupin I a II, I a III, II a III, tj. celkem musíme provést 3 testy.
- Každý z testů má pravděpodobnost, že neuděláme chybu I. druhu 0,95, tj. celková pravděpodobnost, že neuděláme chybu I. druhu je $0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}857$.
- Celková pravděpodobnost, že uděláme chybu I. druhu je tedy $1 - 0{,}857 = \mathbf{0{,}143}$.

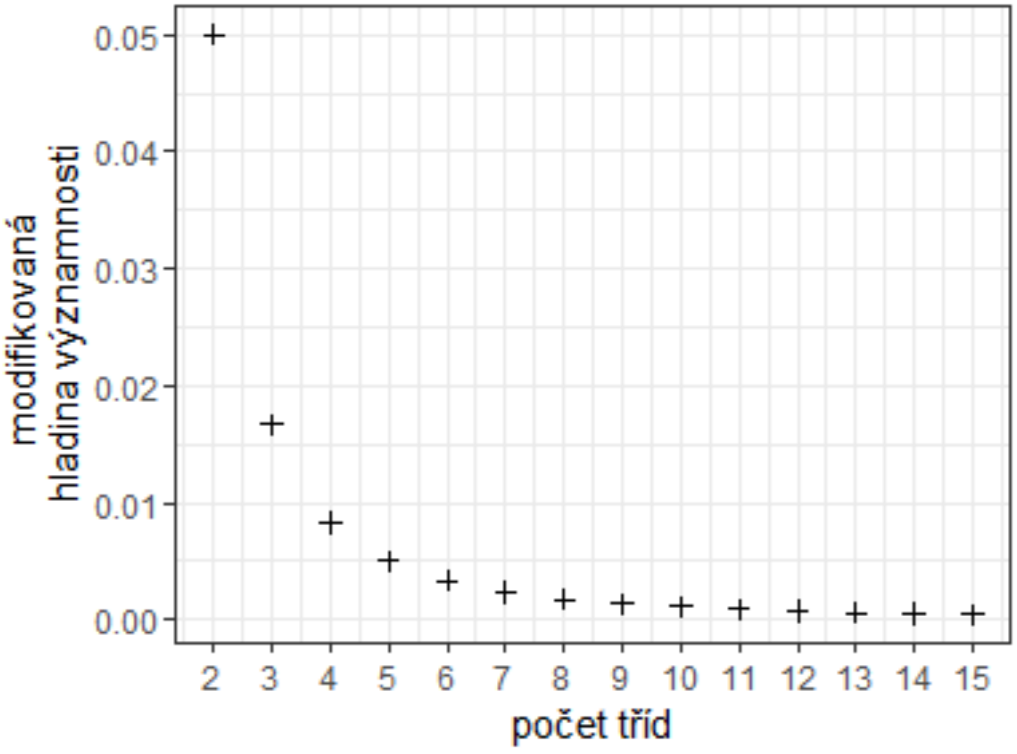
Vícevýběrové testy vs. vícenásobné porovnávání

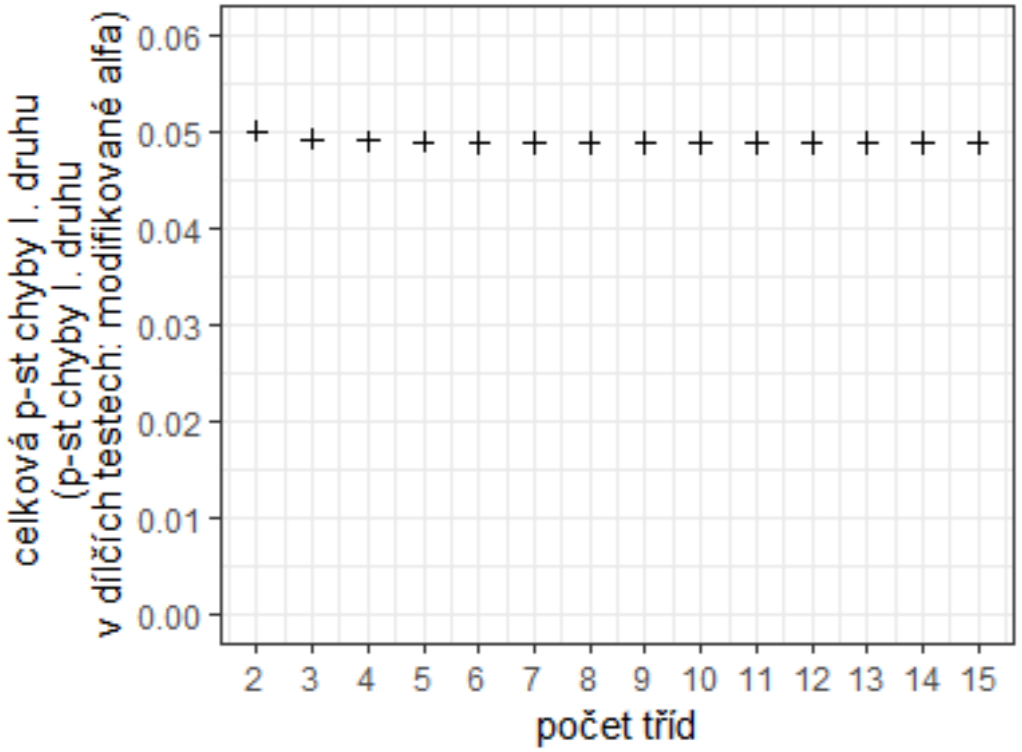




- Se zvyšujícím se počtem testů roste pravděpodobnost získání falešně pozitivního výsledku (chyba I. druhu), tedy pravděpodobnost toho, že se při našem testování zmýlíme a ukážeme na statisticky významný rozdíl tam, kde ve skutečnosti žádný neexistuje.

Vícevýběrové testy vs. vícenásobné porovnávání





Bonferroniho korekce

Snížíme-li hladinu významnosti v každém z dílčích testů na $\frac{\alpha}{\binom{k}{2}}$ (modifikovaná hladina významnosti),

celková chyba I. druhu nepřekročí α.

Testy shody rozptylů (Testy homoskedasticity)

Mějme k nezávislých výběrů $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_k}$ ze spojitého rozdělení.

$\forall \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{k}, \forall \mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{n_i}$, kde n_i je rozsah i-tého výběru: $\mathrm{E}(\mathrm{X_{ij}}) = \mu_\mathrm{i}, \mathrm{D}(\mathrm{X_{ij}}) = \sigma_\mathrm{i}^2$

a předpokládejme, že rozsahy výběrů nepřesahují 5 % velikosti populace, tj. $\mathrm{n_i} \leq 0{,}05\mathrm{N_i}$, neboli $\mathrm{N_i} \geq 20\mathrm{n_i}$ pro $\mathrm{i} \in \{1,2\}$.

Název testu	**Nulová hypotéza**	**Další předpoklady testu**	**Testová statistika $\boldsymbol{T(X)}$**	**Nulové rozdělení**
Bartlettův test	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$	normalita populací	$B = \frac{1}{C}\left[(n-k)\, ln\, MS_e - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\, ln\, s_i^2\right]$, kde $MS_e = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)s_i^2$,	χ^2_{n-k}
Leveneho test		---	$\frac{\frac{SS_{ZB}}{k-1}}{\frac{SS_{Ze}}{n-k}}$, kde $Z_{ij} = \lvert X_{ij} - \bar{X}_i \rvert$, $\bar{Z}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}}{n_i}$, $\bar{\bar{Z}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{Z_{ij}}{n}$, $SS_{ZB} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Z}_i - \bar{\bar{Z}})^2$, $SS_{Ze} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2$	$F_{k-1,n-k}$

POZOR! 3 varianty testu

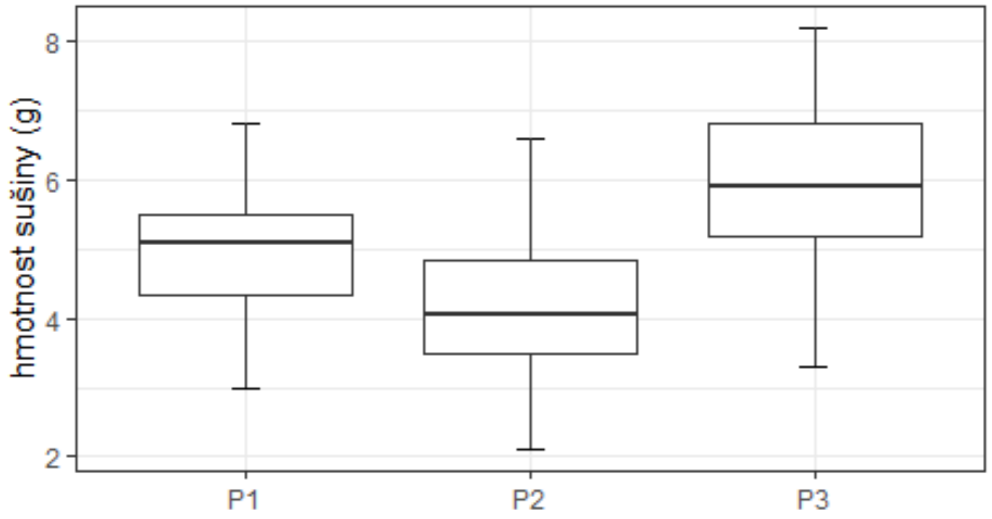
$$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$$

Příklad 1 – Vícevýběrový test shody rozptylů

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

a) Na základě **explorační analýzy** odhadněte, zda variabilita hmotností sušiny závisí na podmínkách ošetřování plodiny.

Řešení:



$$\frac{s_{P3}^2}{s_{P1}^2} = \frac{1{,}080}{0{,}972} \cong 1{,}1$$

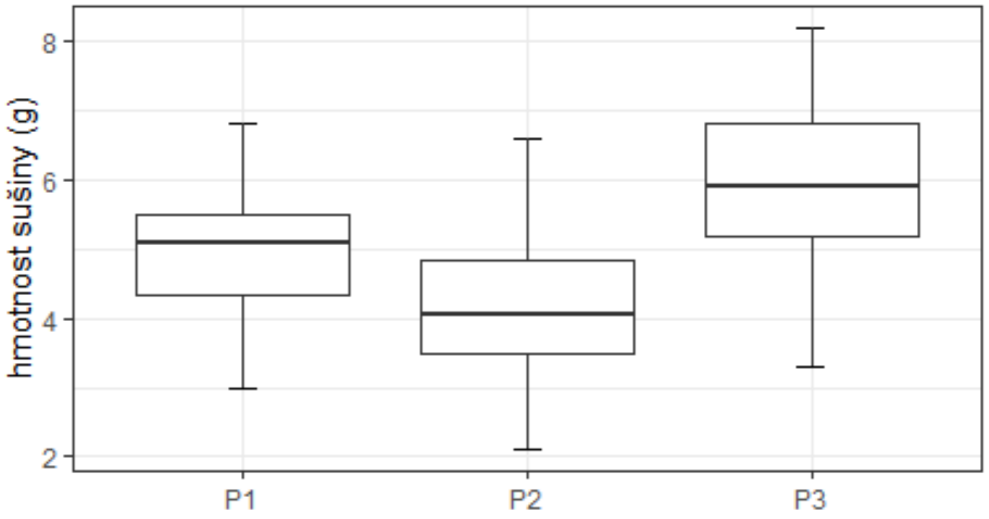
$$\frac{\max(s_1^2, s_2^2, \ldots, s_k^2)}{\min(s_1^2, s_2^2, \ldots, s_k^2)} > 2 \quad \Rightarrow$$ Podezření na to, že data nepocházejí z populací se stejnými rozptyly.

Příklad 1 – Vícevýběrový test shody rozptylů

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

a) Na základě **explorační analýzy** odhadněte, zda variabilita hmotností sušiny závisí na podmínkách ošetřování plodiny.

Řešení:



$$\frac{s_{P3}^2}{s_{P1}^2} = \frac{1{,}080}{0{,}972} \cong 1{,}1$$

Předpokládáme, že variabilita hmotností sušiny nezávisí na podmínkách ošetřování plodiny.

Příklad 1 – Vícevýběrový test shody rozptylů

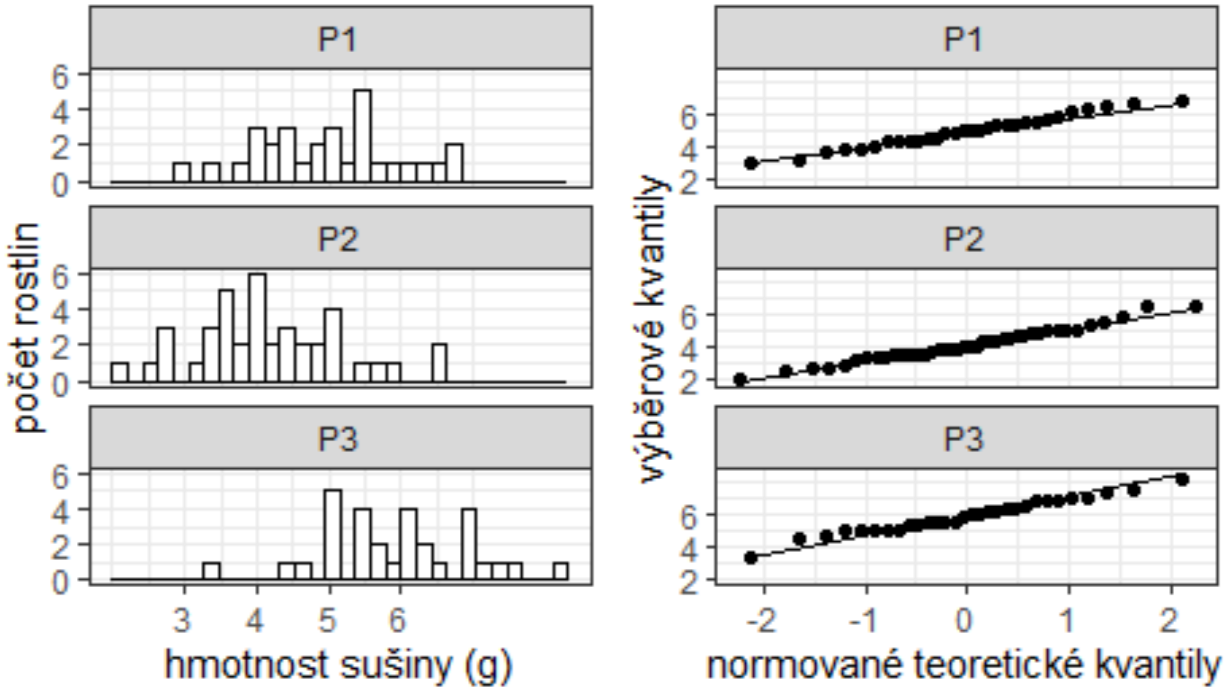
V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

b) **Čistým testem významnosti** ověřte, zda variabilita hmotností sušiny závisí na podmínkách ošetřování plodiny.

Řešení:

- $H_0\colon\ \sigma_{P1}^2 = \sigma_{P2}^2 = \sigma_{P3}^2,\ \ H_A\colon\ \neg H_0$
- **Možné testy**: Bartlettův test, Leveneův test
- **Ověření předpokladů testu**:
  - ✓ nezávislost - OK
  - ✓ normalita

skupina	Shapirův – Wilkův test (p-hodnota)
P1	0,853
P2	0,741
P3	0,909



Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme předpoklad normality (viz …).

Příklad 1 – Vícevýběrový test shody rozptylů

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

b) **Čistým testem významnosti** ověřte, zda variabilita hmotností sušiny závisí na podmínkách ošetřování plodiny.

Řešení:

- H_0: $\sigma_{P1}^2 = \sigma_{P2}^2 = \sigma_{P3}^2$, H_A: $\neg H_0$
- **Možné testy**: Bartlettův test, Leveneův test
- **Ověření předpokladů testu**:
  - ✓ nezávislost - OK
  - ✓ normalita – OK
- **Výstup Bartlettova v R:**

```
        Bartlett test of homogeneity of variances

data:  data$hmotnost.bez by data$skupina
Bartlett's K-squared = 0.08727, df = 2, p-value = 0.9573
```

- **Rozhodnutí**:

  Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů (Bartletův test; $x_{OBS} = 0{,}1$; $df = 2$; $p - hodnota = 0{,}957$).

Analýza rozptylu (ANOVA)

Mějme k **nezávislých** výběrů $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_k}$ ze spojitého rozdělení.
$\forall i = 1, 2, \dots, k$, $\forall j = 1, 2, \dots, n_i$, kde n_i je rozsah i-tého výběru: $E(X_{ij}) = \mu_i, D(X_{ij}) = \sigma_i^2$
a předpokládejme, že rozsahy výběrů nepřesahují 5 % velikosti populace, tj. $n_i \leq 0{,}05N_i$, neboli $N_i \geq 20n_i$ pro $i \in \{1,2\}$.

Název testu	**Nulová hypotéza**	**Další předpoklady testu**	**Testová statistika $\boldsymbol{T(X)}$**	**Nulové rozdělení**
ANOVA	$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$	normalita populací, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ (homoskedasticita)	$\frac{MS_B}{MS_e}$ viz Tabulka ANOVA	$F_{k-1,n-k}$

Poznámka: ANOVA byla původně navržena pro vyvážené třídění $(n_1 = n_2 = \dots = n_k)$. To není předpokladem testu, ale čím těsněji je toto splněno, tím věrohodnější jsou výsledky testu (vyšší síla testu).

$$\boxed{p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})}$$

Analýza rozptylu (ANOVA)

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl (prům. součet čtverců)	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	$SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2$	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	$SS_e = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)s_i^2$	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	$SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$	$df_T = n - 1$	---	---	---

- testová statistika: F-poměr,
- nulové rozdělení: $\mathrm{F}_{\mathrm{k-1,n-k}}$, tj. Fisherovo – Snedecorovo rozdělení s $k - 1$ stupni volnosti v čitateli a $n - k$ stupni volnosti ve jmenovateli)

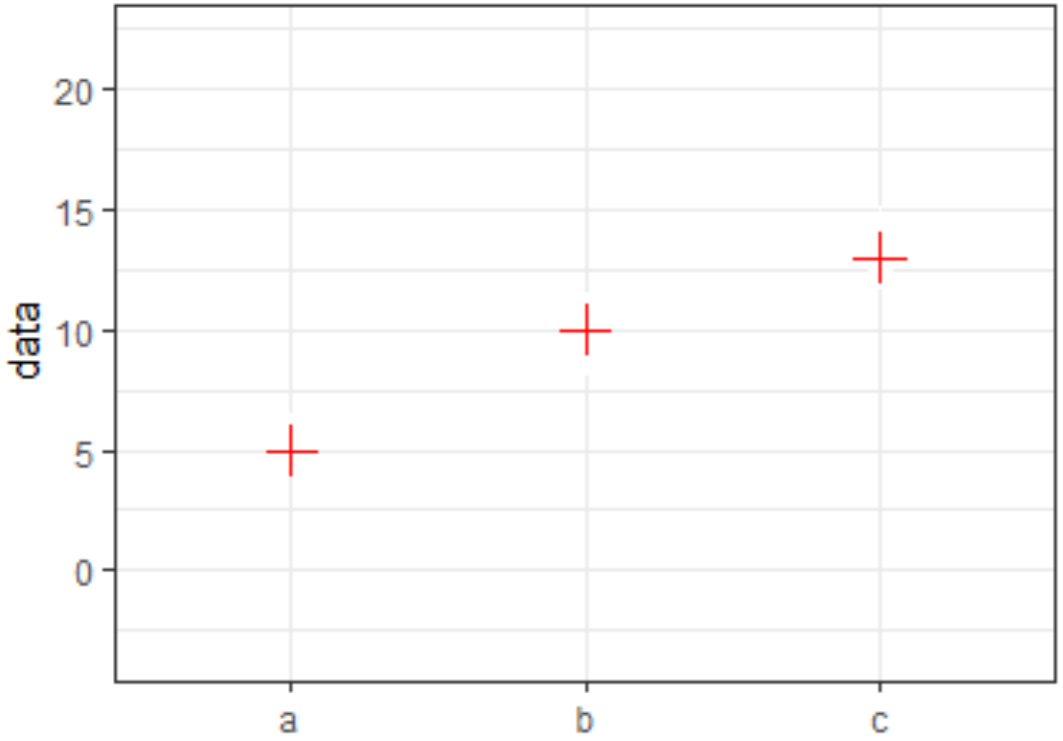
ANOVA (Analýza rozptylu)

- Test umožňující srovnání průměrů více než dvou výběrových souborů (akronym z angl. **AN**alysis **O**f **VA**riance, autor: R. A. Fisher, 1925)

- Umožňuje například zkoumat, zda
  - ✓ typ absolvované střední školy ovlivňuje počet bodů dosažených studenty u přijímací zkoušky z matematiky,
  - ✓ existují statisticky významné rozdíly v rychlostí různých algoritmů,
  - ✓ použitá medikace ovlivňuje krevní tlak pacientů,
  - ✓ typ použitého hnojiva ovlivňuje výnosy určité plodiny,
  - ✓ pracovní výkon dělníka závisí na umístění stroje, apod.

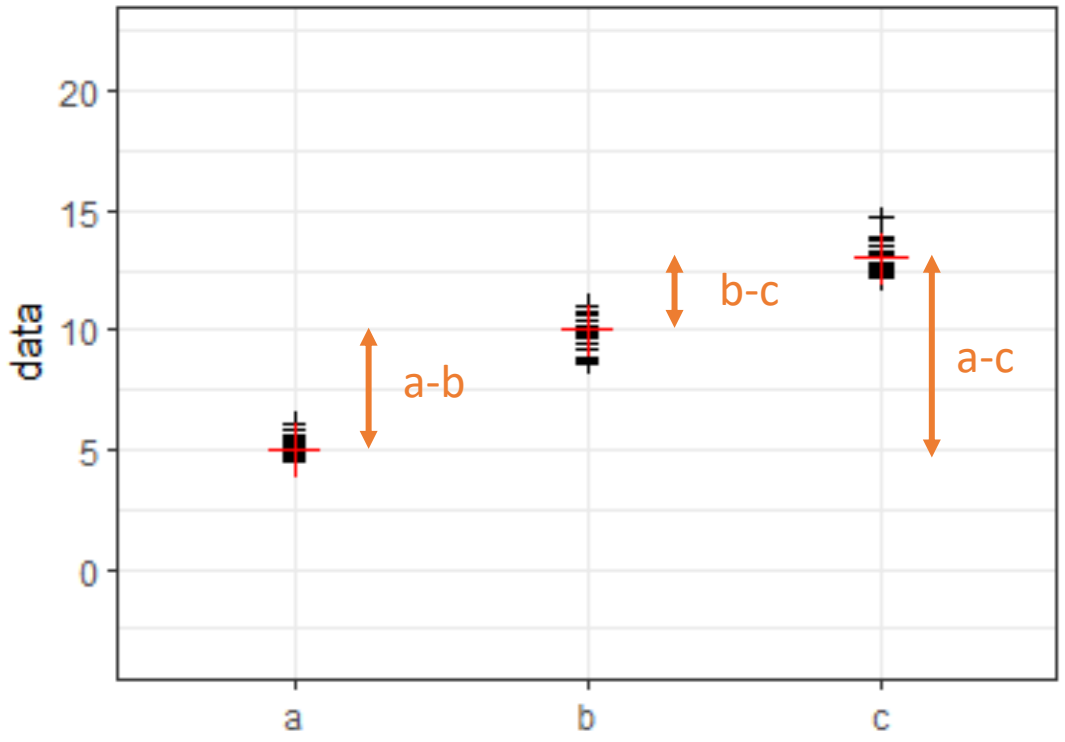
Jak posoudit shodu stř. hodnot pomocí explorační analýzy?

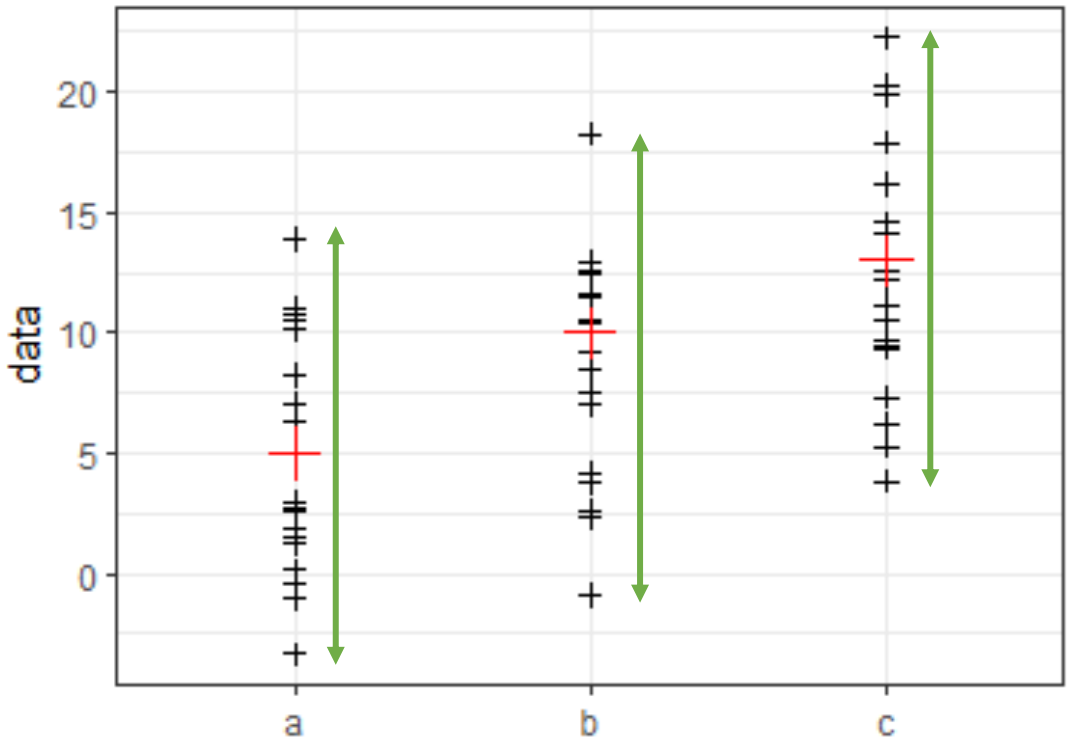
- Stačí posuzovat „vztah“ mezi průměry?



Jak posoudit shodu stř. hodnot pomocí explorační analýzy?

- Stačí posuzovat „vztah“ mezi průměry?

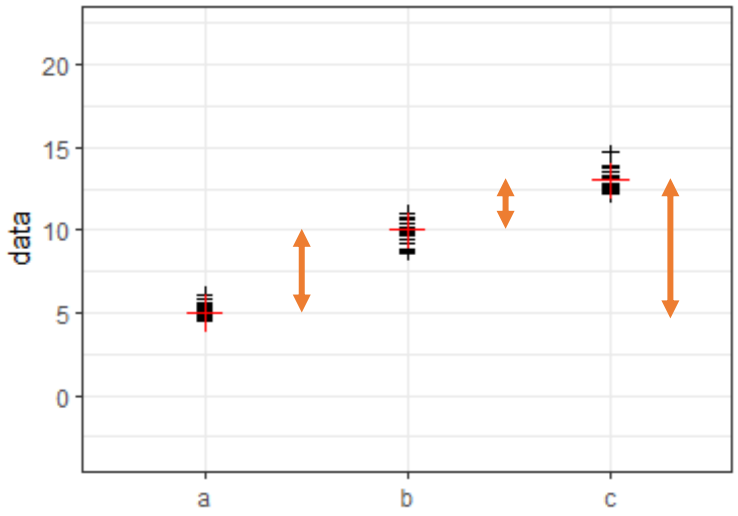


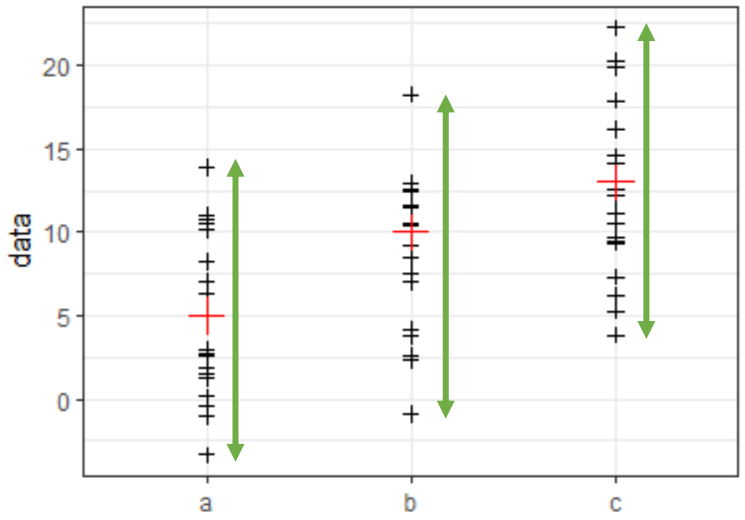


- Vhodnější je posoudit vztah mezi pozorovanou variabilitou mezi výběry a pozorovanou variabilitou uvnitř jednotlivých výběrů.

ANOVA – přínos

Proč se liší pozorované hodnoty?





- Vliv sledovaného faktoru - způsobuje rozdíly mezi třídami
- Reziduální vlivy – způsobují rozdíly uvnitř tříd

Liší-li se průměry jednotlivých skupin vlivem různých středních hodnot příslušných populací, pak musí být rozptyl mezi třídami dostatečně velký vzhledem k rozptylu uvnitř tříd.

Jak kvantifikovat variabilitu mezi třídami a variabilitu uvnitř tříd?

- **meziskupinový součet čtverců** (angl. sum of squares between groups),

$$SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}\right)^2,$$

resp. **rozptyl mezi skupinami**

$$MS_B = \frac{SS_B}{k-1},$$

kde $k-1$ je odpovídající počet stupňů volnosti df_B.

Kvantifikace rozdílů mezi třídami

- **reziduální součet čtverců** SS_e (angl. sum of squares – errors)

$$SS_e = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2,$$

resp. **reziduální rozptyl**

$$MS_e = \frac{SS_e}{n-k},$$

kde $n-k$ je odpovídající počet stupňů volnosti df_e.

Kvantifikace rozdílů uvnitř tříd

ANOVA - Celková variabilita

Variabilitu jednotlivých pozorování kolem celkového průměru charakterizuje celkový součet čtverců (angl. total sum of squares),

$$SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2,$$

resp. celkový rozptyl (angl. „mean of squares“)

$$MS_T = \frac{SS_T}{n-1},$$

kde $n - 1$ je odpovídající počet stupňů volnosti df_T.

Lze dokázat, že $SS_T = SS_B + SS_e$.

Platí-li nulová hypotéza, pak $\frac{MS_B}{MS_e} \approx 1$.

Vysoké hodnoty $\frac{MS_B}{MS_e}$ značí, že rozptyl mezi třídami je větší než bychom očekávali v případě platnosti nulové hypotézy.

Analýza rozptylu (ANOVA)

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl (prům. součet čtverců)	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	$SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2$	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	$SS_e = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)s_i^2$	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	$SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$	$df_T = n - 1$	---	---	---

- testová statistika: F-poměr,
- nulové rozdělení: $\mathrm{F}_{\mathrm{k-1,n-k}}$, tj. Fisherovo – Snedecorovo rozdělení s $k - 1$ stupni volnosti v čitateli a $n - k$ stupni volnosti ve jmenovateli)

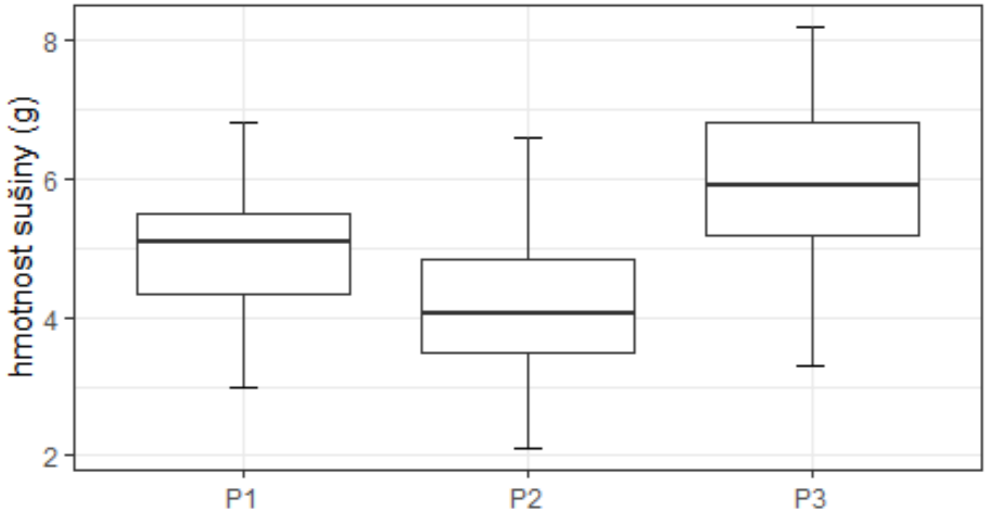
Příklad 2 – ANOVA

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

a) **Čistým testem významnosti** ověřte, zda hmotnost sušiny závisí na podmínkách ošetřování plodiny.

Řešení:

- H_0: $\mu_{P1} = \mu_{P2} = \mu_{P3}$, H_A: $\neg H_0$
- **Možné testy**: ANOVA, ???
- **Ověření předpokladů testu**:
  - ✓ nezávislost - OK
  - ✓ normalita – OK (viz předchozí příklad)
  - ✓ shoda rozptylů (homoskedasticita) – OK (viz příklad 1)



- **Výpočet tabulky ANOVA:**

skupina	n	prumer	vyb.rozptyl
<chr>	<int>	<chr>	<chr>
P1	30	4.990	0.972
P2	40	4.167	1.054
P3	30	5.933	1.080

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	$SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2$	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	$SS_e = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)s_i^2$	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$	$df_T = n - 1$	---	---	---

```
skupina      n prumer vyb.rozptyl
<chr>    <int> <chr>  <chr>
P1          30 4.990  0.972
P2          40 4.167  1.054
P3          30 5.933  1.080
```

- $\bar{\bar{X}} = \frac{30 \cdot 4{,}99 + 40 \cdot 4{,}17 + 30 \cdot 5{,}93}{100} = 4{,}94$ (vážený průměr)
- $SS_B = 30 \cdot (4{,}99 - 4{,}94)^2 + 40 \cdot (4{,}17 - 4{,}94)^2 + 30 \cdot (5{,}93 - 4{,}94)^2 =$
  $= 53{,}19$

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	$SS_e = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)s_i^2$	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$	$df_T = n - 1$	---	---	---

```
skupina      n prumer vyb.rozptyl
<chr>    <int> <chr>  <chr>
P1          30 4.990  0.972
P2          40 4.167  1.054
P3          30 5.933  1.080
```

- $\bar{\bar{X}} = \frac{30 \cdot 4{,}99 + 40 \cdot 4{,}17 + 30 \cdot 5{,}93}{100} = 4{,}94$
- $SS_B = 30 \cdot (4{,}99 - 4{,}94)^2 + 40 \cdot (4{,}17 - 4{,}94)^2 + 30 \cdot (5{,}93 - 4{,}94)^2 =$
  $= 53{,}19$

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	$SS_e = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)s_i^2$	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$	$df_T = n - 1$	---	---	---

```
skupina      n prumer vyb.rozptyl
<chr>    <int> <chr>  <chr>
P1          30 4.990  0.972
P2          40 4.167  1.054
P3          30 5.933  1.080
```

- $SS_e = 29 \cdot 0{,}972 + 39 \cdot 1{,}05 + 29 \cdot 1{,}08 = 100{,}46$

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	**Součet čtverců**	**Počet stupňů volnosti**	**Rozptyl**	$\boldsymbol{F - pom\check{e}r}$	$\boldsymbol{p - hodnota}$
Model	53,19	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	100,46	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$	$df_T = n - 1$	---	---	---

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	100,46	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$	$df_T = n - 1$	---	---	---

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	$df_B = k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	100,46	$df_e = n - k$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	153,65	$df_T = n - 1$	---	---	---

- $k = 3$ (počet tříd, tj. počet srovnávaných výběrů)
- $n = 100$ (celkový rozsah výběrů)

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	2	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	100,46	97	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	---	---
Celkový	153,65	99	---	---	---

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	2	26,60	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	100,46	97	1,04	---	---
Celkový	153,65	99	---	---	---

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	**Součet čtverců**	**Počet stupňů volnosti**	**Rozptyl**	$\boldsymbol{F - poměr}$	$\boldsymbol{p - hodnota}$
Model	53,19	2	26,60	$\frac{MS_B}{MS_e}$	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	100,46	97	1,04	---	---
Celkový	153,65	99	---	---	---

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	2	26,60	25,68	$1 - F_0(x_{OBS})$
Reziduální	100,46	97	1,04	---	---
Celkový	153,65	99	---	---	---

- **Výpočet p-hodnoty:**

$F - poměr \sim F_{k-1,n-k}$ (Fisherovo – Snedecorovo rozdělení s k-1 stupni volnosti v čitateli a n-k stupni volnosti ve jmenovateli)

$F - poměr \sim F_{2,97}$

$\mathrm{p} - \mathrm{hodnota} = 1 - F_0(x_{OBS}) = 1 - F_0(25{,}68) \ll 0{,}001$ (*1-pf(25.68,2,97)*)

Příklad 2 – ANOVA

- **Výpočet tabulky ANOVA:**

Námět variability	Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Rozptyl	$F - poměr$	$p - hodnota$
Model	53,19	2	26,60	25,68	$\ll 0{,}001$
Reziduální	100,46	97	1,04	---	---
Celkový	153,65	99	---	---	---

- **Srovnání s výstupem z R:**

```
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
skupina      2  53.54  26.772   25.81 1.03e-09 ***
Residuals   97 100.60   1.037
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Rozdíly jsou způsobeny zaokrouhlovací chybou.

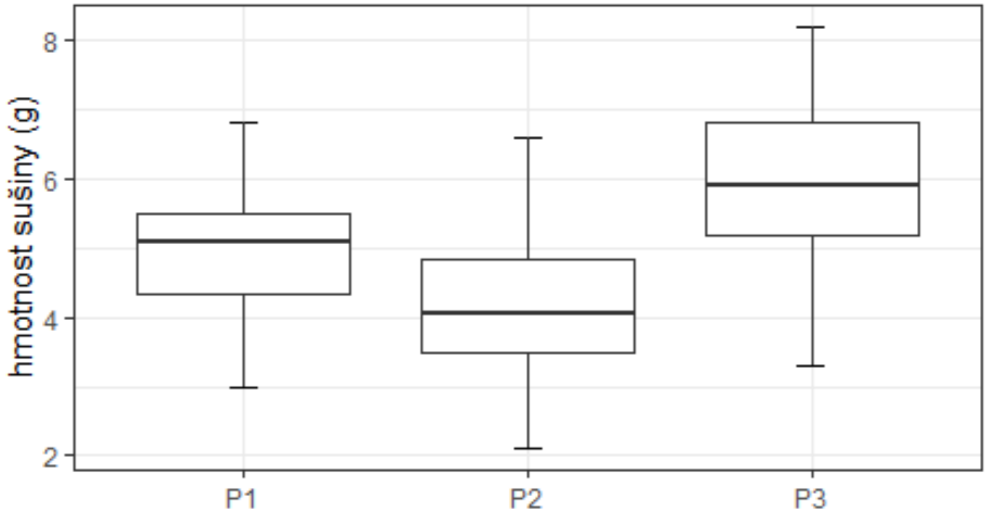
Příklad 2 – ANOVA

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

a) **Čistým testem významnosti** ověřte, zda hmotnost sušiny závisí na podmínkách ošetřování plodiny.

Řešení:

- H_0: $\mu_{P1} = \mu_{P2} = \mu_{P3}$, H_A: $\neg H_0$
- **Možné testy**: ANOVA, ???
- **Ověření předpokladů testu**:
  - ✓ nezávislost - OK
  - ✓ normalita – OK (viz předchozí příklad)
  - ✓ shoda rozptylů (homoskedasticita) – OK (viz příklad 1)



- **Rozhodnutí:**
  Na hladině významnosti 0,05 zamítáme nulovou hypotézu (ANOVA, p – hodnota ≪ 0,001). Hmotnost sušiny statisticky významně závisí na podmínkách ošetřování. (Alespoň jedna dvojice podmínek ošetřování je charakterizována statisticky významně odlišnými průměrnými výnosy.)

Jak postupovat při nesplnění předpokladů pro použití testu ANOVA?

- Porušení nezávislosti výběrů:

  Friedmanův test (viz Úvod do statistiky, test není vyučován v rámci tohoto předmětu)

- Porušení homoskedasticity:
  - ✓ Pokusíme se **stabilizovat rozptyl** pomocí transformací proměnných (logaritmická, Box-Coxova transformace, …).
  - ✓ Pokud se nám rozptyl stabilizovat nepodaří, je možné přihlédnout k tomu, že ANOVA není (v případě, že **data jsou vyvážena**, tj. mají stejný rozsah jednotlivých výběrů) příliš citlivá na porušení předpokladu homoskedasticity.
  - ✓ Nejsou-li data vyvážena, můžeme použít **ANOVU s Welchovou korekcí** (oneway.test) nebo **Kruskalův-Wallisův test** (tzv. neparametrická ANOVA, vícevýběrový test o shodě mediánů).

- Porušení normality:
  - ✓ Pokusíme se **normalizovat data** pomocí transformací proměnných (logaritmická, Box-Coxova transformace, …). Pokud se nám data normalizovat nepodaří, lze použít **Kruskalův – Wallisův test.**

Kruskalův – Wallisův test

Mějme k **nezávislých** výběrů $X_1, X_2, \dots, X_k$ ze spojitého rozdělení.
$\forall i = 1, 2, \dots, k, \forall j = 1, 2, \dots, n_i$, kde n_i je rozsah i-tého výběru: $E(X_{ij}) = \mu_i, D(X_{ij}) = \sigma_i^2$
a předpokládejme, že rozsahy výběrů nepřesahují 5 % velikosti populace, tj. $n_i \leq 0{,}05N_i$, neboli $N_i \geq 20n_i$ pro $i \in \{1,2\}$.

Název testu	**Nulová hypotéza**	**Další předpoklady testu**	**Testová statistika $T(X)$**	**Nulové rozdělení**
Kruskalův – Wallisův test	$x_{0,5}^1 = x_{0,5}^2 = \dots = x_{0,5}^k$ (obecně: výběry pochází z populací se stejným rozdělením)	symetrická rozdělení	$-3(n+1) + \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$ Všech n $\left(= \sum_i^k n_i\right)$ pozorování se seřadí vzestupně jako by pocházela z jednoho výběru a určí se jejich pořadí r_{ij} (tj. r_{ij} značí pořadí j-tého prvku v i-té skupině). Dále nechť T_i značí součet pořadí pro i-tý výběr, tj. $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}$.	χ_{k-1}^2

$$\boxed{p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})}$$

Post hoc analýza (vícenásobné porovnávání)

- Dojde–li u vícevýběrových testů k zamítnutí nulové hypotézy, zajímá nás většinou co je příčinou tohoto rozhodnutí, tj. které dvojice skupin se statisticky významně liší.

Pro každou dvojici skupin *I* a *J* $(I \neq J)$ testujeme

$$H_0\colon \mu_I = \mu_J \quad \text{vůči alternativě} \quad H_A\colon \mu_I \neq \mu_J.$$

- Dále uváděné metody post hoc analýzy jsou implementovány tak, aby celková pravděpodobnost chyby I. druhu ve všech $\binom{k}{2}$ testech nepřekročila zvolenou hladinu významnosti α.

Post hoc analýza pro test ANOVA – Tukeyho metoda

- Tukeyho metoda (pouze pro vyvážené třídění)

  Nulovou hypotézu zamítáme, pokud

$$\left|\bar{x}_I - \bar{x}_J\right| \geq q_\alpha(k, n-k)\sqrt{MS_e}\sqrt{\frac{1}{n_I}},$$

  kde $q_\alpha(k, n-k)$ je α kvantil studentizovaného rozpětí, který je tabelován (tabulka T10).

- V případě **nevyváženého třídění** lze použít modifikovaný Tukeyho test známý pod názvem Tukey HSD.

  Nulovou hypotézu pak zamítáme, pokud

$$\left|\bar{x}_I - \bar{x}_J\right| \geq q_\alpha(k, n-k)\sqrt{MS_e}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_I} + \frac{1}{n_J}\right)},$$

  kde $q_\alpha(k, n-k)$ je α kvantil studentizovaného rozpětí, který je tabelován v tabulka T10.

Post hoc analýza pro Kruskalův – Wallisův test – Dunnové metoda

Nechť průměrné pořadí *i*-té skupiny je $t_i = \frac{T_i}{n_i}$, z_p… *p* kvantil normovaného normálního rozdělení, modifikovaná hladina významnosti je $\alpha^* = \frac{\alpha}{\binom{k}{2}}$. Jestliže

$$|t_I - t_J| \geq \sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n_I} + \frac{1}{n_J}\right) n(n+1) z_{1-\alpha^*}},$$

pak se mediány *I*-tého a *J*-tého výběru statisticky významně liší.

Post hoc analýza – Interpretace výsledků

- Srovnávané třídy rozdělíme do tzv. homogenních skupin (podmnožin), tj. podmnožin obsahujících pouze ty třídy, pro něž v rámci post hoc analýzy nebyla zamítnuta hypotéza o shodě středních hodnot (pro žádnou z dvojic tříd v rámci homogenní skupiny).

- **Jak najít homogenní skupiny?**
  1) Srovnávané třídy seřadíme sestupně podle průměru (resp. mediánu) dané kvantitativní veličiny (závisle proměnné).
  2) Označíme třídu s největším průměrem (mediánem) písmenem ***a***. Podíváme se na výsledek post hoc analýzy (např. Tukey HSD) pro srovnání dané třídy a třídy s druhým nejvyšším průměrem (mediánem). Když neevidujeme statisticky významný rozdíl, označíme druhou třídu rovněž písmenem ***a***. Když evidujeme statisticky významný rozdíl, třídu žádným písmenem neoznačujeme. Obdobně postupujeme srovnáváním třídy s největším průměrem (mediánem) se všemi ostatními třídami.
  3) Označíme třídu s druhým největším průměrem (mediánem) písmenem b a opakujeme obdobný postup jako je uveden v (2), přičemž danou třídu srovnáváme jen s třídami s menším průměrem (mediánem).
  4) Postup uvedený v (2) opakujeme pro všechny třídy, přičemž je označujeme vždy dalším písmenem.
  5) Po ukončení procesu (4) odstraníme písmena, která jsou všechna obsažena v skupinách tříd označených jiným písmenem. Např. pokud všechna písmena ***b*** jsou přiřazena třídám označeným zároveň písmenem ***a***, písmeno ***b*** vymažeme.
  6) Po ukončení procesu (1) – (5) každé písmeno indikuje jednu homogenní skupinu (podmnožinu).
  7) **POZOR!** Některé homogenní skupiny se mohou překrývat. Znamená to, že některé skupiny mohou mít vlastnosti blízké více homogenním skupinám současně. (Tj. například u některé z tříd se může objevit označení písmeny ***a*** i ***b***.)

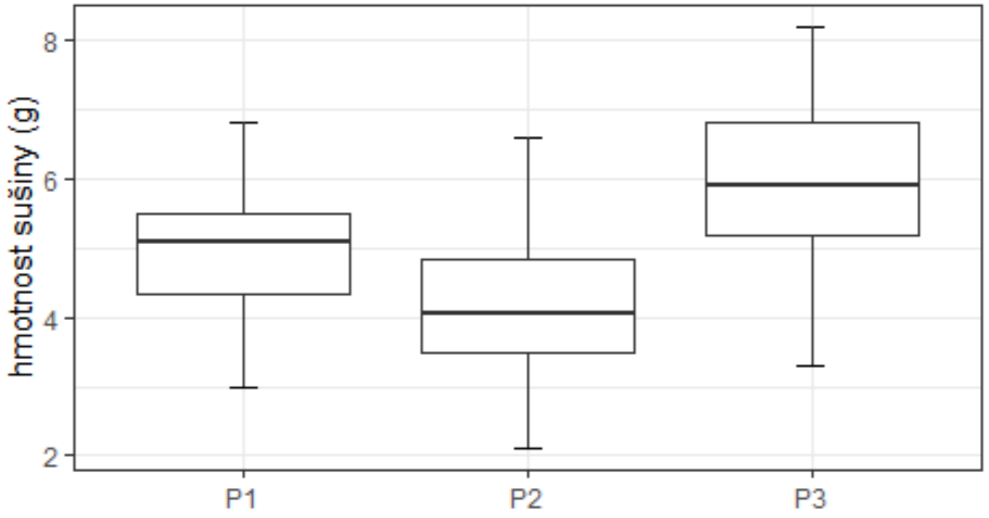
Příklad 2 – Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

b) V případě, že hmotnost sušiny statisticky významně závisí na podmínkách ošetřování plodiny, proveďte **post hoc analýzu**.

Řešení:

Hmotnost sušiny statisticky významně závisí na podmínkách Ošetřování (ANOVA, $p - hodnota \ll 0{,}001$). Tj. alespoň jedna dvojice podmínek ošetřování je charakterizována statisticky významně odlišnými průměrnými výnosy.



Příklad 2 – Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

b) V případě, že hmotnost sušiny statisticky významně závisí na podmínkách ošetřování plodiny, proveďte **post hoc analýzu**.

Řešení:

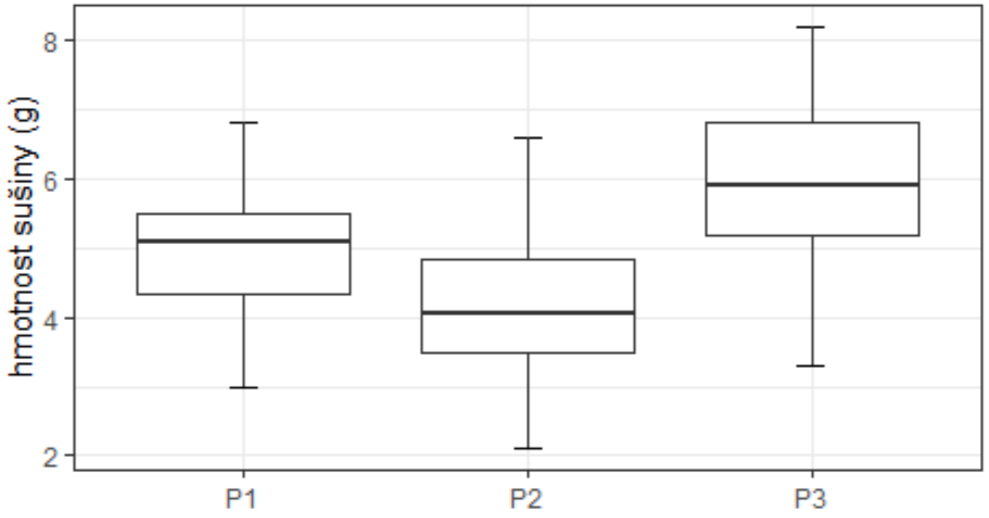
```
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = hmotnost.bez ~ skupina, data = data)

$skupina
          diff       lwr        upr     p adj
B-A -0.8225000 -1.407953 -0.2370472 0.0033403
C-A  0.9433333  0.317458  1.5692087 0.0015118
C-B  1.7658333  1.180381  2.3512861 0.0000000
```

Skupina	Prům. hmotnost sušiny (g)			
P3	5,93	a		
P1	4,99		b	
P2	4,17			c

Písmenkové schéma



Příklad 2 – Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

V souboru vynosy.xlsx jsou uvedeny záznamy o výnosech jisté plodiny (měřeno v hmotnosti sušiny z jedné rostliny (g)) v závislosti na třech způsobech ošetřování plodiny během růstu (P1, P2, P3).

b) V případě, že hmotnost sušiny statisticky významně závisí na podmínkách ošetřování plodiny, proveďte **post hoc analýzu**.

Řešení:

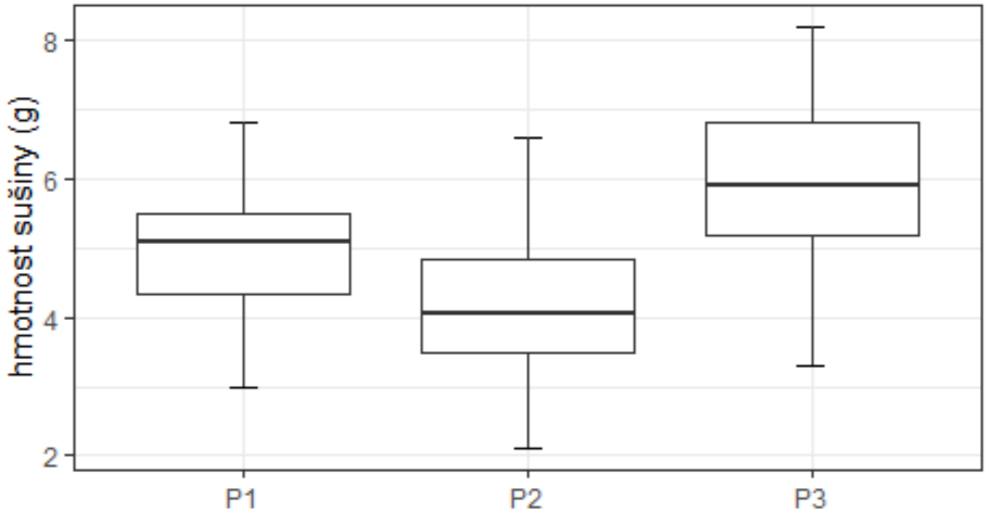
```
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = hmotnost.bez ~ skupina, data = data)

$skupina
          diff       lwr        upr     p adj
B-A -0.8225000 -1.407953 -0.2370472 0.0033403
C-A  0.9433333  0.317458  1.5692087 0.0015118
C-B  1.7658333  1.180381  2.3512861 0.0000000
```

Skupina	Prům. hmotnost sušiny (g)			
P3	5,93	a		
P1	4,99		b	
P2	4,17			c

Písmenkové schéma



Statisticky významně nejvyšší průměrná hmotnost sušiny vzniká při způsobu ošetřování P3, na druhém místě je způsob ošetřování P1, statisticky významně nejnižší průměrná hmotnost sušiny vzniká při způsobu ošetřování P2.

Příklad 3: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme počet odehraných hodin na čtyřech OS – Windows 7, Windows 8.1, Windows 10 a MAC
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Tukey HSD).

Průměrná odehraná doba (h)	
W7	295
W81	301
W10	243
MAC	225

Výsledky post hoc analýzy				
	W7	**W81**	**W10**	**MAC**
W7	x	0,121	0,004	<0,001
W81	x	x	0,002	<0,001
W10	x	x	x	0,042
MAC	x	x	x	x

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 3: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme počet odehraných hodin na čtyřech OS – Windows 7, Windows 8.1, Windows 10 a MAC
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Tukey HSD).

Průměrná odehraná doba (h)	
W7	295
W81	301
W10	243
MAC	225

Výsledky post hoc analýzy				
	W7	**W81**	**W10**	**MAC**
W7	x	0,121	0,004	<0,001
W81	x	x	0,002	<0,001
W10	x	x	x	0,042
MAC	x	x	x	x

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 3: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme počet odehraných hodin na čtyřech OS – Windows 7, Windows 8.1, Windows 10 a MAC
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Tukey HSD).

Průměrná odehraná doba (h)	
W7	295
W81	301
W10	243
MAC	225

Výsledky post hoc analýzy				
	W7	**W81**	**W10**	**MAC**
W7	x	0,121	0,004	<0,001
W81	x	x	0,002	<0,001
W10	x	x	x	0,042
MAC	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
W81	a			
W7	a	b		
W10			c	
MAC				d

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 3: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme počet odehraných hodin na čtyřech OS – Windows 7, Windows 8.1, Windows 10 a MAC
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Tukey HSD).

Průměrná odehraná doba (h)	
W7	295
W81	301
W10	243
MAC	225

Výsledky post hoc analýzy				
	W7	**W81**	**W10**	**MAC**
W7	x	0,121	0,004	<0,001
W81	x	x	0,002	<0,001
W10	x	x	x	0,042
MAC	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
W81	a			
W7	a			
W10			c	
MAC				d

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 3: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme počet odehraných hodin na čtyřech OS – Windows 7, Windows 8.1, Windows 10 a MAC
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Tukey HSD).

Průměrná odehraná doba (h)	
W7	295
W81	301
W10	243
MAC	225

Výsledky post hoc analýzy				
	W7	**W81**	**W10**	**MAC**
W7	x	0,121	0,004	<0,001
W81	x	x	0,002	<0,001
W10	x	x	x	0,042
MAC	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
W81	a			
W7	a			
W10			c	
MAC				d

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 3: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme počet odehraných hodin na čtyřech OS – Windows 7, Windows 8.1, Windows 10 a MAC
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Tukey HSD).

Průměrná odehraná doba (h)	
W7	295
W81	301
W10	243
MAC	225

Výsledky post hoc analýzy				
	W7	**W81**	**W10**	**MAC**
W7	x	0,121	0,004	<0,001
W81	x	x	0,002	<0,001
W10	x	x	x	0,042
MAC	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
W81	a			
W7	a			
W10			c	
MAC				d

Výsledné pořadí (od OS s nejvíce odehranými hodinami)	
1.	Windows 7, Windows 8.1
2.	Windows 10
3.	MAC

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
V2	a			
V1		b		
V3		b	c	
V4			c	d

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
V2	a			
V1		b		
V3		b	c	
V4			c	

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
V2	a			
V1		b		
V3		b	c	
V4			c	

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
V2	a			
V1		b		
V3		b	c	
V4			c	

Výsledné pořadí (od nejvyšší svítivosti) - 1. možnost	
1.	V2
2.	V1, V3
3.	V4

***Námět**: Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
V2	a			
V1		b		
V3		b	c	
V4			c	

Výsledné pořadí (od nejvyšší svítivosti) - 1. možnost	
1.	V2
2.	V1, V3
3.	V4

Výsledné pořadí (od nejvyšší svítivosti) - 2. možnost	
1.	V2
2.	V1
3.	V3, V4

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 4: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme svítivost žárovek po 10 000 h provozu u 4 výrobců – V1, V2, V3, V4.
- Co víme: Po ověření předpokladů byl zvolen **Kruskalův - Wallisův test**, nulová hypotéza o shodě mediánů byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **post hoc analýze** (Dunnové metoda).

Výb. medián svítivosti (lm)	
V1	1 269
V2	1 312
V3	1 251
V4	1 235

Výsledky post hoc analýzy				
	V1	**V2**	**V3**	**V4**
V1	x	0,034	0,221	0,046
V2	x	x	0,015	0,025
V3	x	x	x	0,315
V4	x	x	x	x

Písmenkové schéma				
V2	a			
V1		b		
V3		b	c	
V4			c	

Výsledné pořadí (od nejvyšší svítivosti) - 1. možnost	
1.	V2
2.	V1, V3
3.	V4

Výsledné pořadí (od nejvyšší svítivosti) - 2. možnost	
1.	V2
2.	V1
3.	V3, V4

Obě možnosti připadají v úvahu, pro výběr je vhodné se podívat na velikost efektů (rozdíl mediánů svítivosti dvojic výrobců).

Příklad 5: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme rychlost připojení k internetu v závislosti na typu připojení – ADSL, Kabel, Optika
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **pos hoc analýze** (Tukey HSD).

Prům. rychlost připojení (MB/s)	
ADSL	61
Kabel	89
Optika	74

Výsledky post hoc analýzy			
	ADSL	**Kabel**	**Optika**
ADSL	x	0,022	0,431
Kabel	x	x	0,633
Optika	x	x	x

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 5: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme rychlost připojení k internetu v závislosti na typu připojení – ADSL, Kabel, Optika
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **pos hoc analýze** (Tukey HSD).

Prům. rychlost připojení (MB/s)	
ADSL	61
Kabel	89
Optika	74

Výsledky post hoc analýzy			
	ADSL	**Kabel**	**Optika**
ADSL	x	0,022	0,431
Kabel	x	x	0,633
Optika	x	x	x

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 5: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme rychlost připojení k internetu v závislosti na typu připojení – ADSL, Kabel, Optika
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **pos hoc analýze** (Tukey HSD).

Prům. rychlost připojení (MB/s)	
ADSL	61
Kabel	89
Optika	74

Výsledky post hoc analýzy			
	ADSL	**Kabel**	**Optika**
ADSL	x	0,022	0,431
Kabel	x	x	0,633
Optika	x	x	x

Písmenkové schéma			
Kabel	a		
Optika	a	b	
ADSL		b	c

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 5: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme rychlost připojení k internetu v závislosti na typu připojení – ADSL, Kabel, Optika
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **pos hoc analýze** (Tukey HSD).

Prům. rychlost připojení (MB/s)	
ADSL	61
Kabel	89
Optika	74

Výsledky post hoc analýzy			
	ADSL	**Kabel**	**Optika**
ADSL	x	0,022	0,431
Kabel	x	x	0,633
Optika	x	x	x

Písmenkové schéma			
Kabel	a		
Optika	a	b	
ADSL		b	

Výsledné pořadí (od nejrychlejšího) - 1. možnost	
1.	Kabel, Optika
2.	ADSL

***Námět**: Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 5: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme rychlost připojení k internetu v závislosti na typu připojení – ADSL, Kabel, Optika
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **pos hoc analýze** (Tukey HSD).

Prům. rychlost připojení (MB/s)	
ADSL	61
Kabel	89
Optika	74

Výsledky post hoc analýzy			
	ADSL	**Kabel**	**Optika**
ADSL	x	0,022	0,431
Kabel	x	x	0,633
Optika	x	x	x

Písmenkové schéma			
Kabel	a		
Optika	a	b	
ADSL		b	

Výsledné pořadí (od nejrychlejšího) - 1. možnost	
1.	Kabel, Optika
2.	ADSL

Výsledné pořadí (od nejrychlejšího) - 2. možnost	
1.	Kabel
2.	Optika, ADSL

Námět: *Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Příklad 5: Interpretace výsledků post hoc analýzy (homogenní skupiny)

- Porovnáváme rychlost připojení k internetu v závislosti na typu připojení – ADSL, Kabel, Optika
- Co víme: Po ověření předpokladů byla zvolena **ANOVA**, nulová hypotéza o shodě středních hodnot byla **zamítnuta**, a proto pokračujeme k **pos hoc analýze** (Tukey HSD).

Prům. rychlost připojení (MB/s)	
ADSL	61
Kabel	89
Optika	74

Výsledky post hoc analýzy			
	ADSL	**Kabel**	**Optika**
ADSL	x	0,022	0,431
Kabel	x	x	0,633
Optika	x	x	x

Písmenkové schéma			
Kabel	a		
Optika	a	b	
ADSL		b	

Výsledné pořadí (od nejrychlejšího) - 1. možnost	
1.	Kabel, Optika
2.	ADSL

Výsledné pořadí (od nejrychlejšího) - 2. možnost	
1.	Kabel
2.	Optika, ADSL

Obě možnosti připadají v úvahu, pro výběr je vhodné se podívat na velikost efektů (rozdíl prům. rychlostí jednotlivých typů připojení).

***Námět**: Adéla Vrtková: https://homel.vsb.cz/~vrt0020/statistika/ANOVA_PostHoc.pdf*

Děkuji za pozornost!

martina.litschmannova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY