Úvod do testování hypotéz a vybrané jednovýběrové testy parametrických hypotéz

Martina Litschmannová

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Obsah

- Opakování: Statistika – základní pojmy
- Intervalové odhady vs. testování hypotéz
- Testování hypotéz – základní pojmy
- Klasický test (testování pomocí kritického oboru)
- Čistý test významnosti (testování pomocí p-hodnoty)
- Vybrané jednovýběrové testy parametrických hypotéz

Opakování: Statistika – základní pojmy

- Explorační analýza (popisná statistika) je…

  grafická prezentace a uspořádání dat do názornější formy a jejich popis několika málo hodnotami, které by obsahovaly co největší množství informací obsažených v původním souboru.

- Statistická indukce je …

  soubor metod (bodové a intervalové odhady, testování hypotéz) umožňujících usuzovat na základě znalosti výběru na vlastnosti populace.

Populace

Výběr

Zdroj: *https://bazant.wordpress.com/2019/07/23/zaklady-statistiky-cast-1/*

Opakování: Základní pojmy statistické indukce

- **Parametry populace** (obvykle pro jejich značení používáme symboly řecké abecedy) jsou **konstanty**.

- **Charakteristiky výběru** (obvykle značíme latinkou) jsou obvykle různé – v závislosti na pořízeném výběru. Jsou to **náhodné veličiny**.

Základní soubor (populace)	stř. hodnota $E(X)$, resp. μ	medián $x_{0,5}$	rozptyl $D(X)$, resp. σ^2	směr. odchylka σ	pravděpodobnost π
Výběrový soubor (výběr)	(výběrový) průměr $\bar{X}$	výběrový medián $\tilde{X}_{0,5}$	výběrový rozptyl S^2	výběrová směr. odchylka S	rel. četnost p

Základní metody statistické indukce

- **Intervalové odhady** (angl. confidence intervals) – umožňují odhadnout nejistotu v odhadu parametru náhodné veličiny
- **Testování hypotéz** (angl. hypothesis testing) - umožňuje posoudit, zda experimentálně získaná data nepopírají předpoklad, který jsme **před** provedením testování učinili.

Používáme, chceme-li odhadnout velikost parametru NV, resp. velikost efektu (rozdílu, resp. poměru parametrů dvou NV).

Používáme, chceme-li ověřit platnost předem definované hypotézy (s předem danou hladinou významností).

zdroj: http://www.nedarc.org/

Testování hypotéz

- **Statistická hypotéza** je…

  předpoklad (tvrzení) o rozdělení náhodné veličiny.

  (Např. Průměrná životnost jisté součástky je delší než 2 roky.)

- **Základní typy statistických hypotéz**
  - ✓ **parametrické** (tvrzení o parametru / parametrech populace) - jednovýběrové, dvouvýběrové (srovnávací) a vícevýběrové testy
  - ✓ **neparametrické** (tvrzení o jiných vlastnostech rozdělení náhodné veličiny než o jejich parametrech) – např. o typu rozdělení náhodné veličiny, o nezávislosti náhodných veličin, ...

- **Efekt** je …

  rozdíl (resp. poměr) parametru náhodné veličiny a jeho očekávané hodnoty, popřípadě rozdíl (resp. poměr) parametrů náhodných veličin.

Terminologie v praxi (1)

- Střední životnost žárovek Ed je nižší než výrobcem udávaných 5 let.
  - ✓ parametrická hypotéza (o střední hodnotě)
  - ✓ jednovýběrový test

- Mortalita je u laparoskopických operací nižší než u operací konvenčních.
  - ✓ parametrická hypotéza (o parametrech binomického rozdělení (pravděpodobnostech úmrtí))
  - ✓ dvouvýběrový test

- Průměrné výsledky srovnávacích testů závisí na typu absolvované střední školy.
  - ✓ parametrická hypotéza (o středních hodnotách)
  - ✓ vícevýběrový test

- Pořízený datový soubor je výběrem z populace mající normální rozdělení.
  - ✓ neparametrická hypotéza (o typu rozdělení)
  - ✓ jednovýběrový test

Testování hypotéz

Speciálně pro jednovýběrové a dvouvýběrové testy parametrických hypotéz

- **Nulová hypotéza (H_0)**

  neexistence rozdílu mezi parametrem a testovanou hodnotou, resp. mezi skupinami (nulový efekt)

  Např. Průměrný BMI mužů a žen se neliší.

- **Alternativní hypotéza (H_A)**

  existence rozdílu (nenulový efekt)

  Např. Průměrný BMI mužů a žen se liší.

- **Nulová a alternativní hypotéza se navzájem doplňují,**

  tj. neplatí-li nulová hypotéza, platí hypotéza alternativní

  - oboustranná vs. jednostranná alternativní hypotéza

Terminologie v praxi (2.1)

Zadání problému: Ověřte, zda použití bezpečnostních pásů ovlivňuje úmrtnost při dopravních nehodách.

Populace 1 (základní soubor 1): účastníci dopravních nehod, kteří seděli na místech, na nichž je možno používat bezpečnostní pásy a byli připoutáni.

Populace 2 (základní soubor 2): účastníci dopravních nehod, kteří seděli na místech, na nichž je možno používat bezpečnostní pásy a nebyli připoutáni.

Sledovaný statistický znak (náhodná veličina): úmrtnost (relativní četnost zemřelých)

Nulová hypotéza $\boldsymbol{H_0}$: $\pi_A = \pi_N$, kde π_A, resp. π_N označuje úmrtnost účastníků dopravních nehod, kteří byli, resp. nebyli, připoutáni

Alternativní hypotéza $\boldsymbol{H_A}$: $\pi_A \neq \pi_N$ (zadání problému neobsahuje jednostrannou nerovnost).

Terminologie v praxi (2.2)

Zadání problému*:* Ověřte, zda průměrný plat v ČR je větší než 24 000,- Kč.

Populace (základní soubor): všichni občané ČR pobírající mzdu

Sledovaný statistický znak (náhodná veličina): mzda

Nulová hypotéza $\boldsymbol{H_0}$: $\mu = 24\,000$

(fakticky $\mu \leq 24\,000$, ale uvádíme pouze „krajní“ jednoduchou hypotézu)

Alternativní hypotéza $\boldsymbol{H_A}$**:** $\mu > 24\,000$

(zadání obsahuje nerovnost v tomto tvaru)

Poznámka: *Průměrný plat zjištěný z výběrového souboru by měl být větší než 24 000,- Kč. Pokud by tomu tak nebylo, měli bychom použít oboustrannou alternativní hypotézu*.

Jak ověřit, že je stat. hypotéza pravdivá?

Příklad: Ze zkušenosti očekáváme, že v MSK je střední hodnota obsahu cholesterolu v krvi vyšší než v literatuře uváděná hodnota 4, 7 mmol/l.

$$H_0\colon\ \mu = 4{,}7$$
$$H_A\colon\ \mu > 4{,}7$$

- **Jak tento předpoklad ověřit?**
  - ✓ Zjistíme údaje o obsahu cholesterolu v krvi u 100 náhodně vybraných občanů MSK.
  - ✓ Průměrný obsah cholesterolu v krvi probandů (tj. jedinců, kteří jsou předmětem zkoumání) byl 5,4 mmol/l.

- **Jsou tyto výsledky v souladu s naší hypotézou?**
  - ✓ I kdyby byla testovaná hypotéza pravdivá, nelze očekávat, že průměrná hodnota pozorovaná ve výběru bude přesně 4,7 mmol/l.
  - ✓ **Nulovou hypotézu zamítneme,** pokud získané **uspořádání výběru** bude za předpokladu platnosti nulové hypotézy **velmi nepravděpodobné**.

Testování hypotéz

Pravdivost nulové hypotézy nelze na základě dat dokázat!!!
Pravdivost nulové hypotézy lze na základě dat pouze vyvrátit.

Nulová hypotéza
(obžalovaný je nevinen)

Alternativní hypotéza
(obžalovaný je vinen)

Data (výběrový soubor)
(svědci)

Testové kritérium
(soudce)

Princip presumpce neviny
Neodsoudí-li soudce obžalovaného, nemusí to znamenat, že je obžalovaný nevinný.
Může to znamenat, že neexistuje dostatek důkazů pro jeho odsouzení!

Chyba I. a II. druhu

- Testování hypotéz je rozhodovací proces, tj. mohou při něm vznikat chyby.

Rozhodnutí

Skutečnost

	Nezamítáme H_0	**Zamítáme H_0**
Platí H_0	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost: 1 - α	Chyba I. druhu Pravděpodobnost: α
Platí H_A	Chyba II. druhu Pravděpodobnost: β	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost: 1 - β

- **Chyba I. druhu**
  - ✓ zachytíme efekt, který ve skutečnosti neexistuje (falešně pozitivní výsledek)
  - ✓ α … hladina významnosti
- **Chyba II. druhu**
  - ✓ nezachytíme efekt, který ve skutečnosti existuje (falešně negativní výsledek)
  - ✓ $1 - \beta$ … síla testu (**power**), tj. p-st, že zachytíme efekt, který ve skutečnosti existuje

Chyba I. a II. druhu

Rozhodnutí

Skutečnost	Nezamítáme H_0	Zamítáme H_0
Platí H_0 (nejde o těhotenství) choriový gonadotropin (hCG) = 0	**Správné rozhodnutí**  	**Chyba I. druhu** 
Platí H_A (jde o těhotenství)	**Chyba II. druhu**  	**Správné rozhodnutí** 

Chyba I. a II. druhu

Chtěli bychom provádět testy s nízkou hladinou významnosti a vysokou sílou testu (nízkou pravděpodobností chyby II. druhu).

- Čím menší hladina významnosti, tím větší pravděpodobnost chyby II. druhu! ($\alpha \searrow \Rightarrow \beta \nearrow$)
- Čím větší rozsah výběru, tím menší pravděpodobnost chyby II. druhu. ($n \nearrow \Rightarrow \beta \searrow$)

- Hladinu významnosti α volíme obvykle 0,05.
- Sílu testu lze poté ovlivnit volbou testové statistiky a dostatečného počtu pozorování.

Parametrické vs. neparametrické testy

Parametrické testy

- jsou použitelné pouze pro určitý typ rozdělení náhodné veličiny (předpoklad normality, data jsou výběrem z alternativního rozdělení, …).

Neparametrické testy

- jsou použitelné bez ohledu na typ rozdělení,
- mají menší sílu testu (větší pravděpodobnost chyby druhého druhu) než jejich parametrické protějšky,
- jsou často použitelné i na kvalitativní (ordinální či nominální) data.

Jak postupovat při testování hypotéz?

Klasický přístup:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ. (Rozdělení testové statistiky za předpokladu platnosti nulové hypotézy nazýváme nulové rozdělení.)
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Určíme **kritický obor** W^*, tj. množinu, v níž se, za předpokladu platnosti H_0, hodnoty testové statistiky vyskytují s velmi malou pravděpodobností.
  - ✓ Doplňkem k W^* je tzv. obor přijetí V^*.
  - ✓ Hranici mezi kritickým oborem a oborem přijetí označujeme jako kritická hodnota testu t_{krit}.
- Na základě konkrétní realizace výběru určíme **pozorovanou hodnotu x_{OBS} testové statistiky**.
- **Rozhodneme o výsledku testu.**

$x_{OBS} \in W^*$	Na hladině významnosti α zamítáme H_0 ve prospěch H_A.
$x_{OBS} \notin W^*$	Na hladině významnosti α nezamítáme H_0.

Jak postupovat při testování hypotéz?

Klasický přístup:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ. (Rozdělení testové statistiky za předpokladu platnosti nulové hypotézy nazýváme nulové rozdělení.)
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Určíme **kritický obor** W^*:

Tvar alternativní hypotézy H_A	Kritický obor W^*
$\theta < \theta_0$	$(-\infty, x_\alpha)$
$\theta > \theta_0$	$(x_{1-\alpha}, \infty)$
$\theta \neq \theta_0$	$\left(-\infty, x_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(x_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$

- Na základě konkrétní realizace výběru určíme **pozorovanou hodnotu x_{OBS} testové statistiky**.
- **Rozhodneme o výsledku testu:**

$x_{OBS} \in W^*$	Na hladině významnosti α zamítáme H_0 ve prospěch H_A.
$x_{OBS} \notin W^*$	Na hladině významnosti α nezamítáme H_0.

Příklad s hladinou cholesterolu

Příklad: Ze zkušenosti očekáváme, že v MSK je střední hodnota obsahu cholesterolu v krvi vyšší než v literatuře uváděná hodnota 4, 7 mmol/l.

Jak postupovat při testování hypotéz?

Klasický přístup:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.

Příklad s hladinou cholesterolu

Příklad: Ze zkušenosti očekáváme, že v MSK je střední hodnota obsahu cholesterolu v krvi vyšší než v literatuře uváděná hodnota 4, 7 mmol/l.

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

Jak postupovat při testování hypotéz?

Klasický přístup:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).

Příklad s hladinou cholesterolu

Příklad: Ze zkušenosti očekáváme, že v MSK je střední hodnota obsahu cholesterolu v krvi vyšší než v literatuře uváděná hodnota 4, 7 mmol/l.

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$\alpha = 0{,}05$

Jak postupovat při testování hypotéz?

Klasický přístup:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ. (Rozdělení testové statistiky za předpokladu platnosti nulové hypotézy nazýváme nulové rozdělení.)
- Ověříme **předpoklady testu**!

Příklad s hladinou cholesterolu

Příklad: Ze zkušenosti očekáváme, že v MSK je střední hodnota obsahu cholesterolu v krvi vyšší než v literatuře uváděná hodnota 4, 7 mmol/l.

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$\alpha = 0{,}05$

Pro ilustraci vycházejme pouze ze znalosti centrální limitní věty (předpokládejme, že víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l a že do výběrového souboru bylo zařazeno 10 pacientů. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacienta lze modelovat normálním rozdělením.

Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

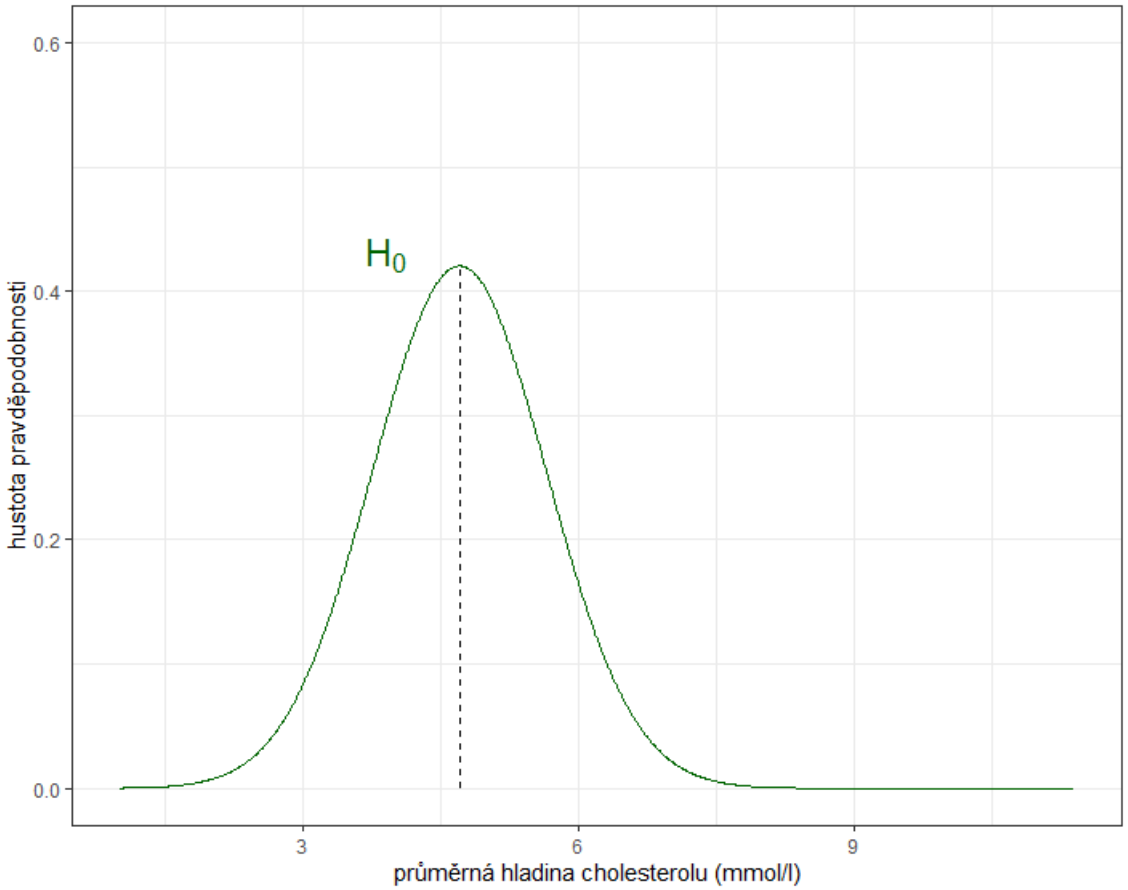
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{3{,}0^2}{10}\right)$

Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\ (\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9)$



Jak postupovat při testování hypotéz?

<u>Klasický přístup</u>:

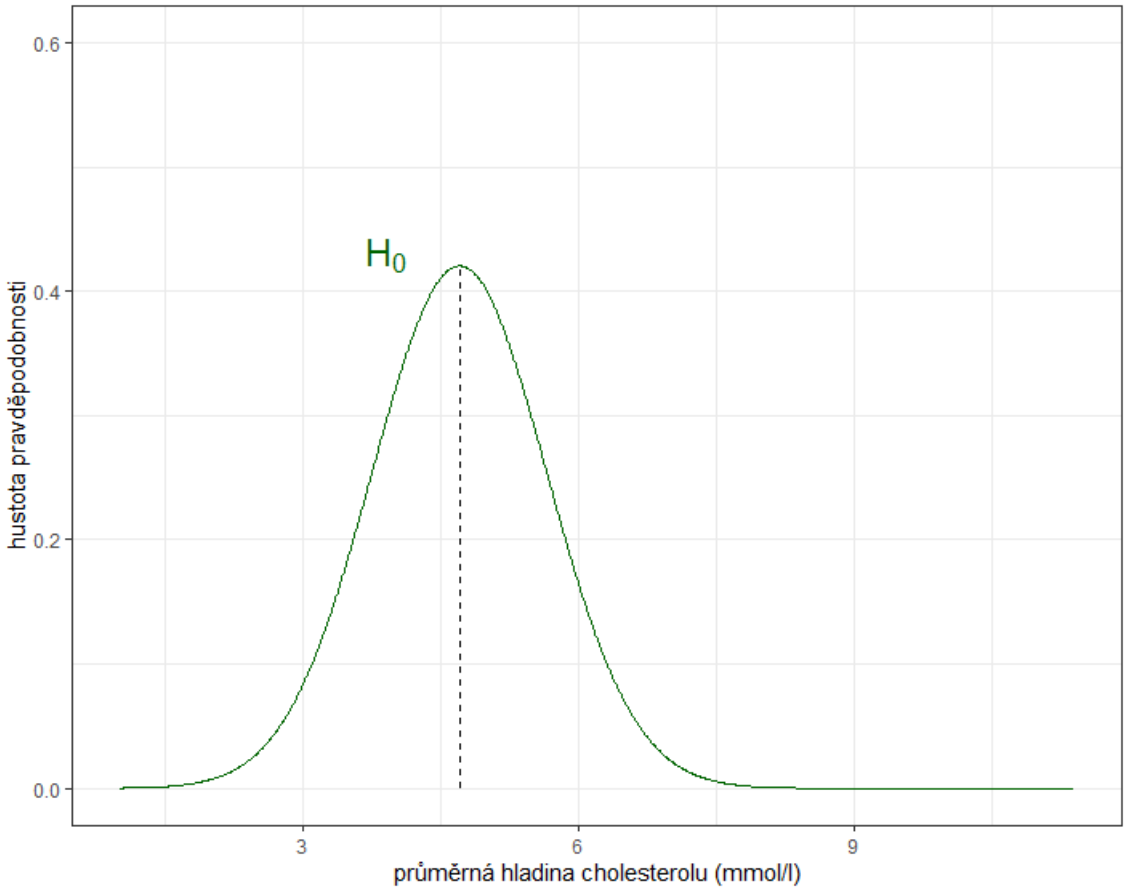
- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ. (Rozdělení testové statistiky za předpokladu platnosti nulové hypotézy nazýváme nulové rozdělení.)
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Určíme **kritický obor** W^*, tj. množinu, v níž se, za předpokladu platnosti H_0, hodnoty testové statistiky vyskytují s velmi malou pravděpodobností.
  - ✓ Doplňkem k W^* je tzv. obor přijetí V^*.
  - ✓ Hranici mezi kritickým oborem a oborem přijetí označujeme jako kritická hodnota testu t_{krit}.

Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\ (\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9)$



Příklad s hladinou cholesterolu

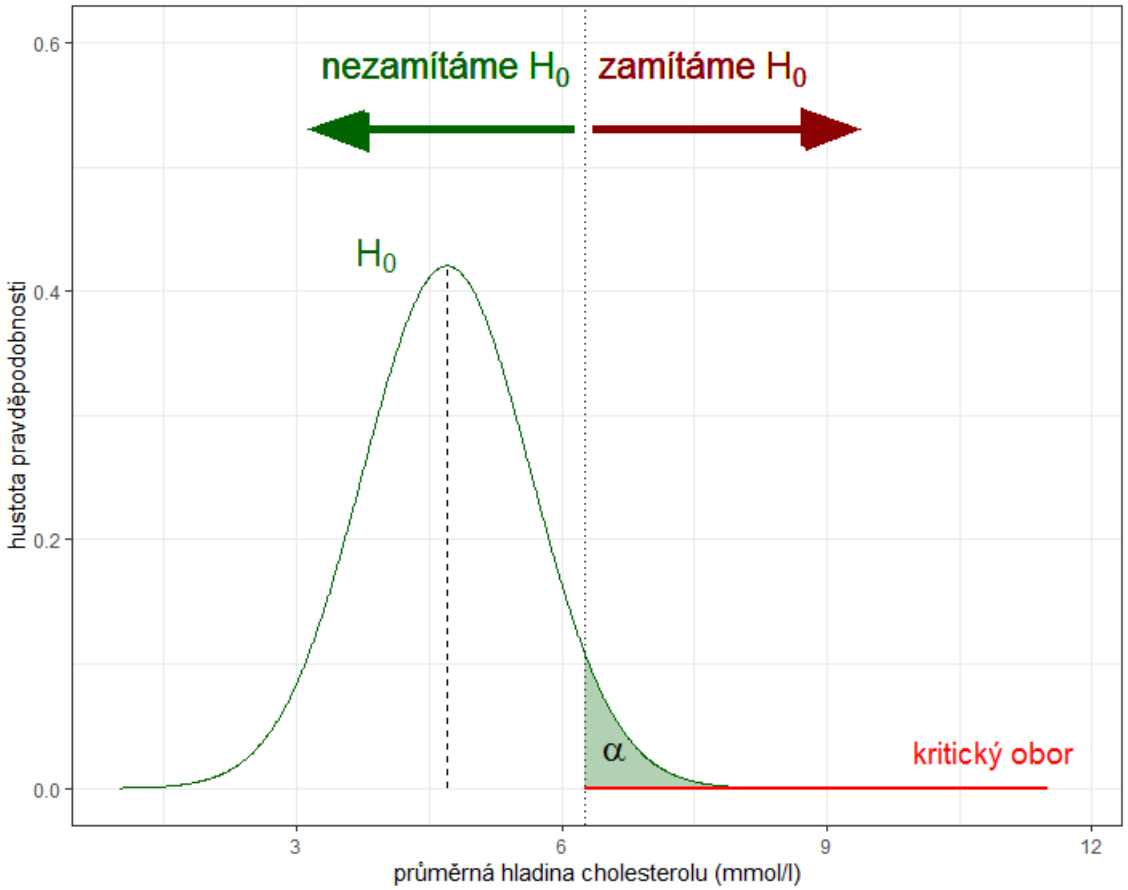
H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\ (\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9)$

$\alpha = 0{,}05$

$W^* = (6{,}26; \infty)$



Jak postupovat při testování hypotéz?

<u>Klasický přístup</u>:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ. (Rozdělení testové statistiky za předpokladu platnosti nulové hypotézy nazýváme nulové rozdělení.)
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Určíme **kritický obor** W^*, tj. množinu, v níž se, za předpokladu platnosti H_0, hodnoty testové statistiky vyskytují s velmi malou pravděpodobností.
  - ✓ Doplňkem k W^* je tzv. obor přijetí V^*.
  - ✓ Hranici mezi kritickým oborem a oborem přijetí označujeme jako kritická hodnota testu t_{krit}.
- Na základě konkrétní realizace výběru určíme **pozorovanou hodnotu x_{OBS} testové statistiky**.

Příklad s hladinou cholesterolu

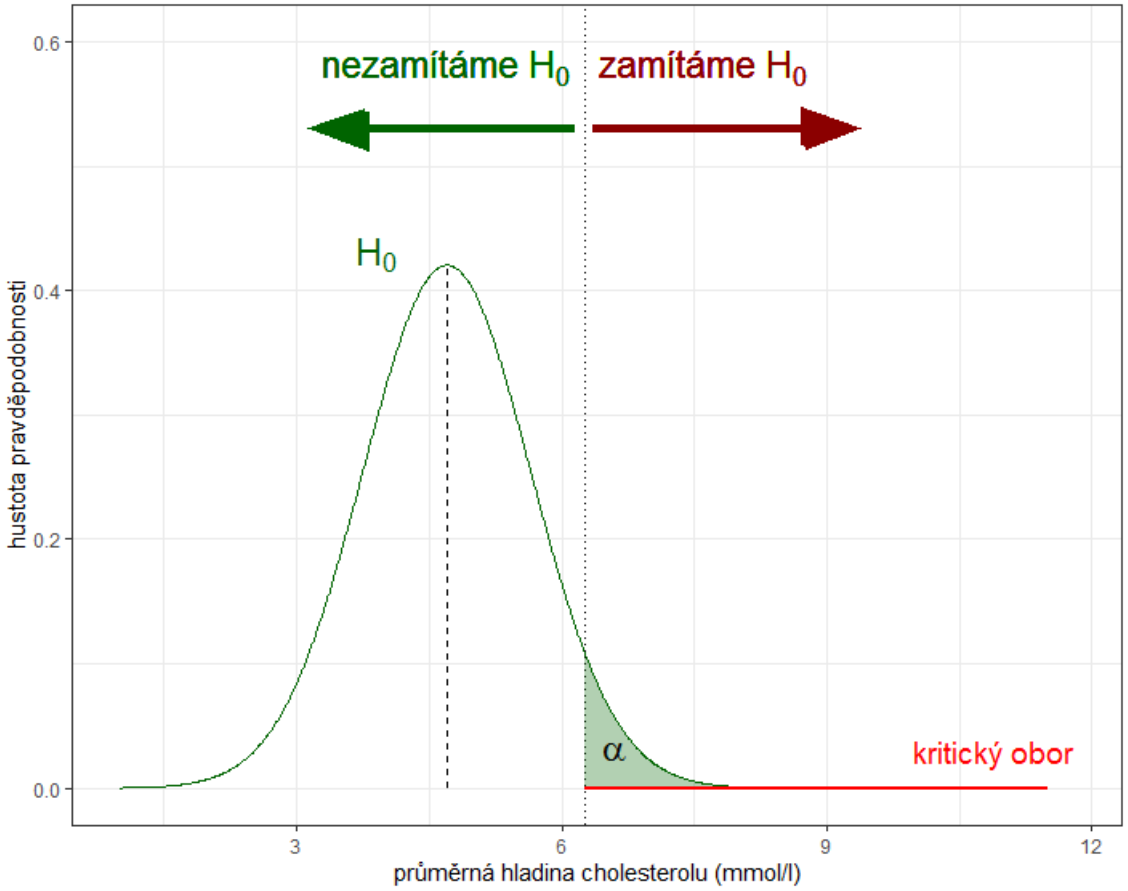
H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\ (\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9)$

$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$



Příklad s hladinou cholesterolu

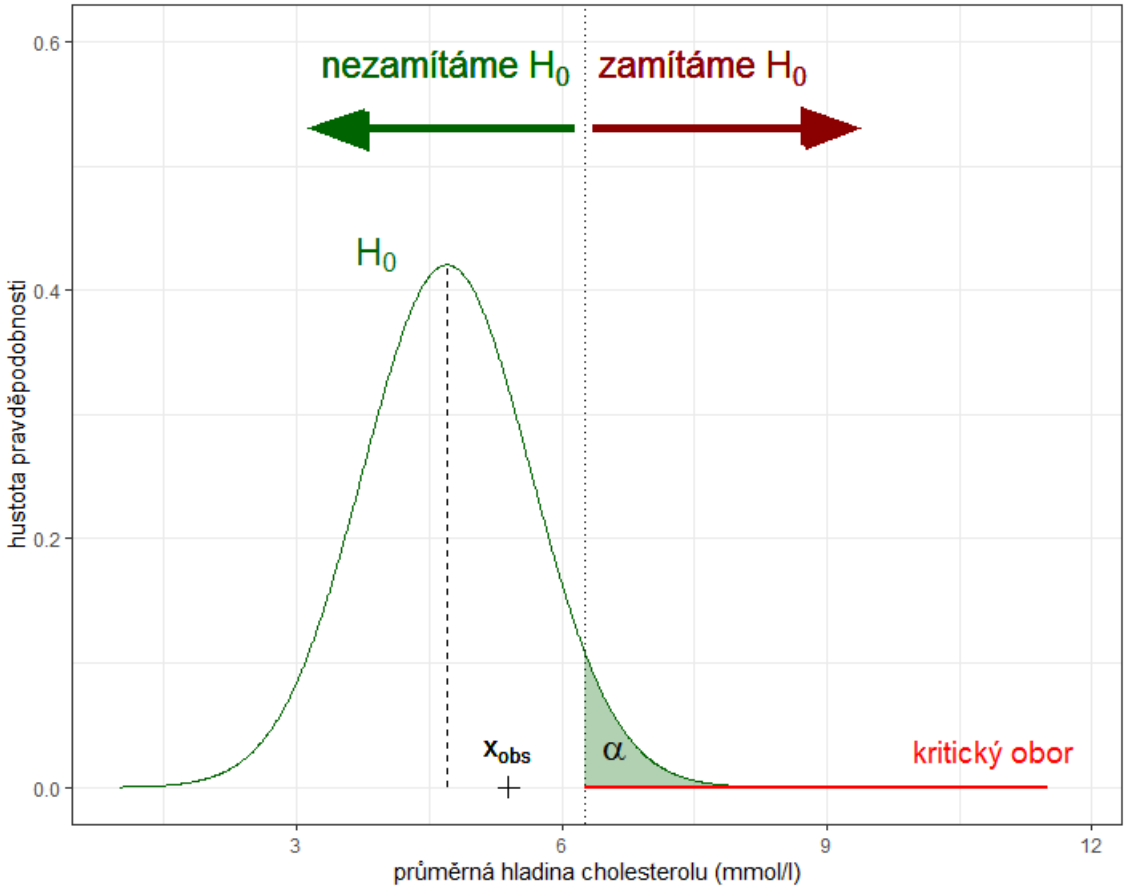
H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$



Jak postupovat při testování hypotéz?

Klasický přístup:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ. (Rozdělení testové statistiky za předpokladu platnosti nulové hypotézy nazýváme nulové rozdělení.)
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Určíme **kritický obor** W^*, tj. množinu, v níž se, za předpokladu platnosti H_0, hodnoty testové statistiky vyskytují s velmi malou pravděpodobností.
  - ✓ Doplňkem k W^* je tzv. obor přijetí V^*.
  - ✓ Hranici mezi kritickým oborem a oborem přijetí označujeme jako kritická hodnota testu t_{krit}.
- Na základě konkrétní realizace výběru určíme **pozorovanou hodnotu x_{OBS} testové statistiky**.
- **Rozhodneme o výsledku testu.**

$x_{OBS} \in W^*$	Na hladině významnosti α zamítáme H_0 ve prospěch H_A.
$x_{OBS} \notin W^*$	Na hladině významnosti α nezamítáme H_0.

Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

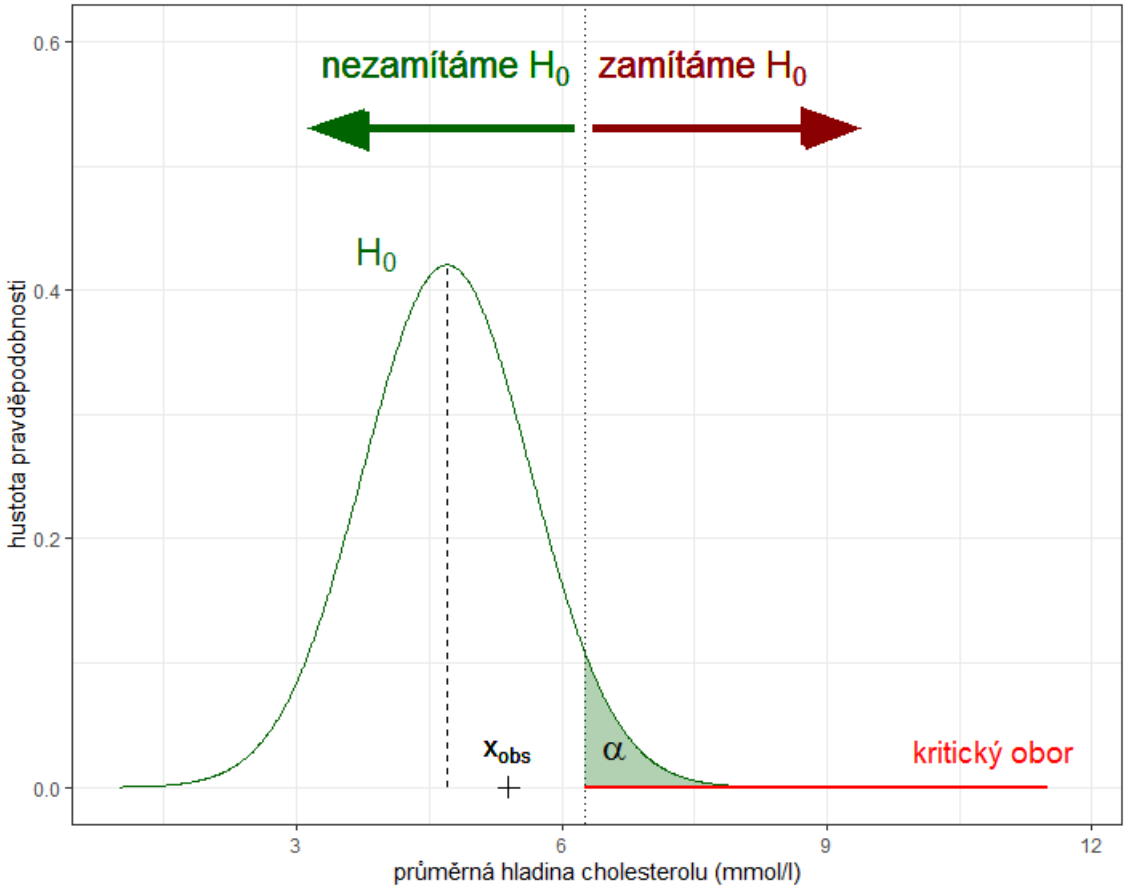
$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

$x_{OBS} \notin W^*(\text{kritický obor}) \Rightarrow$ nezamítáme H_0

Na hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout H_0.

Tj. průměrná hladina cholesterolu v krvi pacientů v MSK statisticky významně nepřevyšuje 4,7 mmol/l.



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

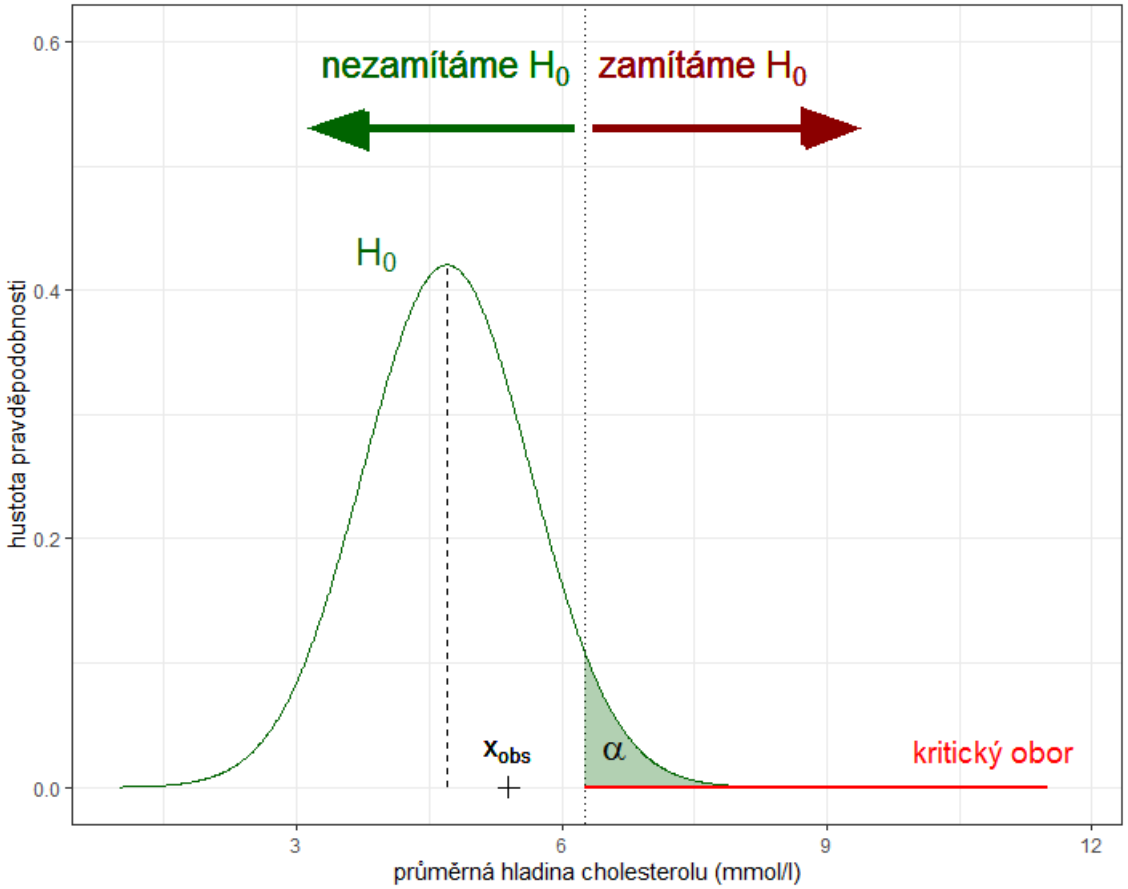
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme H_0.

Změnilo by se naše rozhodnutí, pokud bychom rozhodovali na hladině významnosti 0,35?



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

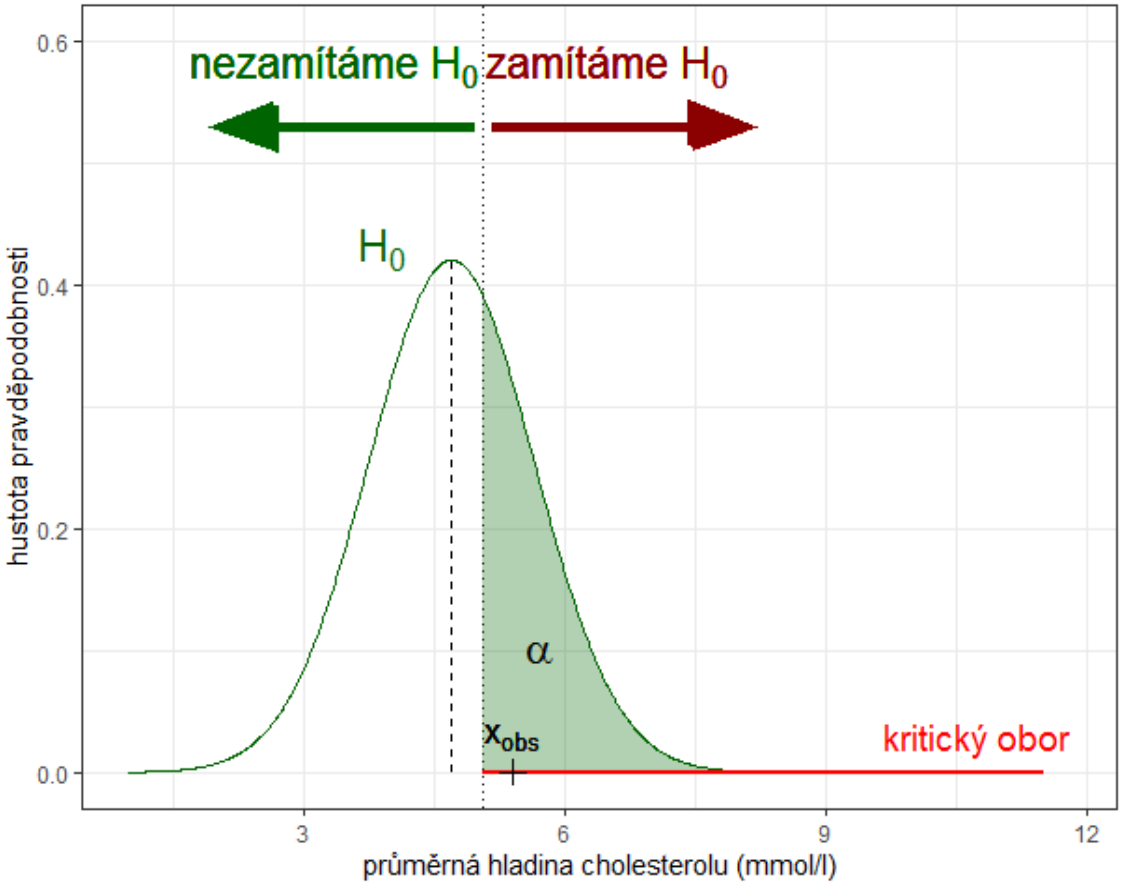
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

$\alpha = 0{,}35$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme H_0.

Na hladině významnosti 0,35 zamítáme H_0.



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

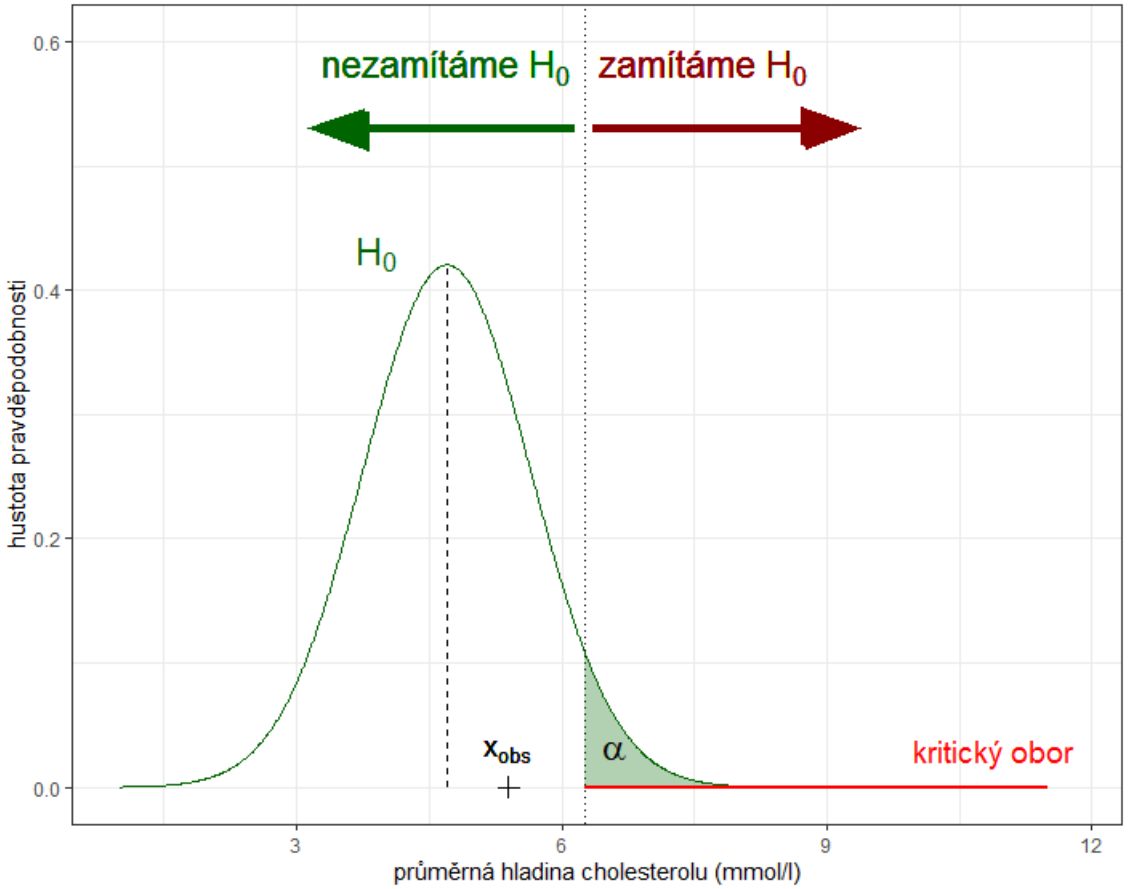
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme H_0.

Změnilo by se naše rozhodnutí, pokud bychom stejnou průměrnou hodnotu hladiny cholesterolu zjistili u výběru 100 pacientů?



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

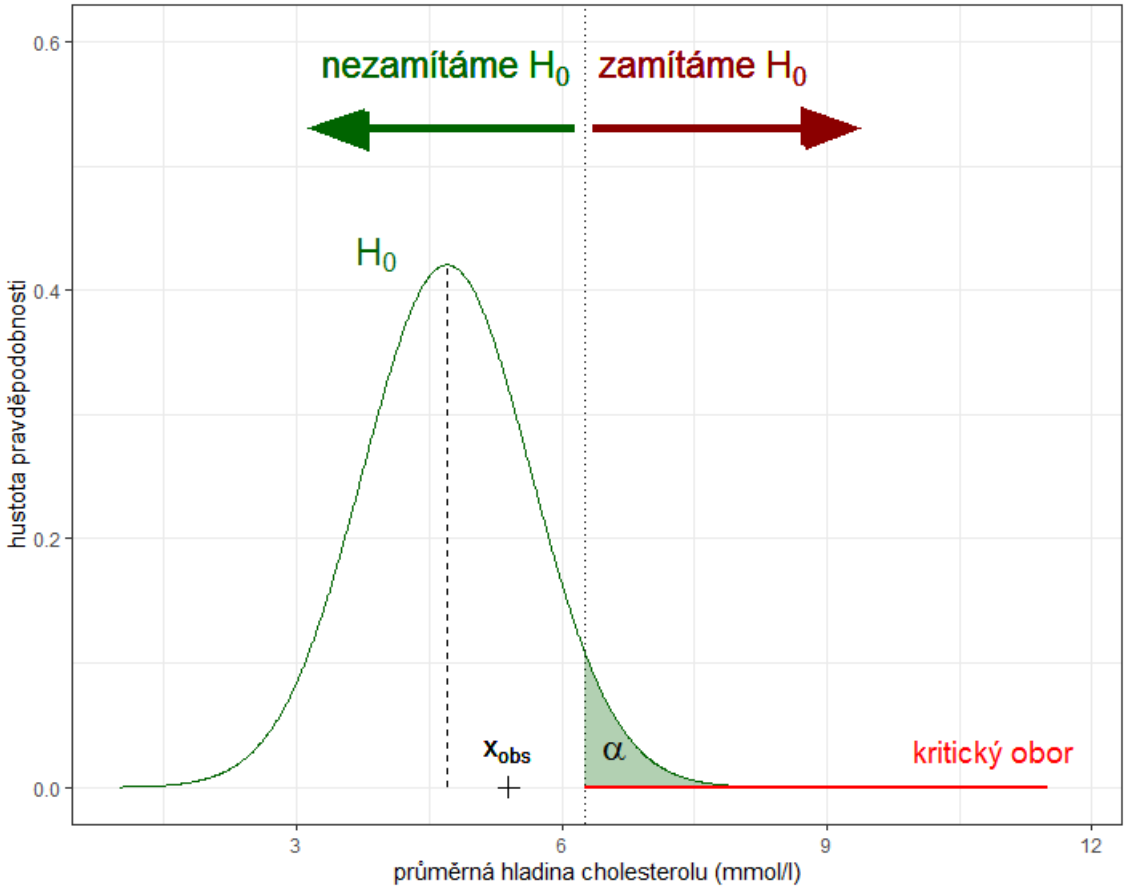
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{10}\right)$

$n = 100$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{100}\right)$

$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

$n = 10$



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{10}\right)$

$n = 100$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{100}\right)$

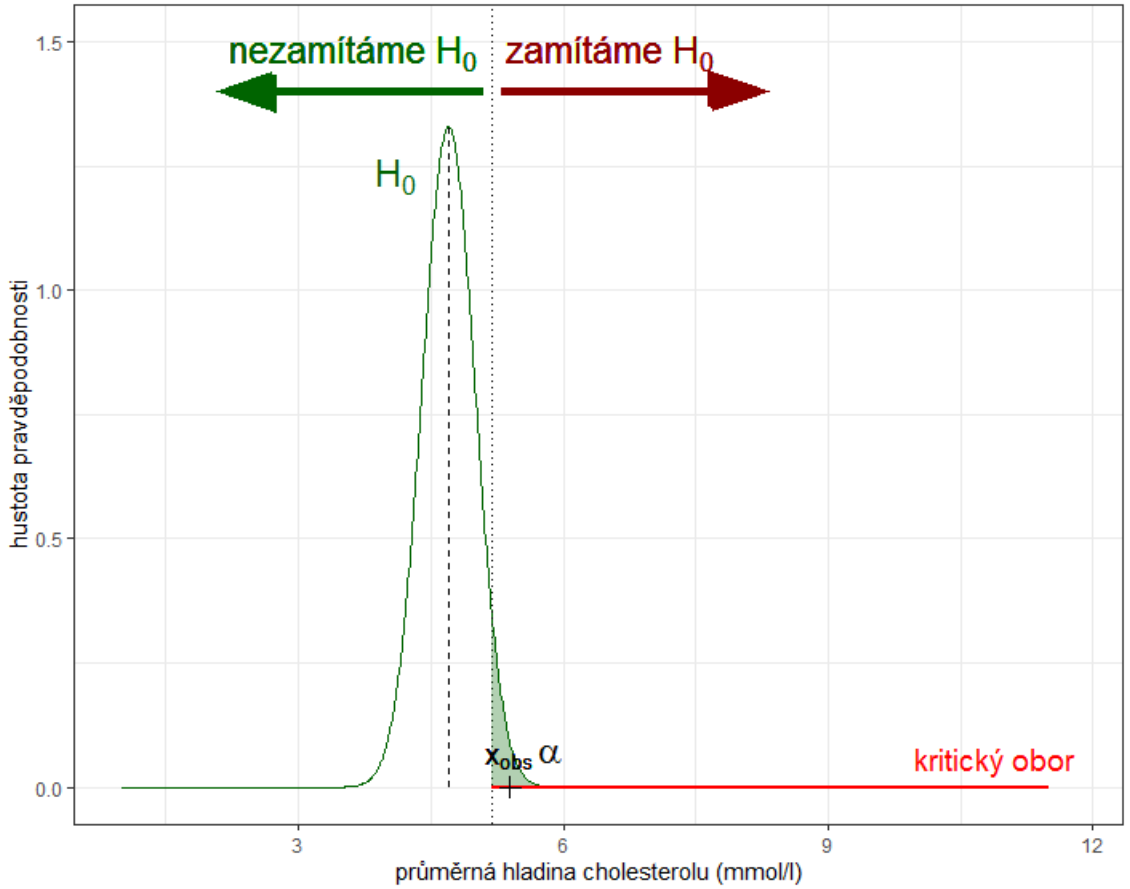
$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

Na hladině významnosti 0,05 zamítáme H_0.

Čím větší je rozsah výběru, tím menší efekt „postačuje“ k zamítnutí nulové hypotézy.

$n = 100$



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{10}\right)$

$n = 100$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{100}\right)$

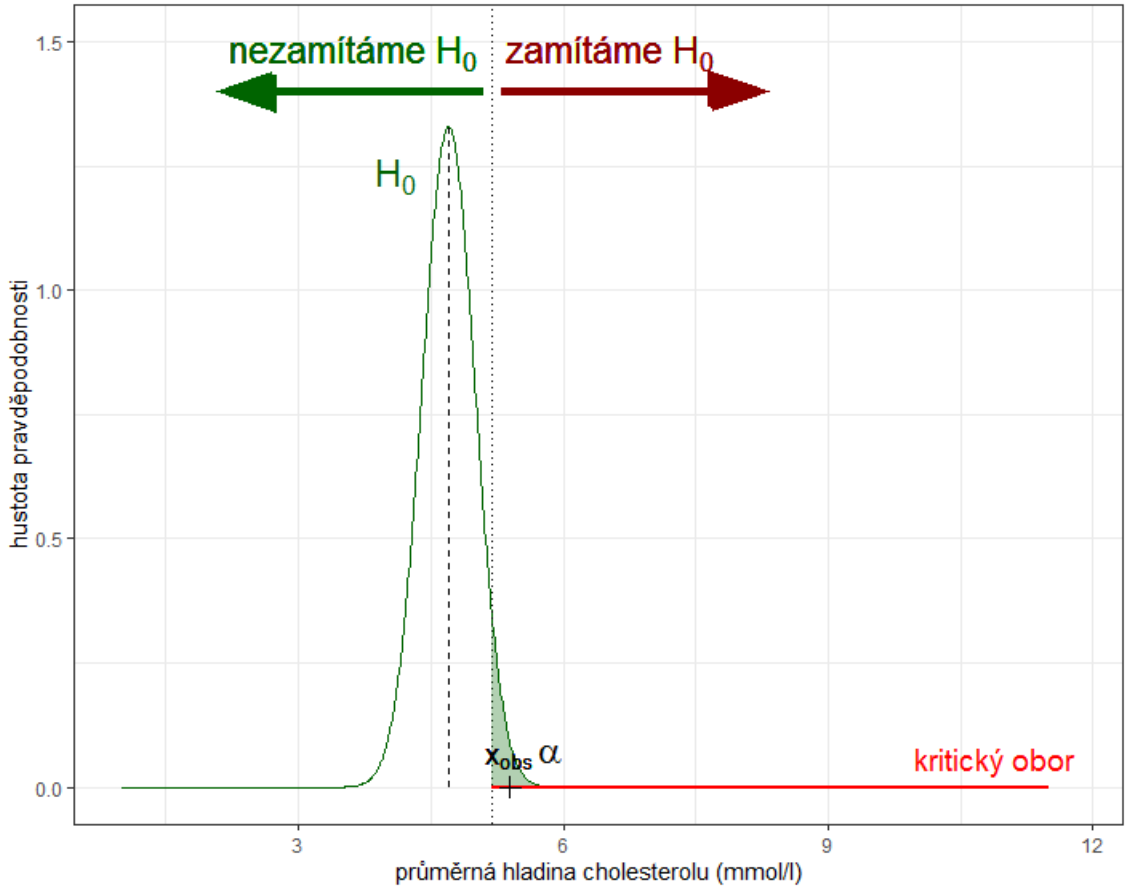
$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

Na hladině významnosti 0,05 zamítáme H_0.

Čím větší je rozsah výběru, tím menší efekt bude označen za statisticky významný.

$n = 100$



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{10}\right)$

$n = 100$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{100}\right)$

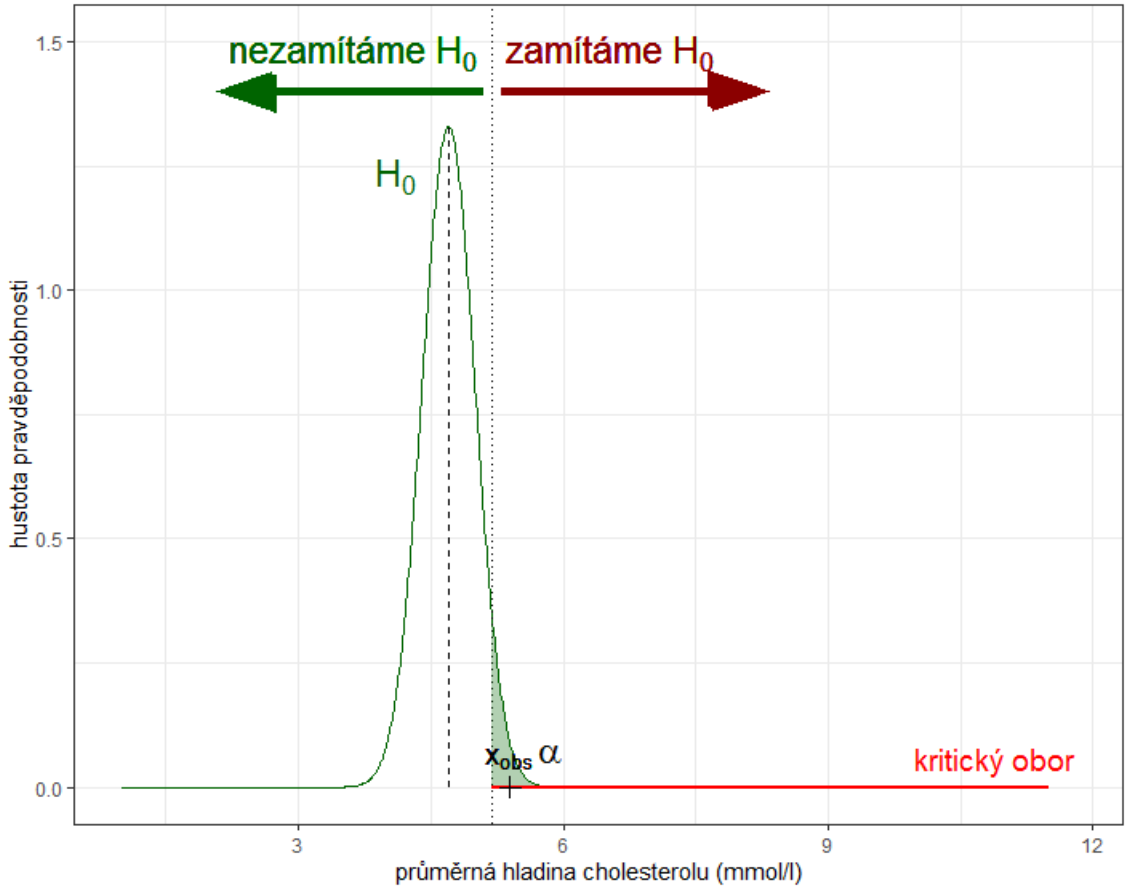
$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

Na hladině významnosti 0,05 zamítáme H_0.

Při použití příliš velkého rozsahu výběru bude i velmi malý efekt označen za statisticky významný.

$n = 100$



Jak postupovat při testování hypotéz?

Čistý test významnosti:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ.
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Na základě konkrétní realizace výběru určíme **pozorovanou hodnotu x_{OBS} testové statistiky**.
- Vypočteme ***p*-hodnotu** (angl. „*p*-value“ nebo „significance level“).

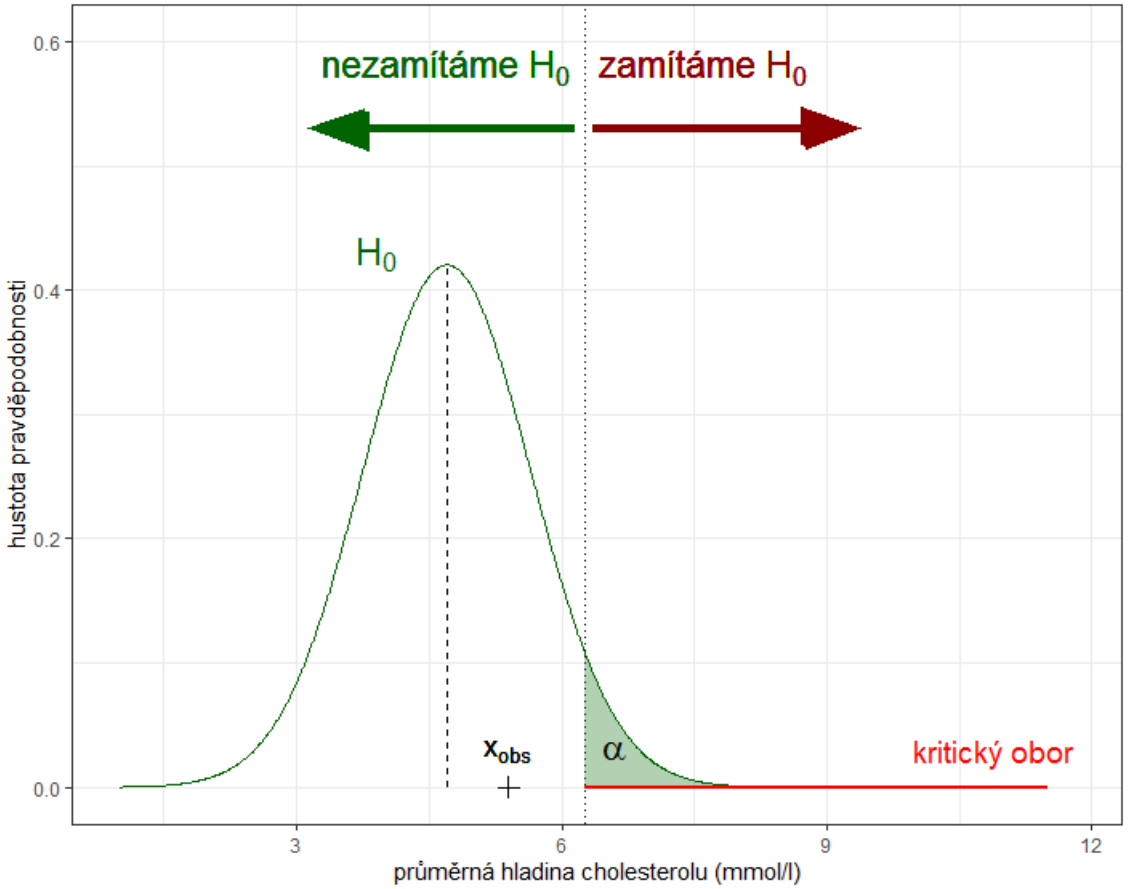
Tvar alternativní hypotézy H_A	$p\text{–}hodnota$
$\theta < \theta_0$	$p\text{–}hodnota = F_0(x_{OBS})$
$\theta > \theta_0$	$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$
$\theta \neq \theta_0$	$p\text{–}hodnota = 2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$

- **Rozhodneme** o výsledku testu.

$p\text{–}hodnota < \alpha$	Na hladině významnosti α zamítáme H_0 ve prospěch H_A.
$p\text{–}hodnota \geq \alpha$	Na hladině významnosti α nezamítáme H_0.

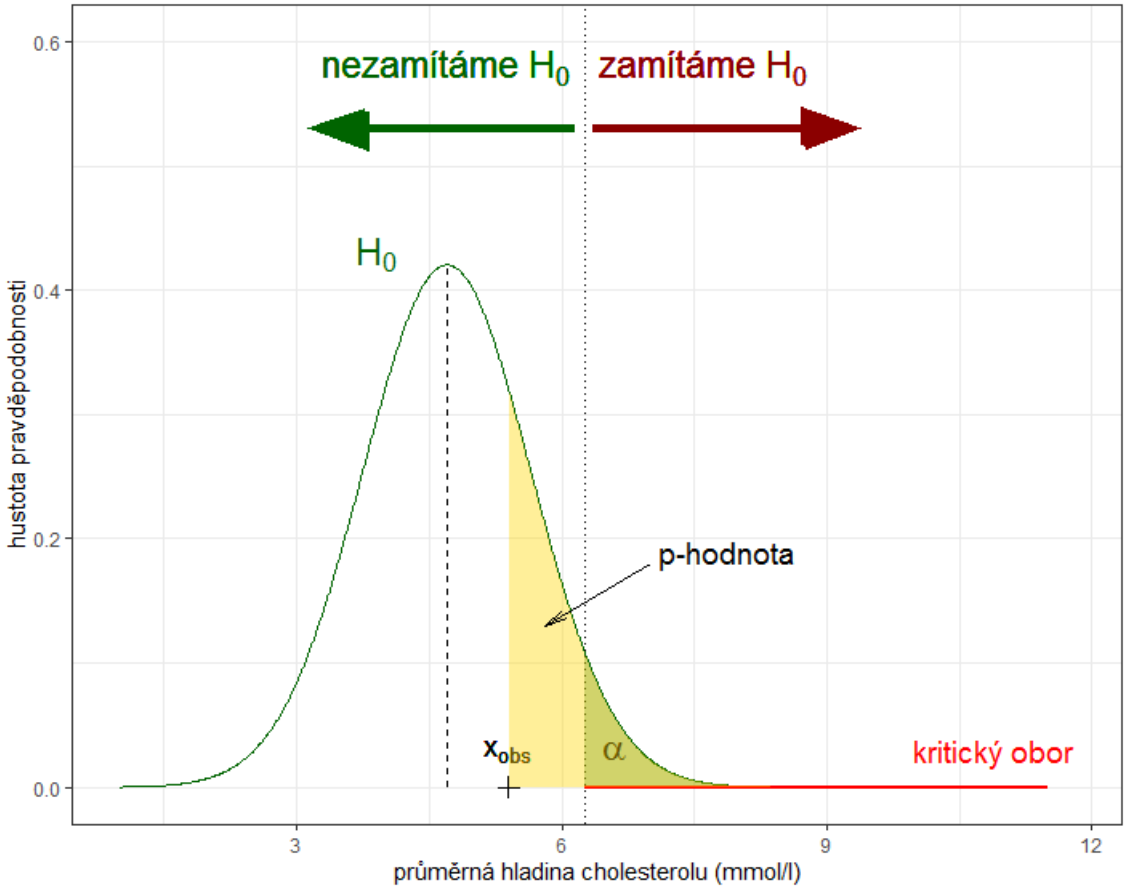
Co je to p-hodnota?

- P-st, s jakou můžeme za předpokladu platnosti H_0 pozorovat v opakovaně provedeném výběru stejného rozsahu takový výsledek (efekt), jaký jsme pozorovali, nebo takový, jaký proti nulové hypotéze „svědčí” ještě více než ten námi pozorovaný.



Co je to p-hodnota?

- P-st, s jakou můžeme za předpokladu platnosti H_0 pozorovat v opakovaně provedeném výběru stejného rozsahu takový výsledek (efekt), jaký jsme pozorovali, nebo takový, jaký proti nulové hypotéze „svědčí” ještě více než ten námi pozorovaný.



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

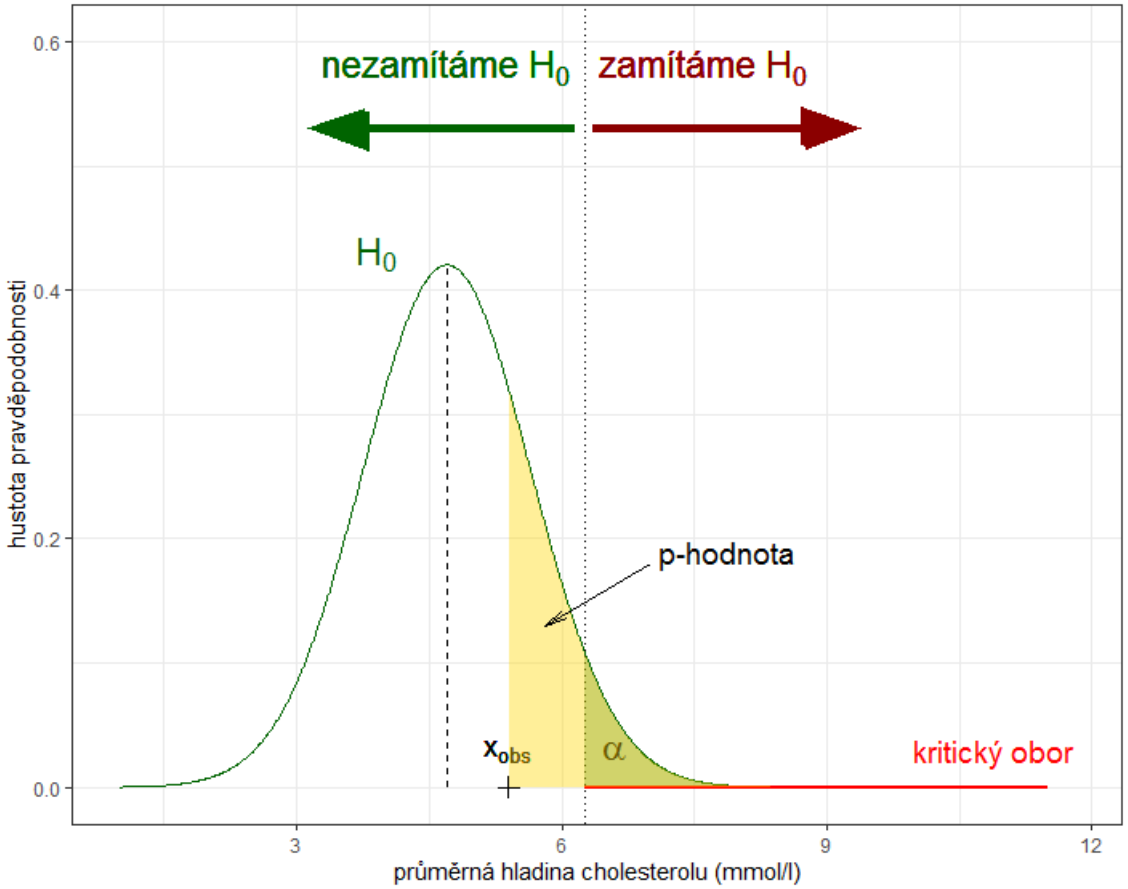
$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

$$p - hodnota = P\left(\bar{X} > 5{,}4 \middle| H_0\right) = 0{,}230$$

$p\text{–}hodnota < \alpha$	Na hladině významnosti α zamítáme H_0 .
$p\text{–}hodnota \geq \alpha$	Na hladině významnosti α nezamítáme H_0.

„P-value is low, the null hypothesis must go!“



Příklad s hladinou cholesterolu

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

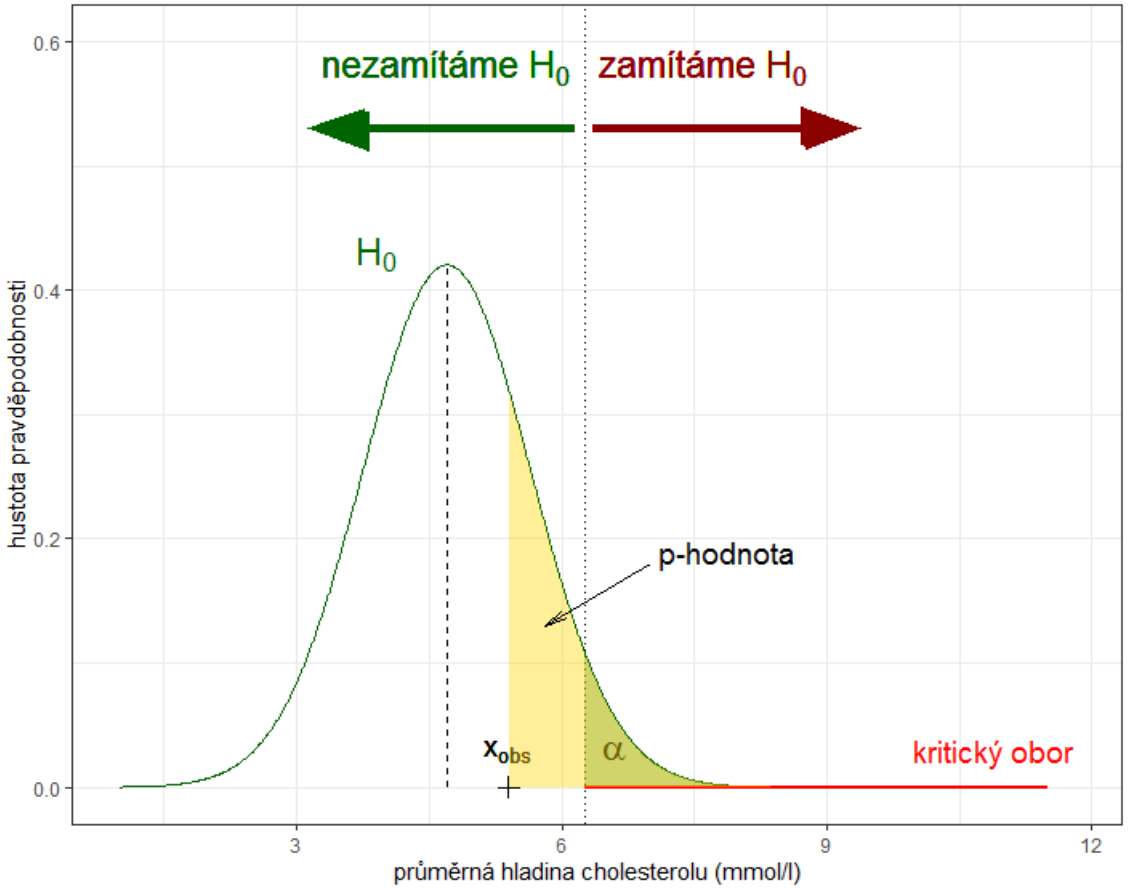
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

$\alpha = 0{,}05$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

$p - hodnota = P\left(\bar{X} > 5{,}4 \middle| H_0\right) = 0{,}230$

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme H_0 ($p - hodnota = 0{,}230$).



Význam p-hodnoty

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

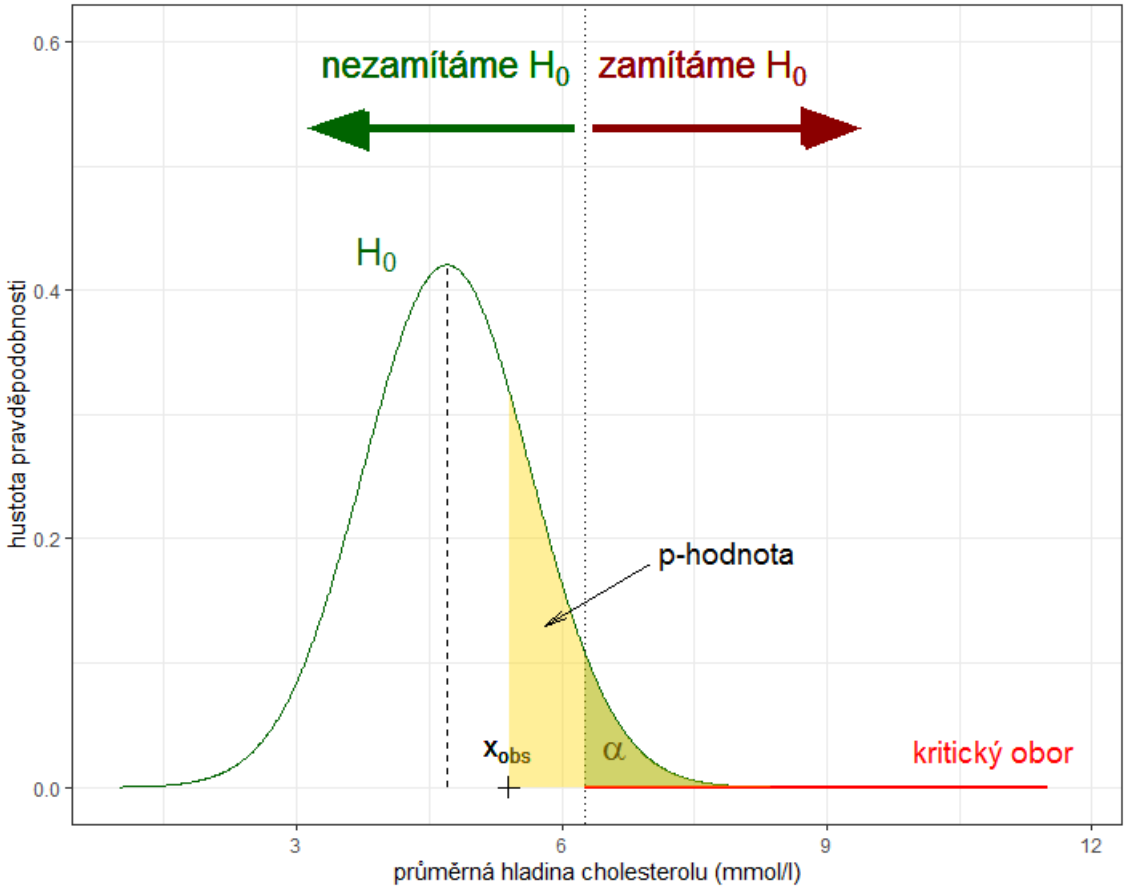
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

$p - hodnota = P\left(\bar{X} > 5{,}4 \middle| H_0\right) = 0{,}230$

Co znamená, že $p - hodnota = 0{,}230$**?**

Platí-li H_0, pak p-st, že při opakovaném výběru o rozsahu 10 pacientů zjistíme průměrnou hladinu cholesterolu 5,4 g/ 100 ml nebo vyšší je 0,230.



Význam p-hodnoty

H_0: $\mu = 4{,}7$

H_A: $\mu > 4{,}7$

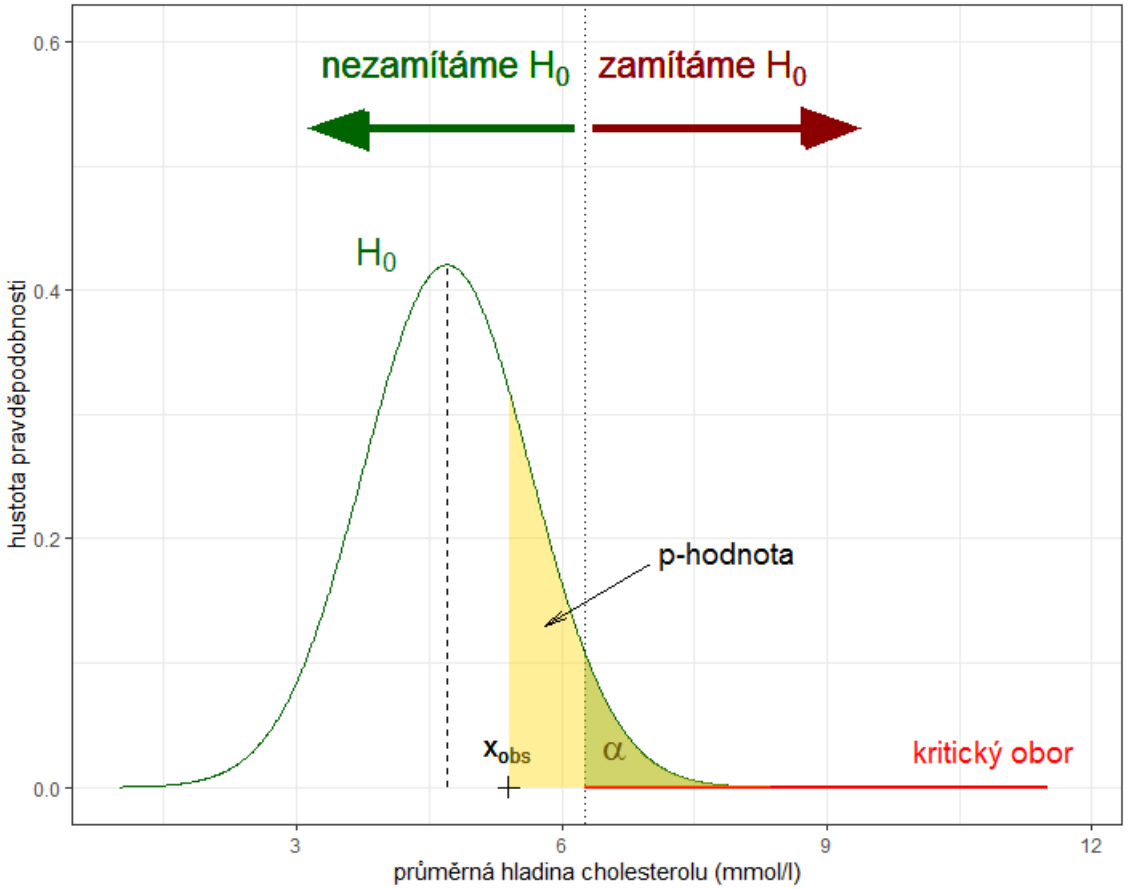
$n = 10$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = 0{,}9\right)$

$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

$p - hodnota = P\left(\bar{X} > 5{,}4 \middle| H_0\right) = 0{,}230$

Co neznamená, že $p - hodnota = 0{,}230$?

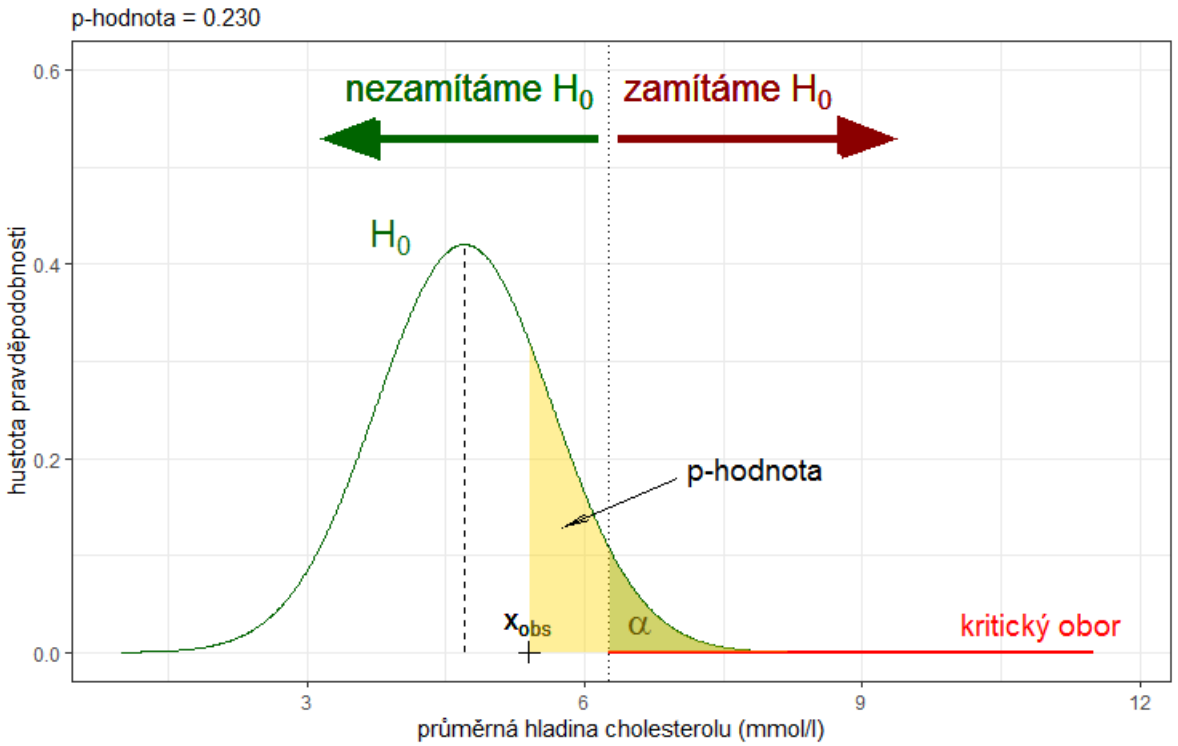
- ~~P-st, že platí H_0 je 0,230.~~
- ~~P-st, že neplatí H_A je 0,230.~~
- ~~P-st, že pozorovaný efekt je způsoben pouze náh. kolísáním kolem očekávané hodnoty je 0,230.~~

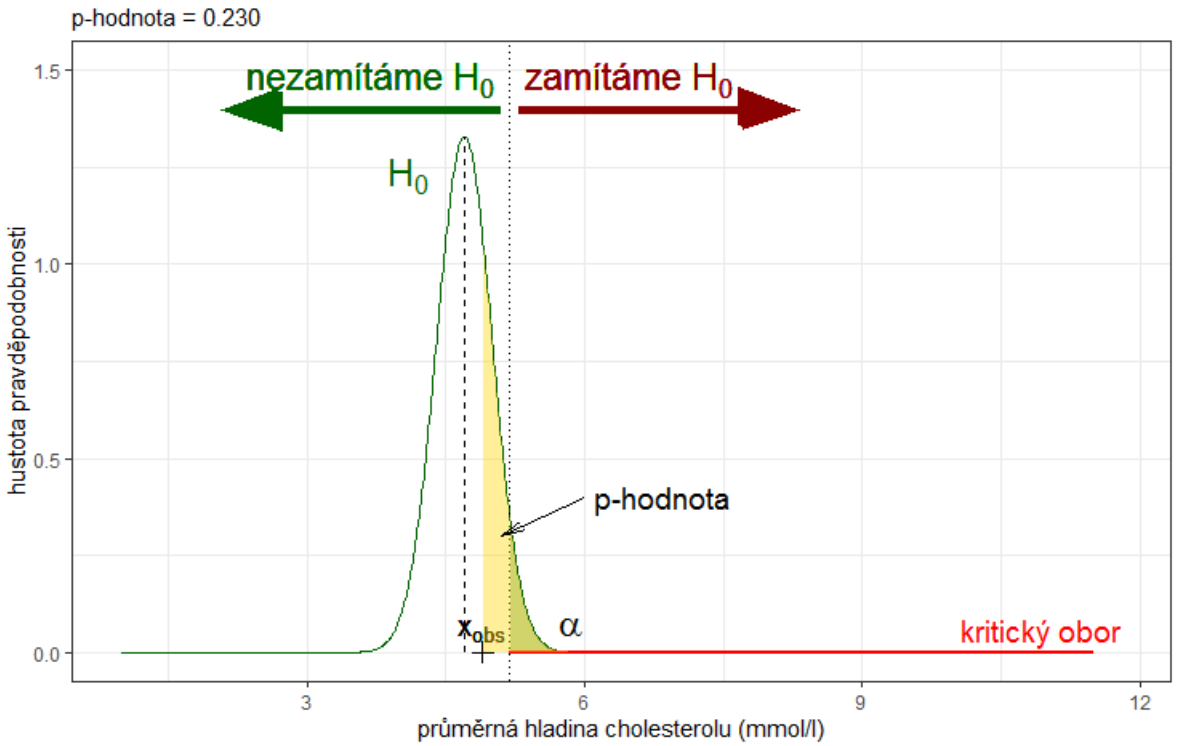


Význam p-hodnoty

POZOR!!!

- Z velikosti p-hodnoty nelze usuzovat ani na velikost, ani na významnost pozorovaného efektu.
- P-hodnotu nelze používat ke srovnávání „síly“ rozhodnutí při různých testech.





Příklad s hladinou cholesterolu (vliv rozsahu výběru na rozhodnutí o výsledku testu)

H_0: $\mu = 4{,}7$

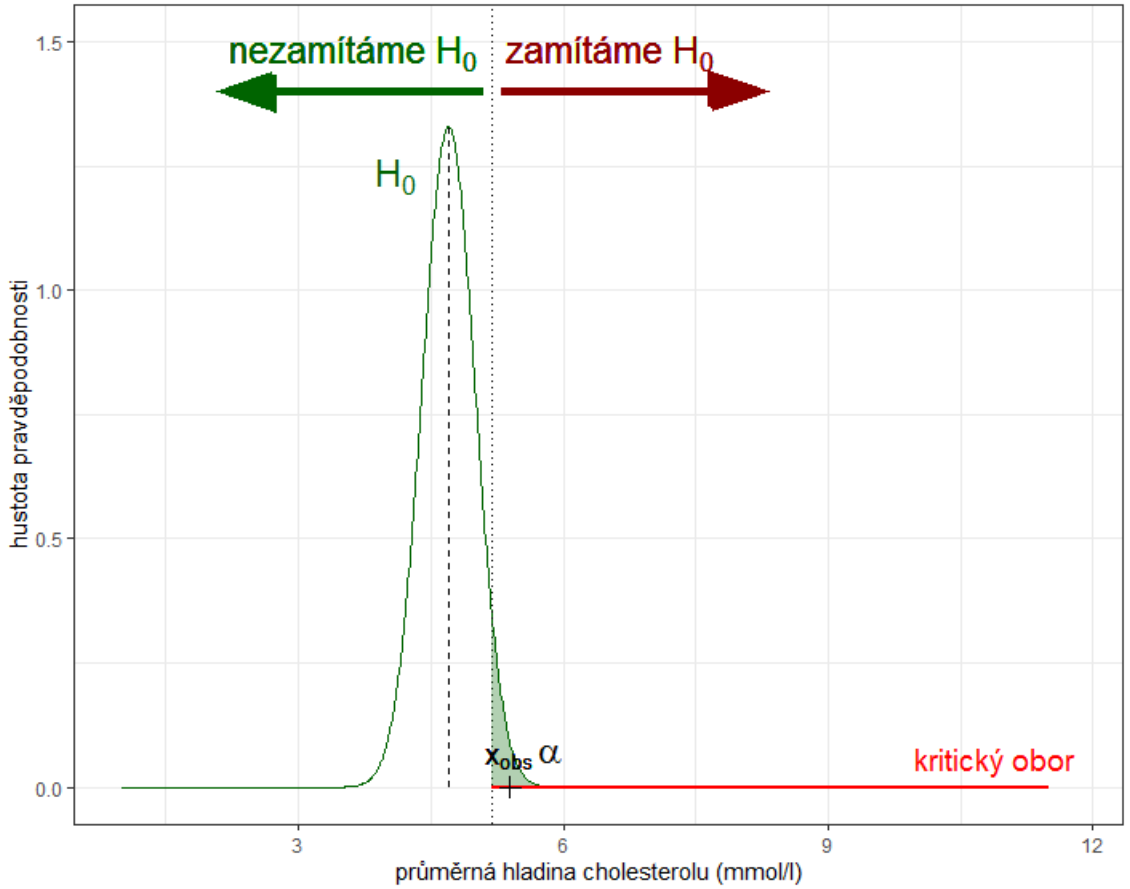
H_A: $\mu > 4{,}7$

$n = 100$: Platí-li H_0: $\bar{X} \sim N\left(\mu = 4{,}7, \sigma^2 = \frac{9{,}0}{100}\right)$

$\alpha = 0{,}05$

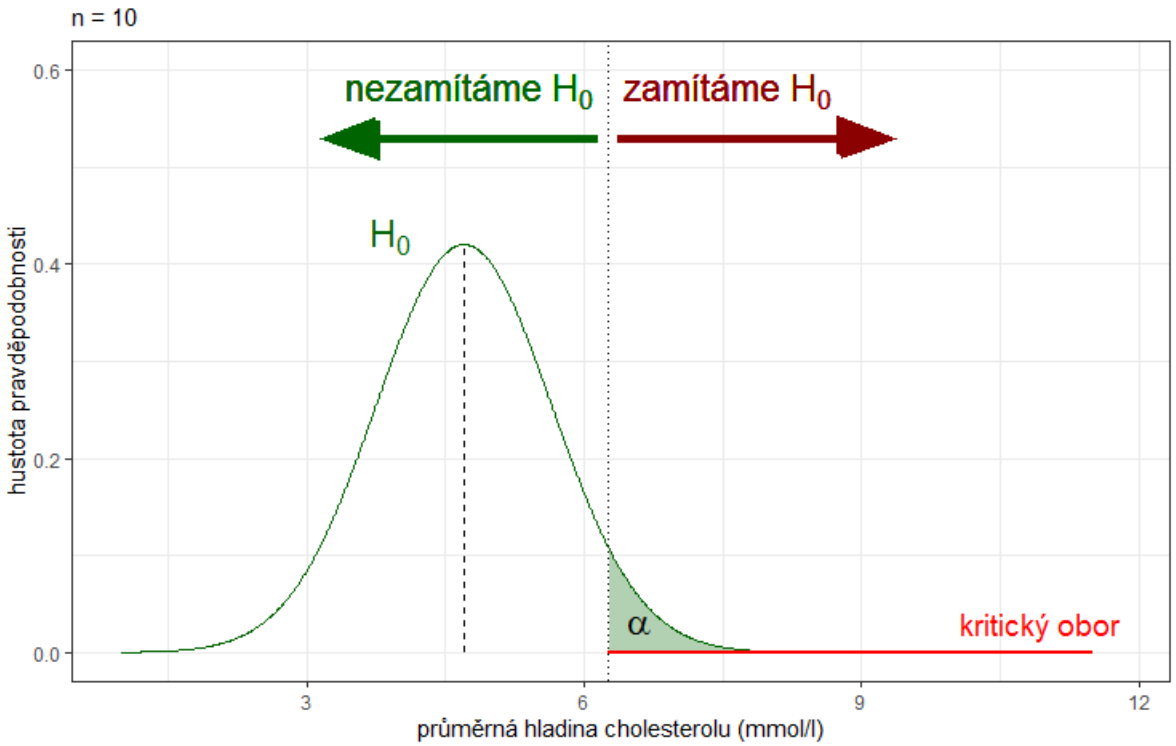
$x_{OBS} = \bar{x} = 5{,}4$

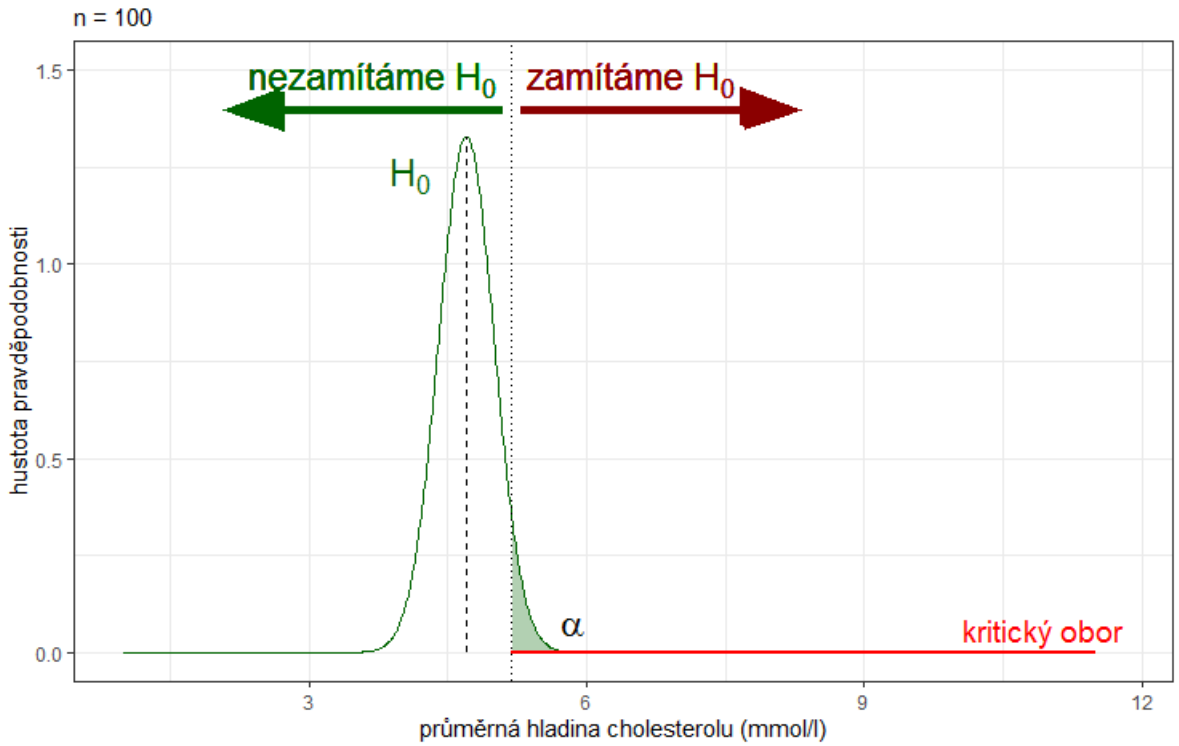
- Na hladině významnosti 0,05 zamítáme H_0 ve prospěch H_A.
- Tj. průměrná hladina cholesterolu v krvi pacientů v MSK **statisticky významně** převyšuje 4,7 mmol/l.
- Tj. **pozorovaný efekt je statisticky významný**.



Statistická významnost vs. praktická významnost

- Při použití příliš **malého rozsahu výběru** bude i prakticky významný efekt označen za statisticky nevýznamný.
- Při použití příliš **velkého rozsahu výběru** bude i velmi malý efekt (prakticky nevýznamný) označen za statisticky významný.





Statistická významnost vs. praktická významnost

- Při použití příliš **malého rozsahu výběru** bude i prakticky významný efekt označen za statisticky nevýznamný.
- Při použití příliš **velkého rozsahu výběru** bude i velmi malý efekt (prakticky nevýznamný) označen za statisticky významný.

		Statistická významnost (dle výsledku testu)	
		Ne (Nezamítáme H_0)	**Ano (Zamítáme H_0)**
Praktická významnost	**Ne**	OK	**Příliš velký rozsah výběru?**
	Ano	**Příliš malý rozsah výběru?**	OK

- Pomocí testování hypotéz **se snažíme detekovat** (tj. prokázat jako statisticky významný) takový **efekt, který je prakticky významný** (má praktickou důležitost) pro určitý řešený problém. (Power analýza)
- Tohoto cíle chceme dosáhnout **při co nejmenším možném rozsahu výběru** (počtu měřených hodnot).

Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Jak postupovat při testování hypotéz?

Klasický přístup:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ. (Rozdělení testové statistiky za předpokladu platnosti nulové hypotézy nazýváme nulové rozdělení.)
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Určíme **kritický obor** W^*, tj. množinu, v níž se, za předpokladu platnosti H_0, hodnoty testové statistiky vyskytují s velmi malou pravděpodobností.
  - ✓ Doplňkem k W^* je tzv. obor přijetí V^*.
  - ✓ Hranici mezi kritickým oborem a oborem přijetí označujeme jako kritická hodnota testu t_{krit}.
- Na základě konkrétní realizace výběru určíme **pozorovanou hodnotu x_{OBS} testové statistiky**.
- **Rozhodneme o výsledku testu.**

$x_{OBS} \in W^*$	Na hladině významnosti α zamítáme H_0 ve prospěch H_A.
$x_{OBS} \notin W^*$	Na hladině významnosti α nezamítáme H_0.

Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Klasický test:

ad1) $H_0\colon\ \mu = 4{,}7; \qquad H_A\colon\ \mu > 4{,}7$

ad2) $\alpha = 0{,}05$

ad3) $T(X) = \bar{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$ $\Leftrightarrow$ $T(X) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0; 1)$

původní přístup k řešení

alternativní přístup k řešení

Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Klasický test:

ad1) $H_0\colon\ \mu = 4{,}7; \qquad H_A\colon\ \mu > 4{,}7$

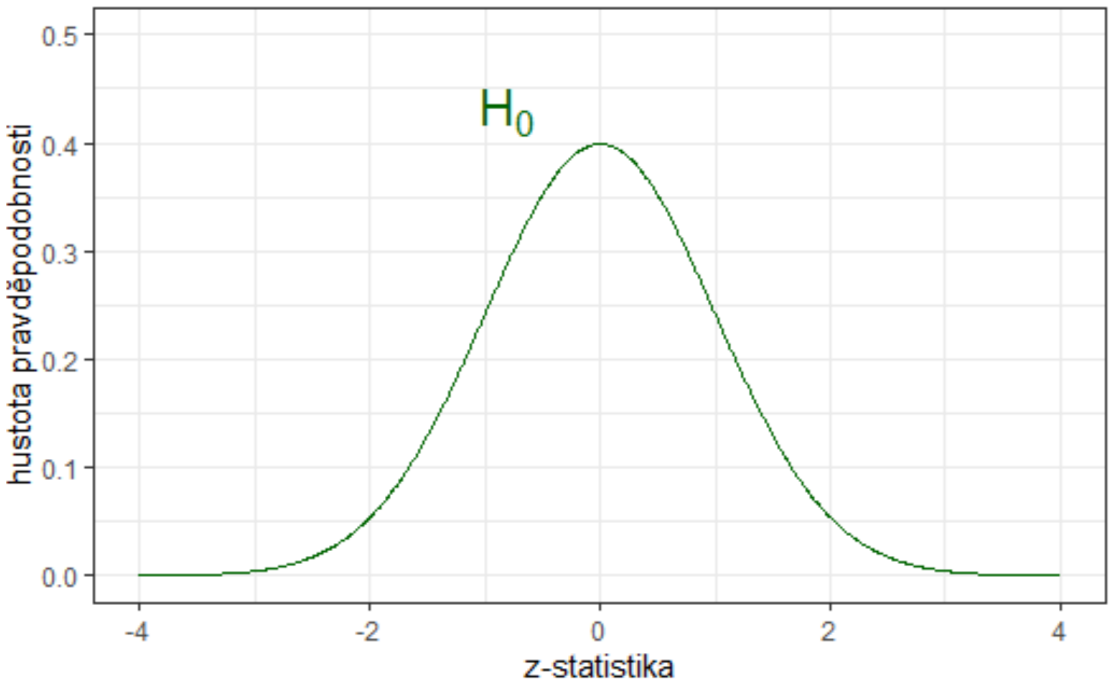
ad2) $\alpha = 0{,}05$

ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5)



Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Klasický test:

ad1) $H_0\colon\ \mu = 4{,}7; \qquad H_A\colon\ \mu > 4{,}7$

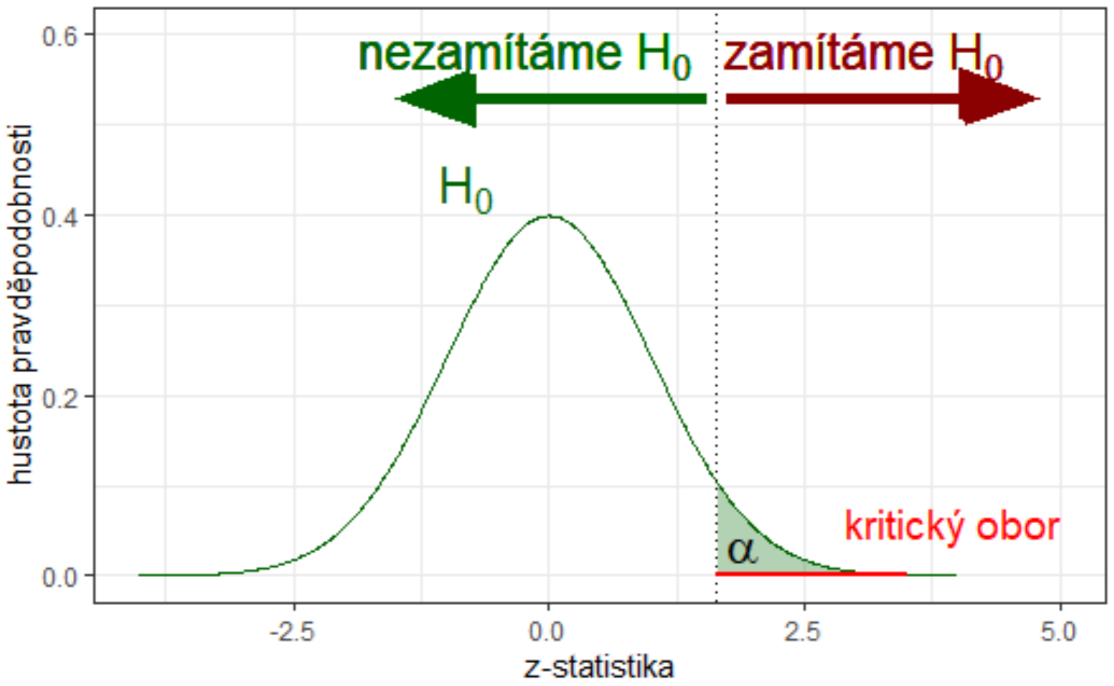
ad2) $\alpha = 0{,}05$

ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $W^* = \left(z_{0,95}; \infty\right)$



Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Klasický test:

ad1) $H_0\colon\ \mu = 4{,}7; \quad H_A\colon\ \mu > 4{,}7$

ad2) $\alpha = 0{,}05$

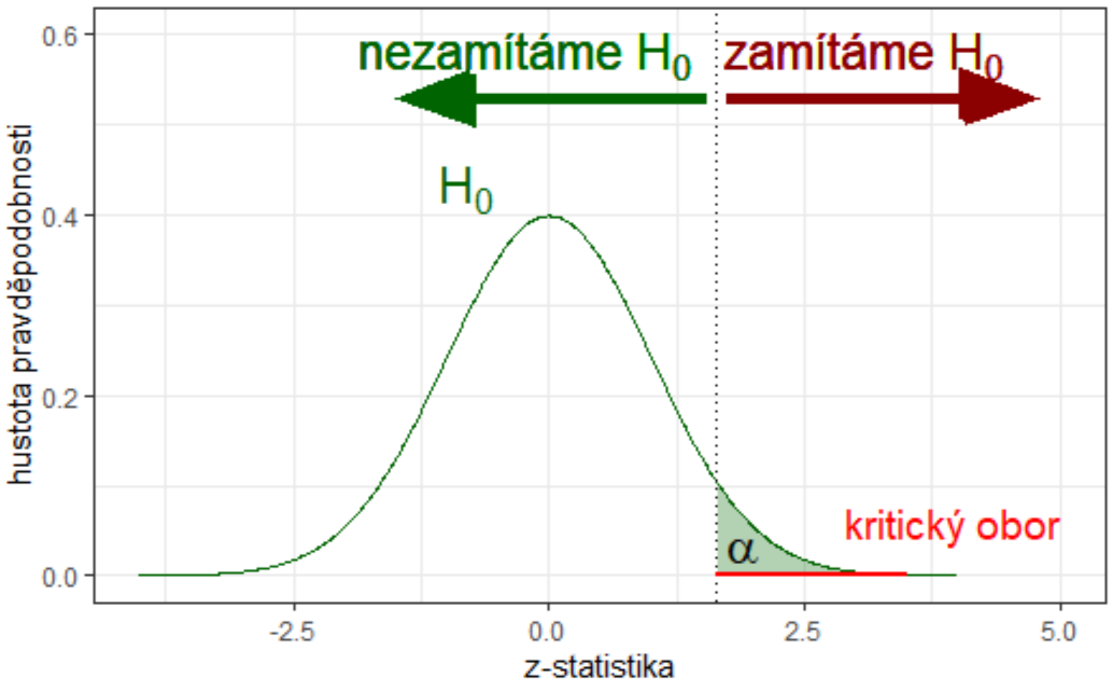
ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $W^* = (1{,}64; \infty)$

ad6) $x_{OBS} = T(\boldsymbol{X})|H_O = \frac{5{,}4-4{,}7}{3}\sqrt{10} \cong 0{,}738$



Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Klasický test:

ad1) H_0: $\mu = 4{,}7$; H_A: $\mu > 4{,}7$

ad2) $\alpha = 0{,}05$

ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

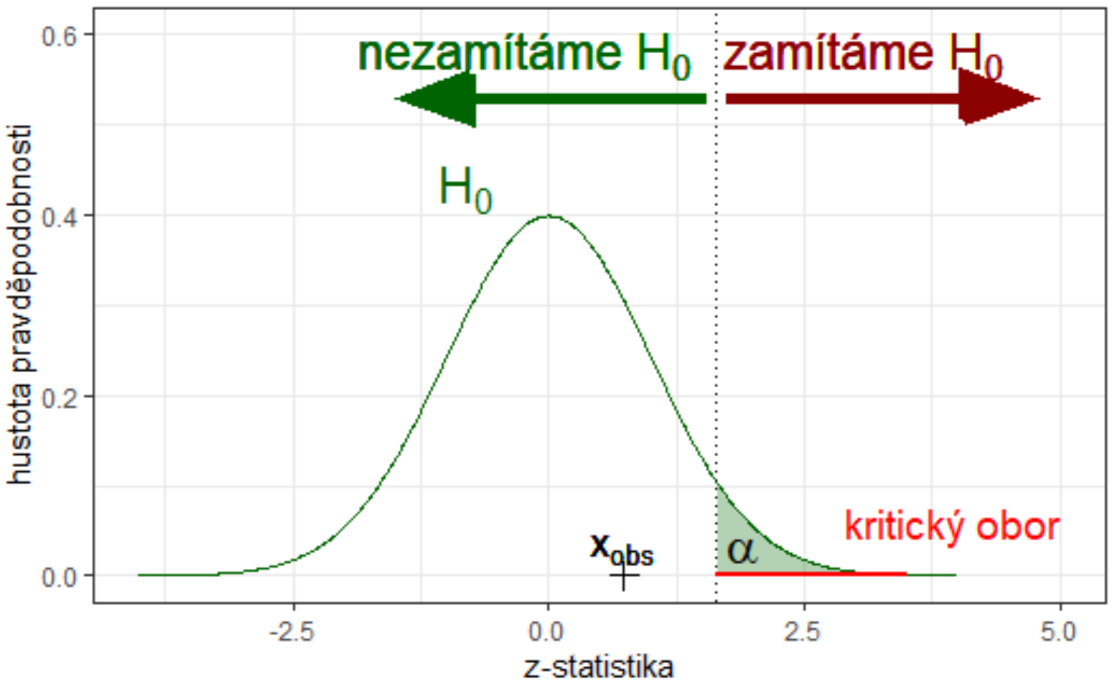
ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $W^* = (1{,}64; \infty)$

ad6) $x_{OBS} = T(\boldsymbol{X})|H_O = \frac{5{,}4-4{,}7}{3}\sqrt{10} \cong 0{,}738$

ad7) $x_{OBS} \notin W^*$, tj. na hladině významnosti 0,05 nelze H_0 zamítnout.



Jak postupovat při testování hypotéz?

Čistý test významnosti:

- Formulujeme **nulovou a alternativní hypotézu**.
- Stanovíme **hladinu významnosti** (p-st chyby I. druhu).
- Zvolíme tzv. **testovou statistiku**, tj. výběrovou charakteristiku, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru θ.
- Ověříme **předpoklady testu**!
- Na základě konkrétní realizace výběru určíme **pozorovanou hodnotu x_{OBS} testové statistiky**.
- Vypočteme ***p*-hodnotu** (angl. „*p*-value“ nebo „significance level“).

Tvar alternativní hypotézy H_A	$p\text{–}hodnota$
$\theta < \theta_0$	$p\text{–}hodnota = F_0(x_{OBS})$
$\theta > \theta_0$	$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$
$\theta \neq \theta_0$	$p\text{–}hodnota = 2min\{F_0(x_{OBS}); 1 - F_0(x_{OBS})\}$

- **Rozhodneme** o výsledku testu.

$p\text{–}hodnota < \alpha$	Na hladině významnosti α zamítáme H_0 ve prospěch H_A.
$p\text{–}hodnota \geq \alpha$	Na hladině významnosti α nezamítáme H_0.

Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Čistý test významnosti:

ad1) H_0: $\mu = 4{,}7$; H_A: $\mu > 4{,}7$

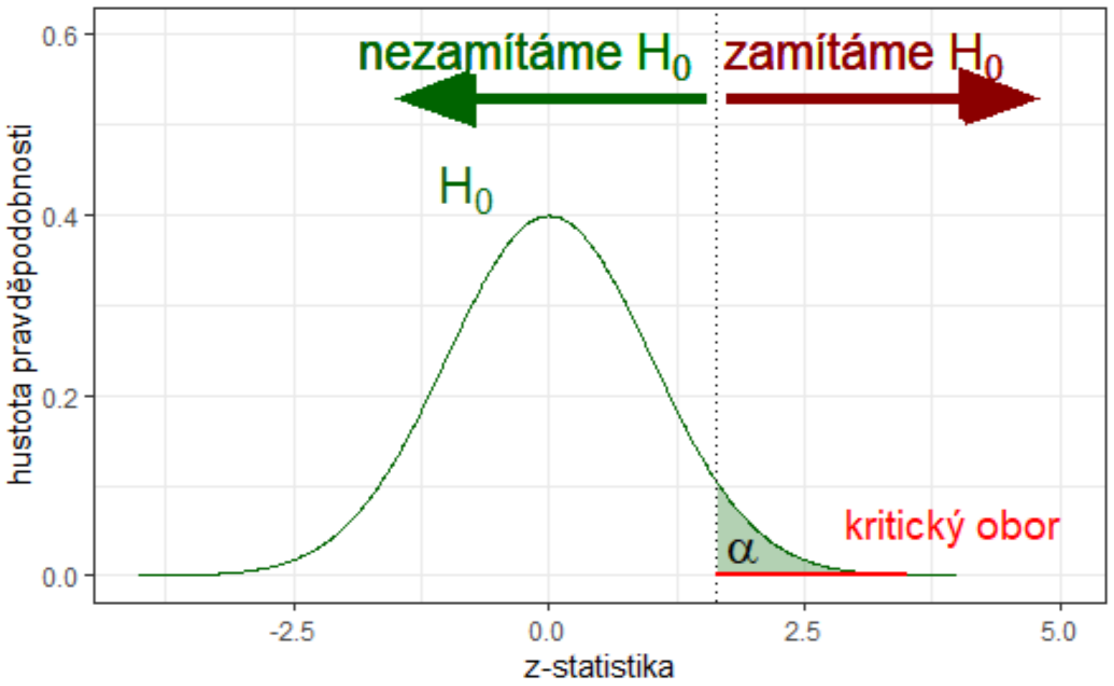
ad2) $\alpha = 0{,}05$

ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $x_{OBS} = T(\boldsymbol{X})|H_O = \frac{5{,}4-4{,}7}{3}\sqrt{10} \cong 0{,}738$



Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Čistý test významnosti:

ad1) H_0: $\mu = 4{,}7$; H_A: $\mu > 4{,}7$

ad2) $\alpha = 0{,}05$

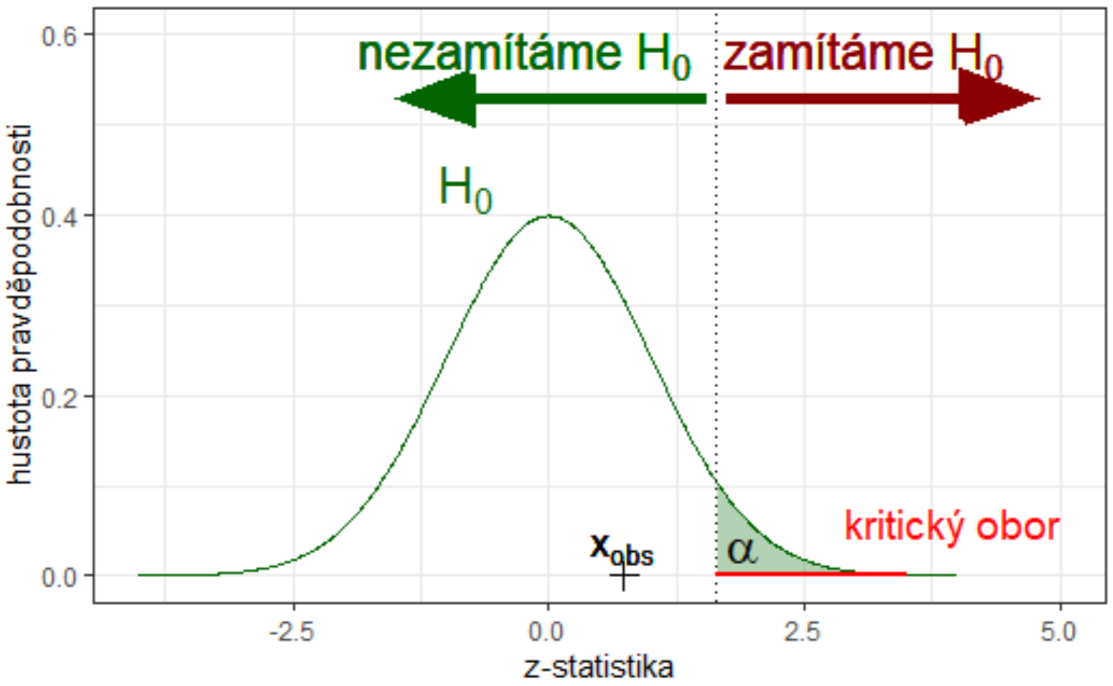
ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $x_{OBS} = T(\boldsymbol{X})|H_O = \frac{5{,}4-4{,}7}{3}\sqrt{10} \cong 0{,}738$

ad6) $p - hodnota = P(T(X) > x_{OBS}|H_O)$



Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Čistý test významnosti:

ad1) H_0: $\mu = 4{,}7$; H_A: $\mu > 4{,}7$

ad2) $\alpha = 0{,}05$

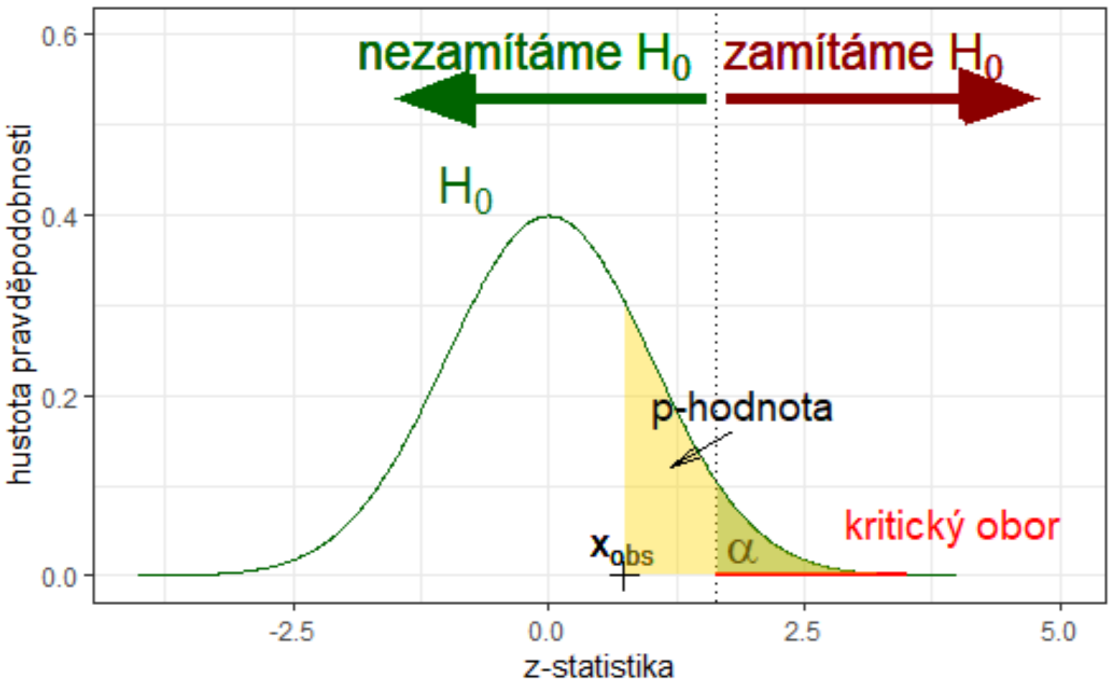
ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $x_{OBS} = T(\boldsymbol{X})|H_O = \frac{5{,}4-4{,}7}{3}\sqrt{10} \cong 0{,}738$

ad6) $p - hodnota = P(T(X) > x_{OBS}|H_O)$



Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Čistý test významnosti:

ad1) H_0: $\mu = 4{,}7$; H_A: $\mu > 4{,}7$

ad2) $\alpha = 0{,}05$

ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

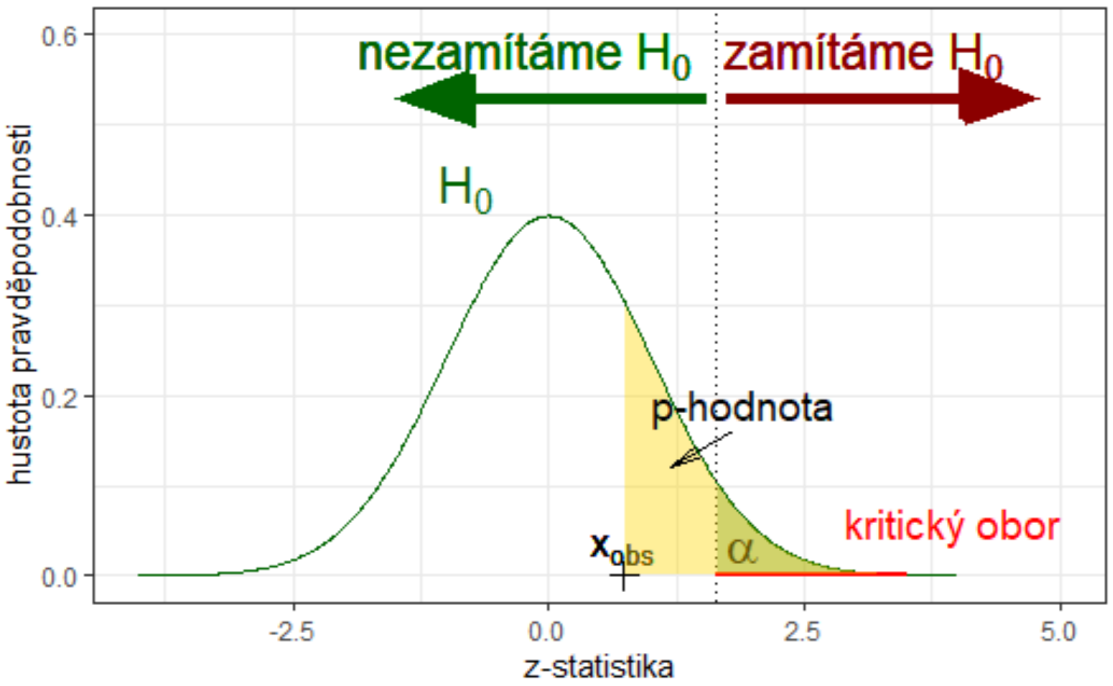
ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $x_{OBS} = T(\boldsymbol{X})|H_O = \frac{5{,}4-4{,}7}{3}\sqrt{10} \cong 0{,}738$

ad6) $p - hodnota = 0{,}230$ (*1-pnorm(0.738,0,1)*)

ad7) $p - hodnota > \alpha$, tj. na hladině významnosti α nelze H_0 zamítnout.



Příklad s hladinou cholesterolu – alternativní přístup

Příklad: Chceme na 5% hladině významnosti ověřit, zda v MSK je střední hl. cholesterolu st. Významně vyšší než v literatuře uváděných 4,7 mmol/l. Víme, že směrodatná odchylka hladin cholesterolu v krvi pacientu je 3,0 mmol/l. Zároveň předpokládáme, že hladinu cholesterolu v krvi pacientu lze modelovat normálním rozdělením. Na náhodném výběru 10 pacientů jsme zjistili průměrnou hl. cholesterolu 5,4 mmol/l.

Čistý test významnosti:

ad1) H_0: $\mu = 4{,}7$; H_A: $\mu > 4{,}7$

ad2) $\alpha = 0{,}05$

ad3) $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0;1)$ (tzv. **z-test**)

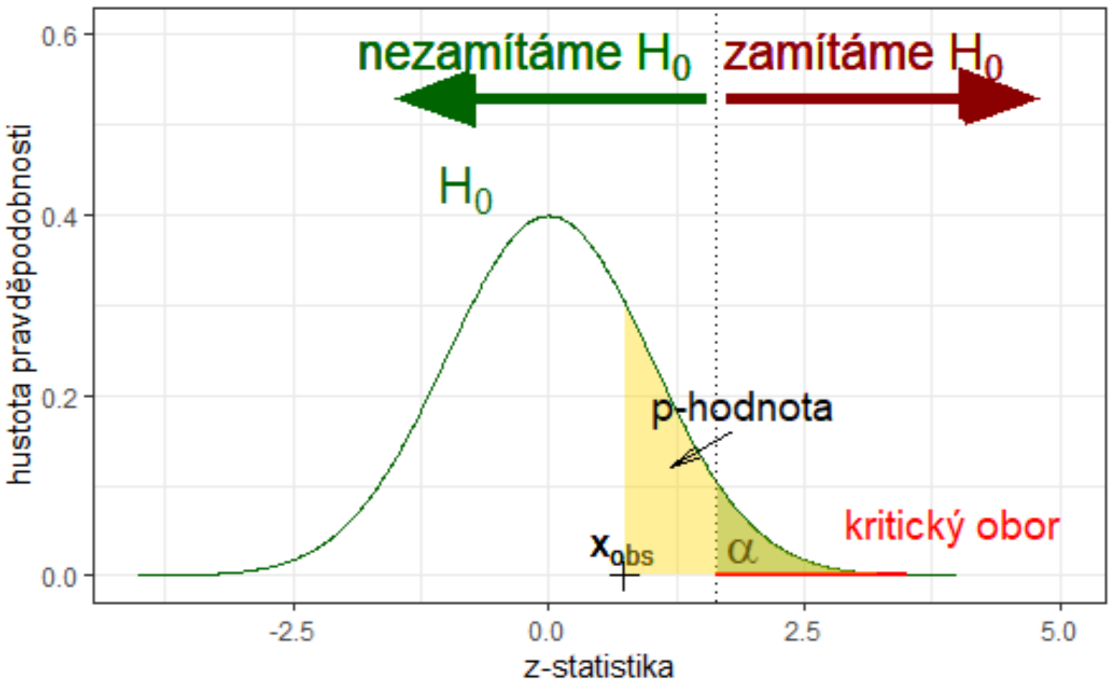
ad4) Předpoklady: normalita ✓

známe σ ✓

ad5) $x_{OBS} = T(\boldsymbol{X})|H_O = \frac{5{,}4-4{,}7}{3}\sqrt{10} \cong 0{,}738$

ad6) $p - hodnota = 0{,}230$ (*1-pnorm(0.738,0,1)*)

ad7) $p - hodnota > \alpha$, tj. na hladině významnosti 0,05 nelze H_0 zamítnout.



Vybrané jednovýběrové testy parametrických hypotéz

Mějme realizaci náhodného výběru $\boldsymbol{x}$ ze spojitého rozdělení, tj. $\boldsymbol{x} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ a předpokládejme, že rozsah výběru nepřesahuje 5 % velikosti populace ($\mathrm{n} \leq 0{,}05\mathrm{N}$, neboli $\mathrm{N} \geq 20\mathrm{n}$).				
Název testu	**Nulová hypotéza**	**Předpoklady testu**	**Testová statistika $\boldsymbol{T(X)}$**	**Nulové rozdělení**
Test o rozptylu	$\sigma^2 = c$	normalita	$\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$	χ^2_{n-1}
Jednovýběrový z test	$\mu = c$	normalita nebo $\mathrm{n} > 30$, známe σ	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	$N(0;1)$
Jednovýběrový t test		normalita, neznáme σ	$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$	t_{n-1}

Mějme realizaci náhodného výběru $\boldsymbol{x}$ z alternativního rozdělení, tj. $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a předpokládejme, že rozsah výběru nepřesahuje 5 % velikosti populace ($n \leq 0{,}05N$, neboli $N \geq 20n$).				
Název testu	**Nulová hypotéza**	**Předpoklady testu**	**Testová statistika $\boldsymbol{T(X)}$**	**Nulové rozdělení**
Test o parametru bin. rozdělení	$\pi = c$	$n > \frac{9}{p(1-p)}$	$\frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\sqrt{n}$	$N(0;1)$

parametrické testy

Vybrané jednovýběrové testy parametrických hypotéz

Mějme realizaci náhodného výběru $\boldsymbol{x}$ ze spojitého rozdělení, tj. $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$
a předpokládejme, že rozsah výběru nepřesahuje 5 % velikosti populace ($\mathrm{n} \leq 0{,}05\mathrm{N}$, neboli $\mathrm{N} \geq 20n$).

Název testu	**Nulová hypotéza**	**Předpoklady testu**	**Testová statistika $T(X)$**	**Nulové rozdělení / Kritický obor**
Znaménkový test	$x_{0,5} = c$		$T(\boldsymbol{X})$ … počet kladných odchylek od c	$Bi(n; \pi = 0{,}5)$ Z výběru před začátkem testování vyloučíme pozorování, která jsou rovna c.
Jednovýběrový Wilcoxonův test	$x_{0,5} = c$	symetrie rozdělení	$min(S^+; S^-)$, kde $S^+ = \sum_{Z_i \geq 0} R_i$, $S^- = \sum_{Z_i < 0} R_i$	$W = \{T: T \leq x_{krit}\}$ Kritické hodnoty x_{krit} jsou tabelovány (Tab. T6)
		symetrie rozdělení, $n > 30$	$\frac{S^+ - \mathrm{E}(S^+)}{\sqrt{\mathrm{D}(S^+)}}$, kde $S^+ = \sum_{Z_i \geq 0} R_i$, $\mathrm{E}(S^+) = \frac{1}{4}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$, $\mathrm{D}(S^+) = \frac{1}{24}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(2\mathrm{n}+1)$	$N(0; 1)$

neparametrické testy

Wilcoxonův test

H_0: $x_{0,5} = c$

Jak realizujeme Wilcoxonův test?

- Z realizace náhodného výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vypočteme posloupnost „odchylek od testované hodnoty c“, tj. posloupnost $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n)$, kde $z_\mathrm{i} = x_\mathrm{i} - c$.
- Posloupnost $\boldsymbol{z}$ seřadíme vzestupně podle $|z_\mathrm{i}|$ a jednotlivým prvkům této seřazené posloupnosti přiřadíme pořadí r_i. Je-li více prvků, které mají stejnou $|z_\mathrm{i}|$, přiřadíme jim stejné pořadí rovné aritmetickému průměru jejich pořadí.
- Pozorovanou hodnotu určíme dle:

$$x_{OBS} = min(\mathrm{s}^+; \mathrm{s}^-),$$

$$\text{kde } \mathrm{s}^+ = \sum_{z_i \geq 0} r_\mathrm{i}, \quad \mathrm{s}^- = \sum_{z_i < 0} r_\mathrm{i}$$

- Kritické hodnoty Wilcoxonova testu najdeme ve Vzorcích a tabulkách v tabulce T6.

Vybrané jednovýběrové testy parametrických hypotéz

Jak lze otestovat hypotézu o poloze rozdělení, když nelze použít test o střední hodnotě?

- Uvědomme si, že z-test i t-test mají předpoklad normality (výběr musí být výběrem z normálního rozdělení).
- Otestujeme medián!

Poznámky k Wilcoxonovu testu

- Má-li X symetrické rozdělení, pak je medián i střední hodnotou.
- Jednovýběrový Wilcoxonův test se často používá jako neparametrická alternativa testu o střední hodnotě.
- Wilcoxonův test má větší sílu testu než test znaménkový.

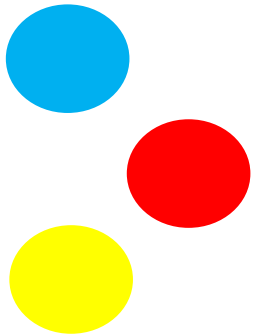
Několik poznámek pro praxi

Pozor na pečlivé plánování experimentu!

Nutno zajistit nezávislost pokusů, eliminaci vlivů nežádoucích faktorů, dostatečný rozsah výběru (výsledky testu nelze upravovat tím, že dodatečně rozšíříme výběrový soubor), …

Příklad: Včely jsou postupně vypouštěny do pokusného prostoru se žlutými, červenými a modrými terči. Sledujeme barvu terče, na který každá včela poprvé usedne. Nulová hypotéza je, že pravděpodobnost usednutí nezávisí na barvě terče (tímto způsobem zjišujeme, zda se včely vizuálně orientují a zda při této orientaci hrají nějakou úlohu barvy).

(Lepš, Kapitola 2 – testování hypotéz, test dobré shody, online: http://botanika.bf.jcu.cz/suspa/vyuka/materialy/KAP2.pdf [2012-03-19])



Co všechno je třeba při pokusu zajistit?

- vypouštění včel po jednotlivcích,
- včely nesmí zanechávat stopy o své návštěvě terče (není-li splněno, nutná výměna terčů po každém pokusu),
- předem daný počet pokusů…

Několik poznámek pro praxi

- V odborných pracích většinou výsledky testování hypotéz prezentujeme ve tvaru: (název testu, pozorovaná hodnota testové statistiky, p-hodnota) + někdy doplňujeme další parametry testu (např. stupně volnosti u χ^2 testu dobré shody).

  Např.: Předpoklad normality byl na hladině významnosti 0,05 zamítnut (χ^2 test dobré shody; χ^2=14,9; $df = 6; p - hodnota = 0{,}021$).

- Pokud je výstupem software: $p - hodnota = 0$, znamená to, že $p - hodnota$ je menší než přesnost software. Do odborných textů nikdy NEPIŠTE $p - hodnota = 0$, ale např. $p - hodnota \ll 0{,}001$. (Obdobně: Do odborných textů nikdy NEPIŠTE $p - hodnota = 1$, ale např. $p - hodnota \gg 0{,}999$.)

- Uvědomte si, co to znamená, když $p - hodnota \to 1$! (Příliš dobrá shoda dat s nulovou hypotézou je podezřelá – angl. „Too good to be true!“)

Několik poznámek pro praxi

- Nezapomínejte na to, že statistická významnost a praktická významnost není totéž!
  - ✓ Při použití příliš **malého rozsahu výběru** bude i prakticky významný efekt označen za statisticky nevýznamný.
  - ✓ Při použití příliš **velkého rozsahu výběru** bude i velmi malý efekt (prakticky nevýznamný) označen za statisticky významný.

Statistická významnost (dle výsledku testu)

Praktická významnost	**Ne (Nezamítáme H_0)**	**Ano (Zamítáme H_0)**
Ne	OK	**Příliš velký rozsah výběru?**
Ano	**Příliš malý rozsah výběru?**	OK

Děkuji za pozornost!

martina.litschmannova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY